

APOLLONII
PERGÆI
CONICORVM
LIBRI IV.
CVM COMMENTARIIS
R. P. CLAVDII RICHARDI,

E Societate IESV Sacerdotis, Patria Ornacensis in libero Comitatu Burgundiæ, & in Collegio Imperiali eiusdem Societatis Regij Mathematicarum Matriti Professoris,

Dicatis







ANTVERPIÆ,
Apud HIERONYMVM & IOANNEM BAPT. VERDVSSEN

Cum Gratiâ & Priuilegio. Anno 1655.



EXCELLENTISSIMO DOMINO

D. GVLIELMO

RAYMVNDO

DE MONCADA,

MARCHIONI

DE AYTONA,

ET DE

LA PVEBLA DE CASTRO,

COMITI DE OSSONA,

VICECOMITI DE ILLA, DE BAS, DE CABRERA; BARONI DE LA LAGVNA, DE LLAGOSTERA, DE CHIVA, DE PALMA, DE BENIARCHO, DE ADOR, DE CALLOSA, DE VAL DE TARVENA, DE ALFAXARIN, DE HOZ, DE NVEZ, DE FARLETE: DOMINO DOMVS DE CASTRO, ET DOMVS QVATVOR CASTELLORVM: ORDINIS EQVESTRIS CALATRAVÆ BENEFICIARIO DE LA FRESNEDA: MAGNO SENESCALCO REGNORVM ARAGONIÆ: RATIONVM REGIARVM IN CATALAVNIA SVMMO QVÆSTORI: E NOBILISSIMIS CLAVIS AVREÆ CVBICVLARIIS REGIÆ MAIESTATIS: PAVCIS ABHINC ANNIS PRIMVM IN CALLOECIÆ REGNO GVBERNATORI, AC DVCI ARMORVM; TVM IN CATALAVNIA PROREGI, ET EXERCITVS REGII SVPREMO PRÆFECTO.



VANDOQVIDEM *Excellentissime* GVLIELME RAYMVNDE DE MONCADA *Marchio de Aytona & Hispaniæ Magnas, tanto me honore affecisti, vt in iuuenilibus tuis annis Mathematicas meas lectiones per triennium integrum audieris; Tibi non immeritò hunc meum Commentarium in quatuor primos Apollonij Pergæi libros Conicorum dedicari à me Magistro pro Tua humanitate patieris: imitatus in eo Aristotelem, qui Magno Alexandro, quem in omni scientiarum politura iussu Philippi Patris instituerat, libros*

de Rethorica suos, ac de Mundo, consecrauit: tum etiam Alcuinum Anglum Caroli Magni Praeceptorem, qui opera sua omnia sub tanti Discipuli patrocinio ac nomine in lucem edidit: tum etiam nobilem Dauidem Riualtum à Fluranția Cenomanum, qui suas in Archimedem elucubrationes Christianissimo Ludouico XIII Gallorum Regi suo, studiorum eius Moderator deuouit. Sed eo libentiùs id agò quod sciam te huius acutissimi Geometræ percipere demonstrationes; & confidam aliquoties successiuis horis hunc meum Commentarium te relecturum, & subinde animi voluptatem maximam percepturum: sic Flauius Vegetius vir illustris quatuor de re militari libros à se conscriptos Valentiniano Augusto Imperatori obtulit, non vt disceret, sed memoriam refricaret eorum quæ speculatione & vsu didicerat: sic etiam Ælianus de instruendis exercituum aciebus scripsit ad Imperatorem Hadrianum, multorum magnorúmque bellorum, vt ipse loquitur, Magistrum & Imperatorem; vt ex eis, præsertim vero Alexandri Macedonis ingenio ac studio militari, quem & reliquos omnes exercitatissimos Duces in ipsa praxi superauerat, recrearetur: sic denique Modestus librum suum de vocabulis & præceptis Militiæ Tacito Augusto detulit, vt veluti in compendio mens eius longa eorum consuetudine grauata subleuaretur. Eidem præstabunt aliquando studiorum tuorum Mathematicorum commentarij tui scripti in partes omnes militiæ, ingenij tui subtilis quidem & laboriosi simul, quod rarum est, immortalia monumenta, & nobilibus viris ad liberales artes discendas incitamenta. Et quia me à multis annis beneuolentia Tua cohonestasti, & multis beneficijs deuinxisti; potui genium Tuum nobile agnoscere, ingenuos Tuos mores adnotare, virtutes admirari, & præsertim Pietatis ac Religionis Christianæ sensum & exercitium: vno verbo complectar Te ad magna & praeclara pro Rege & publico natum; & ab Auctore naturæ necessarijs ad ea dotibus ornatum: Tibi Maiores tuos, ex quibus continuata serie descendis ab nongentis & amplius annis in Hispania clarissimos, eorumq; primam originem ob oculos proponere decreui, in quibus magna & illustria omnia & admiratione digna iudicabuntur: & ad singulos addidi ex historiarum veterum & recentiorum scriptoribus, quæ quisque prudenter ac fortiter successu temporis pro Christiana Religione, & pro Principibus ac Regibus suis præclara gesserit, vt eos imiteris & excedas; & quibus honorum titulis & beneficijs ab eis fuerint exornati, quæ omnia ferme per tot annorum seriem etiam cum augmento in Te hereditario iure deuenerunt. Consultò declinaui gesta referre memoratu dignissima aliorum Moncadarum ex eodem quidem trunco procedentium, sed ex secundarijs ramis ac diuersis à Tuo primo; inter quos ramus est florentissimus in Sicilia, cuius culmen est Excellentissimus Dominus D. Ludouicus Gulielmus de Moncada, opulentissimus Princeps de Paterno, Dux de Montalto, & Dux de Biuona &c. Verùm fateor me aliqua immiscere obiter ad eos spectantia, quæ ad Moncadarum Tuorum primi rami splendorem non parum prodcrunt, & ad aliorum claritudinem, vtpote ita coniuncta vt separari vix possint absque communi eorum detrimento.

Itaque hos Antecessores Tuos recurrendo non incurres Messallarum Romanorum equitum notam, Oratoris, & senioris; illius quidem qui prohibuit inseri Genti suæ Leuinorum alienam imaginem; huius verò qui tulit indignè Scipionum Africanorum nomen fœdatum Salutionis statua, hominis quidem ditissimi adoptati ab Scipionibus, verùm longè inferioris nobilitate, in atrio domicilij Scipiadum inter claros eorum Proauos constituta: sed neque Tibi exprobrabit Plinij dictum, Te in alienos triumphos immittere; cùm sint ipsius Tuæ familiæ. Audiamus Plinium lib. 32. cap. 2 loquentem, & Messallas referentem, dum loquitur de Imaginibus & signis, & stemmatibus Romanorum nobilium, in eorum palatijs erectis. Stemmata lineis discurrebant ad imagines pictas: Tablina codicibus implebantur, & monumentis rerum in Magistratu gestarum: Aliæ foris & circa limina animorum ingentium imagines erant, affixis gentium spoliis, quæ nec emptori refringere liceret, triumphabantque Dominis mutatis ipsæ Domus; & hæc etat stimulatio ingens, exprobrantibus tectis quotidie imbellem Dominum intrare in alienum triumphum. Exstat Messallæ oratoris indignatio,

qui

qui prohibuit inseri Genti suæ Leuinorum alienam imaginem : similis causa Messalæ seni expressit volumina illa quæ de familijs condidit ; cùm Scipionis Africani transisset atrium, vidissetque adoptione testamentaria Salutionis (hoc enim ei fuerat cognomen) Africanorum dedecore notam irrepentem Scipionum nomini.

Age verò deducamus ab origine Gentem ac familiam Tuam Moncadarum, quæ in Hispania incepit anno Domini 738. quando Catalauni Maurorum irruptione vnà cum tota Hispania obruti, se ad montium Pyrenæorum fauces receperunt, & viribus impares coacti sunt à Carolo Martello Francorum Regum & Regni summo Arbitro, qui paulò antè Regem Aquitaniæ armis domuerat, auxiliares copias efflagitare; quas liberè concessit ad numerum viginti quinque millium militũ tam equitum quàm peditũ sub Ductore Otgerto Aquitaniæ deuictæ Administratore suo; quem zelo fidei ac Religionis Christianæ comitati sunt multi è prima nobilitate Germaniæ & Galliarum Proceres, inter quos, vt scribit Escolanus lib. 8. c. 23. Regni Valentiæ, primum ac præcipuum locum tenebat Dapifer nobilis Germanus, Amicus Otgerti; teste Stephano Coruera ca. 4. vitæ Mariæ Certelloniæ, eà quòd ex Ducibus Bauariæ oriundus esset, quam originem etiam agnoscunt ac referunt Petrus Antonius Beuterus nobilis Valentinus lib. 2. c. 12. Chronicorum Hispaniæ. Gaspar Escolanus loca suprà laudato, Iacobus Marquilius lib. consuetudinum Catalauniæ, nota 4. Andreas Bosequius in epitome Titulorum honorificorum Catalauniæ, Stephanus Coruera lib cit. c. 5. Et licet solus Beuterus loco citato hunc Dapiferum illustrem Germanum, nominatum fuisse Nauferum referat, hoc nomine Nauferi tituloque Dapiferi seu dignitate deinceps vtemur. Verùm hunc titulum Dapiferi explicare me debere iudico, qui apud Germanos vsurpatur pro ijs qui sunt Præfecti domibus & palatijs Principum ac Regum, quorum officium est mensæ Principum dapes cibośq; ab nobilibus alijs allatos & acceptos apponere ac disponere. Cumq; ex annalibus Francorum constet Pippinũ Herstallum & filium eius Carolum Martellum fuisse Regum postremorum Merouingiorum Maiorem domus seu Præfectum Palatij, qui, vt verbis vtar Cedreni in Leone Iconomacho de Regis Franciæ Maiore domus, vbi palatij mentionẽ faciens sic ait, ἔχειν δὲ πρόεικον γνώμην αὐτοῦ, καὶ τοῦ ἔθνους εἰς τὸ διοικεῖν πάντα τὰ πράγματα, hoc est, habebat autem Maiorem domus, qui mens eius, & totius gentis esset in administrandis negotijs. Iulius Cæsar Bulengerus in libro suo de officijs Regni Galliæ, titulo de Maioribus palatij, scribit Maiorem hunc per initia Præfectum fuisse domesticis Aulicis & ipsi domui Regiæ, postea ei administrationem leuem rei politicæ attributam, tandem summæ rei impositum fuisse; atq; dignitatum omnium caput fuisse, Regisq; Generalem Vicarium, Præfectóque Prætorio Romanorum non absimilem : hæc Bulengerus. Cúmque habeamus ex antiquiore Regum Franciæ chronica ab Nicolaa Gilles conscripto, in vita Childerici III. Francorum Regis, Carolum Martellum vxorem habuisse filiam fratris vel sororis Ducis Bauariæ Odilonis, Nauferus in superioribus commemoratus, & approbatus è Bauariæ Ducibus oriundus, consanguinitate Carola Martello & Pipino filio eius coniunctus erat, præsertim cum Odilonis illius Bauariæ Ducis vxor esset filia ipsius Caroli Martelli & soror Pipini Patris Caroli Magni & Aui Ludouici Pij Imperatoris filij Caroli Magni. Itaque cùm summa rerum potiretur in Gallijs Carolus Martellus tempore Chilperici Regis Francorum, cuius mens erat, & Regni pace ac bello Administrator, & palatij Regij summus Præfectus & Dapifer, ipseq; esset vt Reges Francorum ex Germanorum gente, qui Gallias & Hispanias & oras Africæ subruto Romano Imperio occuparant, apud quos inualuit & adhuc retinetur consuetudo, vt eorum consanguinei eisdem honorum titulis insigniantur, præsertim ante Imperij Occidentalis fundationem & constitutiones editas Nauferus hic, de quo agimus, ab consanguinitatem cum Carolo Martello Regum & Regni Francorum Dapifero, iure Germanorum Dapifer in Historijs antiquis Regum Franciæ appellari potest; vel quod Bauariæ Principes Nauferum hunc eiusdem cum illis sanguinis Dapiferum suum, antequam in Gallias ad Carolum Martellum affinem proficisceretur, constituissent : vel quod ipse Carolus Martellus eum inter Dapiferos & Aulæ Regum Francorum secundarios illustres Præfectos, quorum erat primarius, honoris & affi-

nitatis

nitatis ergo promouisset. Hæc sunt fundamenta cur Nauferus & omnes qui ex eo procedent, possint more Germanorum dici Dapiferi: non autem per anticipationem, quia nunc Comes Palatinus è sanguine Ducum Bauariæ, sit Imperatoris Archidapifer, & reliqui omnes è stirpe Bauariæ Ducum dicantur Archidapiferi; nam hæc dignitas solummodò cœpit sub Imperature Carolo huius nominis quarto, ex conuentione Principum Germaniæ & ipsius Imperatoris in Comitijs totius Germaniæ publicis, in quibus Bulla aurea fuit ad res Germanicas & Imperatorum explicandas & stabiliendas constituta: sed neque per aliam anticipationem Nauferus & qui ab ipso in Catalaunia procedunt Dapiferi appellari possunt, eò quòd Gulielmus Raymundus II. è stirpe Nauferi rectà descendens, & Dominus de Moncada appellatus, fuerit ab Comite Barcinonensi ac Principe Catalauniæ Raymundo Berenguerio renunciatus Catalauniæ Senescalus, cui titulo annexa erat summa Præfectura domus & Aulæ Principis, ideoq; Dapifer vocabatur, vti suo loco probabimus.

Hæc in vniuersum de gente, & nomine, ac dignitate Dapiferi, fundatoris familiæ Moncadarum in Catalaunia & Hispania explicata sint. Nunc speciatim de Naufero ipso, & eius successoribus referamus, eosque numeris proprijs distinguamus.

Auxiliaris igitur exercitus ille, cui se adiunxerunt Catalauni Pyrenæos montes transgrediens, & irrumpens per Aranensem & Aneanensem valles, breui tempore Ceretaniam Mauris profligatis occupauit, & Gerundam versùs contendens præcipuam Indigetum munitionem obsidione cinxit, in qua Otgertus Dux vitam cum morte gloriosa commutauit.

Nauferus Dapifer I.

1. Nauferus autem Dapifer (quem vocabimus primum ad sequentium distinctionem ab eo procedentium Dapiferorum in historijs nominatorum more Francorum Germanorum) ab exercitu vniuerso auxiliari & Catalaunico in locum defuncti Otgerti fuit inter omnes Nobiles Duces ob ingentes eius animos & Bauaricum sanguinem, necessitudinemque cum Carolo Martello peculiarem renuntiatus summus armorum Præfectus, eique omnes fidelitatis & obedientiæ iuramentum vltrò præstitêre; vti de hac re fidem faciunt locis supra laudatis Escolanus & Coruera, Escolanus porrò mentionem facit memorabilis eius victoriæ in campo Vrgelitano de Mauris reportata, in qua tres eorum Reges cecidêre, Farexa Rex Toleti, Suparus Rex Fragæ, Alfaques Rex Segorniensis. Iste Dapifer I. diem extremum clausit anno Domini 768. ex membranis Archiui Serostiani, quibus iudico maiorem fidem adhibendam, quàm Petro de Marca Præsidi Palensi, lib. 6. c. 2. historiæ suæ Bearnensis, qui scripsit eum occisum fuisse à Mauris circa Narbonam anno 793. nam confundere videtur Nauferum Dapiferum hunc cum Dapifero filio eius nomine Arnao vitâ priuato in prælio contra Mauros, vti modò referemus.

Arnaus Dapifer II.

2. Arnaus Dapifer II. Patri Naufero Dapifero primo successit in dignitate totius exercitus Christiani Moderatoris, & Imperatorem Carolum Magnum Caroli Martelli nepotem ex Pippino eius filio ad expellendos è Catalaunia Mauros cum magnis copijs aduentantem consanguineum suum recepit, eique plurimùm profuit, vti scribunt Tomichius cap. 26. & Calca cap. 17. & 18. tandémque rebus præclarè gestis obijt anno 798. vel vt Petrus de Marca retulit loco citato, prope Narbonam ab Maurorum copijs interemptus est.

Armengolius Dapifer III. Comes Vrgelitanus & Ampuriarũ renuntiatus ab Ludouico Pio Imperatore: & post VVifredũ Comitem Barcino-

3. Armengolius Dapifer III. natu maior filius Arnai Dapiferi II. eius successor fuit in armorum Præfectura, non inferior fortitudine ac prudentia militari, Patri & Auo Dapiferis, & ingenti animo Christianorum Catalaunorum res promouit & Mauros repressit vsque ad Ludouici Pij Imperatoris Caroli Magni filij aduentum, qui fuit anno 825. Hic Imperator Ludouicus expugnata Barcinone, pulsisq; ab ea Mauris, VVifredum Comitem Barcinonensem & Catalauniæ Principem inaugurauit; & Armengolium Dapiferum III. titulo Comitis Vrgelitani & Ampuriarũ insigniuit, quas Prouincias ex hostium Maurorum dominio eripuerant eius Pater Arnaus, & Auus Nauferus, dinq; dignitas illa in posteris suis perseuerauit. Hæc Tomichius ca. 26. Diagus lib. 2. c. 15. Comitum Barcinonensium. Tarapha de Comitibus Vrgellitanis. Calça lib. 1. c. 1. 7. 8. Verùm his

rum hic vltimus Auctor addit libro 11. cap. 17. 18. citans Aymoinum & Blondum, hunc Armengolium Maurorum Pyratarum elassem iuxta Baleares Insulas redeuntem ex Italia oris maritimus onustam prædis Christianorum, intercepisse ac diripuisse, & quingentos Christianos in libertatem asseruisse, & cum octo nauibus hostium victorem redisse. nensem, primus Comes in Catalaunia.

4. *Otho huius nominis I. & Dapifer IV. Germanus frater Armengolij, cuius in superioribus bellis socius & adiutor fuerat, & præcipuè in expugnatione vrbis Barcinonensis cum Imperatore Ludouico Pio, non solùm fuit acclamatus primus ab Comite Barcinonensi VVifredo Dux exercitus contra Mauros, sed etiam ab ipso Ludouico Imperatore multorum oppidorum ac Dynastiarum, ac dimidiæ partis vrbis Vicquensis dominio circa Barcinonem remuneratus fuit; inter quæ munitio Moncada ei arrisit, cuius titulum sibi peculiarem ac posteris suis elegit potiùs quàm aliorum oppidorum; fortè quia vicinior esset Barcinoni Aulæq; Principis sui ad eum iuuandum, morémque celeriùs ei præstandum. Quòd si quispiam postulet, cur titulum Comitis Vrgellitani vel Ampuriarum non sibi attribuerit: Responsio in promptu est, quia cùm Historia mentionem faciant subsequentibus temporibus Comitum Vrgellitanorum & Ampuriarum, quos Moncadas nominant, signum manifestum est Armengolium fratrem huius Othonis Comitem Vrgellitanum & Ampuriarum antea stabilitum filios suscepisse ad quos dignitas illa Comitis hæreditario iure pertinebat, & nihilominus ob huius Othonis Auunculi eorum dignam venerationem voluerint etiam Moncadæ appellari. Superiores oppidorum diuersorum & Moncadæ donationes factas Othoni huic Dapifero IV. ab Imperatore Ludouico Pio referunt antiquæ scripturæ asseruatæ in Tablino Serossiano, in quibus legitur superstes anno 831. eique succeßisse in Dynastijs filium Arnulphum de Moncada.* Otho I. Dapifer IV & primus Dominus de Moncada.

5. *Arnulphus itaque de Moncada ope & consilio iuuit Comitem Barcinonensem ad sui conseruationem & bella contra Mauros vsque ad annum 853. ex voluminibus Serossianis, Filiúmque heredem reliquit* Arnolphus I. de Moncada.

6. *Gastonem I. huius nominis, qui Wifredum Comitem Barcinonensem ita impigrè & animosè in bellis comitatus est, vt vi armorum, quæ ad suum Comitatum desiderabantur ab hostibus Mauris sibi comparauerit. Ita Geuartius in Genealogia Moncadarum numero 8. loquitur. Vixit autem hic Gasto vsque ad annum 875.* Gasto I. de Moncada.

7. *Gulielmus I. de Moncada, Gastonis I. filius, eamdem nauauit operam bellicam Comiti Wifredo ac duobus eius filijs Svvinfredo ac Mironi, vsque ad annum 929. fidem huius rei faciunt membranæ Serossianæ, Caspar Geuartius numero 9. & Diagus lib. 2. c. 15.* Gulielmus I. de Moncada.

8. *Otho secundus de Moncada, filius Gulielmi primi, fuit in delicijs Comiti Suuinfredo; eiq; filiam propriam, quam ab Infanta Maria Comitissa vxore, filiaque Regis Aragonum Sanctij Abarea susceperat, matrimonio copulauit, eo tempore quo induciæ inter Comitem & Mauros ex vtraque parte seruabantur. Id testantur scripturæ Tabularij Serossiani. Geuartius num. 14. ac Theatrum Principum ex familia Moncadarum, & Diagus lib. 2. c. 18.* Otho II. de Moncada.

9. *Raymundus I. de Moncada, filius Othonis II. & Infantæ filiæ Comitis Barcinonensis, Comitem ruptis inducijs superioribus strenuè adiuuit, quà retundendo Maurorum irruptiones in Comitatum Barcinonensem, quà eorum copias conterendo, vsque ad annum 961. ex Geuartio numerò 11. ac Theatro Principum ex stirpe Moncadarum.* Raymundus I. de Moncada.

10. *Gulielmus Raymundus I. de Moncada, filius Raymundi I. non solùm constanter ditiones Comitis Raymundi Borelli Domini sui, sed etiam proprias vicinasque vrbi Barcinonensi, contra Mauros tutatus est: verùm obrutus copijs triuni Regum auxiliariorum Maurorum, Balearis Insulæ maioris, Illerda & Tortosæ, recuperatam Barcinonem direptámque ab eis acerrimo animi dolore perculsus inspexit anno 985. seque ad Moncadæ munitionem recipiens animos ingentiores sibi fecit, eam & alias* Gulielmus Raymundus I. de Moncada.

suas

suas finitimas defendendo; ex quibus intra mensem cum exercitu valido irrumpens, non solùm vrbs Barcino ab hostibus Mauris, sed etiam tota Catalaunia pars Illerdam vsque recepta est. Tandem verò post octennium in conflictu duorum exercituum, videlicet Christianorum ductore Comite Raymundo Borrello, & Maurorum Regum, ad latus sui Principis & Comitis gloriosè occubuit anno 993. *ex Theatro Principum è familia Moncadarum, Tomichio c.* 28. *Diago lib.* 2. *cap.* 22. 23. *& membranis Serossianis.*

Gasto II. de Moncada.

11. *Gasto II. de Moncada, filius Gulielmi Raymundi primi, in expeditione quam idem Comes Barcinonensis in Mauros Cordubenses suscepit anno* 1003. *feliciterque confecit, vindictam sumpsit de nece Patris sui Gulielmi Raymundi, nobiliúmque Catalaunorum. Vxorem habebat Hermengardam sororem Comitis Raymundi Borrelli. sicuti legere est in Theatro Principum ex stirpe Moncadarum. Zurita libro primo capite decimo sexto, Diago libro secundo capite* 58. *Escolano libro octauo capite vigesimo tertio.*

Gulielmus II. de Moncada.

12. *Gulielmus secundus de Moncada, filius Gastonis secundi, vocatur Dapifer ab Zurita libro primo cap.* 16. *& Tomichio cap.* 31. *more & iure deducto Germanorum, antequam de Naufero Dapifero primo ageremus, quo iure etiam nominati sunt Dapiferi, Arnaus & Armengolius, & Otho primus, & appellari possunt Arnulphus primus, Gasto primus, Gulielmus primus, Otho secundus, Raymundus primus, Gulielmus Raymundus primus, Gasto secundus, & omnes alij consequentes Gulielmum secundum, sed ab Othone primo, qui appellari voluit de Moncada, reliquos consultò prætermisimus appellare Dapiferos, & deinceps prætermittemus, eósque tantummodò Moncadas suo ordine enumerabimus sicuti fecimus ab Othone primo, vsque ad Gulielmum secundum. Hic autem Gulielmus secundus de Moncada tantæ fuit auctoritatis apud Comitem Barcinonensem Raymundum Berengerium, vt cum eo & Raymundo & Gulielmo Raymundo de Moncadis, in publicis Comitijs Prælatorum ac Nobilium Catalaunorum anno* 1040. *leges antiquas Gotthicas ipse Comes Berengerius abrogarit, & alias consuetudinum stabilierit. Sic referunt Zurita libro* 1. *cap.* 16. *Tomichius cap.* 31. *Diagus libro* 2. *c.* 58. *Escolanus libro* 8. *cap.* 23. *Porrò vxorem duxit Adelaiam filiam Rogerij Comitis Carcassonensis, & sororem Ermensedæ vxoris Raymundi Borrelli Comitis Barcinonensis, ex Diago lib.* 2. *cap.* 59. *ac Theatro Principum ex Moncadarum stirpe procedentium.*

Gulielmus Raymund. II. de Moncada, Catalauniæ Senescalcus.

13. *Gulielmus Raymundus II. de Moncada, frater Gulielmi II. anno* 1068. *nominatur Dominus vrbis Vicquensis in tabulis Ecclesiæ vrbis illius, loculamento, cui titulus est, Iura diuersarum Ecclesiarum, charta* 8. *n.* 14. *Insignitus fuit ab Comite Barcinonensi Catalauniæ Senescalcus primus è familia Moncadarum, ex Zurita lib.* 1. *cap.* 20. *quæ dignitas præcipua est ab Principe, eiq; annexa sunt alia duæ, quarum prima est Præfectura domus & Aulæ Principis & Principatus, pace & bello; tum suprema post Principem in exercitibus potestas, qualis est Comitum stabilium. Ita scribunt de hac dignitate in Catalaunia Hieronymus Roman lib.* 4. *de Repub. Gentil. cap.* 32. *Zurita lib.* 3. *cap.* 64. *Hieronymus Blancas fol.* 418. *com. Reg. Aragon. Escolanus lib.* 5. *histor. Valent. cap.* 26. *num.* 12. *Andreas Bosequius lib.* 2. *titulorum honorificorum Catalauniæ* §. 4. *& lib.* 3. §. 6. *Ioannes de Madariaga cap.* 12. *Senatus & Principis. Ferdinandus Mexia lib.* 1. *de nobilitate. Imprimis acceptus fuit Comiti Principi, eique semper à consilijs adfuit, & vt Senescalcus scripturis publicis adscriptus legitur, quæ hodie in Tabularijs Barcinonensi & Serossiano asseruantur ab anno* 1068. *vsque ad* 1178. *Inter tredecim nobiles quos Barcinonensis Comes testamenti sui executores anno* 1076. *reliquit, primum locum obtinet in authentico testamento Barcinoni in archiuo regio seruato, libro feudorum. Vixit vsque ad annum* 1078. *& quia nullos susceperat filios, hæredem reliquit ditionum suarum & dignitatis Senescalci Guilielmum Raymundum filium fratris proprij Gulielmi II. ex voluminibus Tablini Serossiani & actis Capituli Ecclesiæ Vicquensis.*

14. *Guliel-*

Gulielmus Raymund. III. de Moncada, Senescalcus.

14. *Gulielmus Raymundus III. de Moncada, filius Gulielmi II. & hæres Gulielmi Raymundi II. Catalauniæ Senescalcus, vocatur ab Zurita lib. 1. c. 4. Dapifer, an antiquo iure, vel nouo, quod Senescalcus in Catalaunia sit etiam domus & Aulæ Principis Præfectus primus seu Dapifer primus. Huius fortitudinem bellicam anno 1115. inspectante Comite Barcinonensi in prima expeditione contra Mauros Balearium Insularum celebrat Zurita loco memorato.*

Guleilmus Raymundus IV. de Moncada, Senescalcus.

15. *Gulielmus Raymundus IV. de Moncada, filius Gulielmi Raymundi III. & Catalauniæ Senescalcus Comitem Barcinonensem Raymundum Berengarium sequutus est ad expellendos ab vrbe Almeria Mauros anno 1147. eisq́; pulsis anno sequente 1148. idem magnanimus Comes Tortosam vrbem exercitu suo circumcinxit, verùm ad aliquos tumultus Barcinonenses consopiendos coactus est Comes curam summam obsidionis Gulielmo huic Raymundo relinquere, cuius vigilantia ac sollicitudine Mauris debellatis vrbs in potestatem Comitis venit: quapropter ei tertiam Tortosæ partem liberè ac suis assignauit, tum Peniscola castellum, & ciuitatem Maioricam Insulæ maioris Balearis, & Balearium minorem & Yuicam; in compensationem egregiè gestorum suorum donauit. Hæc narrant Bernardus Desclotius lib. 1. cap. 1. 2. 3. Zurita lib. 1. cap. 51. & lib. 2. cap. 6. 8. 14. & Diagus lib. 2. cap. 137. 139. 156. & Escolanus lib. 8. cap. 21. & Beuterus libro 2. cap. 8. & 18. & Tabula Barcinonenses archiui regij, armario 14. sacco B. num. 88. His strenuè peractis, post reuersionem suam ad Comitem hic Moncada adiunxit se Nobilibus Cerbellonibus propinquis suis, rixas ac lites trahentibus cum alijs Nobilibus Casteluinensibus; cùmque sibi mutuò duæ istæ factiones occurrerent, pugnatum est ex vtraque parte acerrimè, captusq́; Moncada ab Aduersarijs coniectus est in carcerem, eiusque pedes cippo graui conclusi & onerati. Cúmque Archiepiscopus Tarraconensis consanguineus Castelumensium aduersantiū, eum in carcere inuiseret, apud eum questus est quòd contra iura omnia Nobilitatis tractaretur, & vt vilis homo trabibus pedes impeditos & oppressos haberet, suffecissetque supra suam fidem in aliqua turri & aula se detineri; rogauitque vt grauamine pedum ab eo alleuiaretur. Archiepiscopus ei infensus ab secretario cultellum pennarium petijt, quo bracteolam cippi rescidit, addens officiosum munus optatum ab eo compleuisse, trabémque leuiorem reddidisse; quod factum ac dictum per contumeliam ac despicientiam Moncada excipiens, manu fronti admota spopondit se suo tempore vindictam huiusmodi contemptus sumpturum. Hac de iniuria Præsulis & sponsione Moncadæ certior factus Comes Barcinonensis, Archiepiscopum decreuit Romam ad summum Pontificem negotiorum causa delegare, vt visa illius consuleret, cui certò machinaturum Moncadam prauideret; qui ad Nobiles Parentes suos offensam scripserat, & vt quocunque modo eum in libertatem assererent. Verùm non potuit Archiepiscopus ita se ad profectionem parare, quin Moncada liber factus ei insidias tetenderit in via, à cuius asseclis fuit sacrilegè vitâ & apparatu omni spoliatus, & ipse in Aragoniam Principis sui declinans iram se receperit: quæ Comitem Barcinonensem intimo animi sensu commouerunt, vnà cum honorifica Moncadæ receptione ab Rege Aragonum Ramiro, & formidine impendentium factionum perniciosissimarum in Catalaunia inter Moncadas & Archiepiscopi cæsi consanguineos. Quare ad illos tumultus periculosos euitandos Comes Moncadam ditionibus & honoribus primùm exuit, & exercitum comparauit, primoresq́ue suos Clientes omnes conuocauit, vt se ad Illerdam sub Maurorum iugo gementem, sibi subiugandam, insequerentur: quâ redactâ anno 1149. eodem die Mauri sibi timentes, Fragam vrbem victori Comiti dediderunt. Intereà Moncada Aragoniæ Regem & Primores regni in Comitem Barcinonensem & Catalauniæ principem ob tantas de Mauris reportatas victorias propensos cùm aduerteret, quâ pollebat sagacitate, & eloquentiâ, & auctoritate, cœpit sermones ingerere de Infanta Principe Petronilla Regis & Regni herede vnica, in vxorem Comiti & Principi Catalauniæ tam fortunato ac belligero concedenda; sic enim adiuncta Regno Aragoniæ Catalaunia, duæ illæ Prouinciæ florentissimum & perennaturum Imperium formidandum hostibus Ecclesiæ constituerent.*

rent. Ita placuit Regi ac Primoribus Regni hic sermo, vt re maturè deliberata & conclusa, Legatos vnà cum Moncada Illerdam ad Cataluniæ Principem destinarent, eiusque consensum & acceptationem exciperent & referrent. Porrò Legatos præueniens Moncada, se Illerdæ confidenter in conspectum Principis sui dedit, suppliciter ab eo veniam petens de nece Archiepiscopi, quam impetraturum ab eius benignitate & animi magnitudine sperabat propter optimum insperatúmque nuntium, quem Legati Regis Aragonum præstolantes eius audientiam, & quos anteuerterat, afferebant; videlicet Infantæ Principis Aragoniæ Petronillæ nuptias, & regnum ipsum. Quo audito Princeps iram, quâ mouebatur Moncadam acriter reprehendere de audacia eius ad se tam liberè veniendi, repressit, & in lætitiam conuertit; & assurgens eum perhumaniter est amplexus, & in gratiam recepit, restituitq; ditionibus ac dignitatibus; promisitq; se ab summo Pontifice veniam & condonationem de sacrilega cæde Archiepiscopi impetraturum. Atque ita Gulielmus hic Raymundus IV. de Moncada plus Principi suo irato profuit, quàm pacato & beneuolo. Hanc historiam pluribus enarrat Beuterus libro secundo cap. decimo octauo. Celebratis nuptijs Reginæ Aragoniæ & Principis Cataluniæ regio apparatu & festiuitate incredibili, Princeps bella contra Mauros persequutus est, captisque Aytona, Serossa, Mequinensa, cum omnibus castellis inter Illerdam & Cæsaraugustam, Gulielmo huic Raymundo Moncadæ munificentissimè cum Fraga vrbe & Præfectura castri Illerdensis donauit. Hæc scribunt Zurita libro secundo cap. 14. & Diagus libro 2. cap. 156. sepultus fuit in Templo sacro Monasterij Valdauræ prope Moncadam, quod à fundamentis anno 1152. ædificarat ac dotauerat dum viueret, iuxta summi Pontificis præscriptum ac pœnam impositam pro nece Archiepiscopi Tarraconensis, sed paulo post fuit translatum ad Sanctas Cruces, monasterium etiam ab eodem exstructum prope Barcinonem & Moncadam in amœniore & commodiore situ in campo territorij quod Valles appellatur, & Religiosi huius monasterij sunt Ordinis sancti Bernardi, quorum primos ad hanc fundationem submiserat ipse sanctus Bernardus dum viueret, fuitque primum illius sacri Ordinis monasterium in tota Hispania, & in cuius sacro templo nulla sepulchra permittuntur & sepulturæ, nisi Regum vel Infantum, vel Nobilium gentis Moncadæ, aliorum autem in monasterij claustro inhumationes admittuntur. Hæc testantur scriptura antiqua fundationis illius Templi ac monasterij.

Guil. Raymund. V. de Moncada Senescalcus.

16. *Huius filius alter Gulielmus Raymundus quintus, de Moncada, & Cataluniæ Senescalcus, Dominus Vicquensis, Tortosæ, Aytonæ, Serossij, Mequinensis & Fragæ, anno 1162. Principi suo interfuit dum extremum diem clauderet in Gallia Narbonensi, proficiscenti Taurinum ad Federicum Imperatorem, cui & alijs duobus è Nobilibus suis, verbo solùm tenus commisit ad Reginam Petronillam, vxorem suam referre, extremam suam voluntatem de successore suo in regnum Aragoniæ & Principatum Cataluniæ: quæ Zurita memorat libro 2. cap. 20. & Diagus libro 3. cap. 13. Vixit hic Moncada anno 1173. sepultúsque est in monasterio sanctarum Crucum, quod Pater eius à fundamentis erexerat ac reditibus locupletarat. Huius filius natu maior,*

Guliel. III. de Moncada.

17. *Gulielmus III. de Moncada, viuente Patre vxorem habuit Mariam Vicecomitissam Bearniæ & Gasconiæ hæredem vnicam. Nonnulli Auctores Hispani & Galli, vocant hunc Moncadam, Gastonem: qua de re consulendus erit Petrus de Marca, nouissimus rerum Bearnensium scriptor, qui eum nominat Gulielmum libro 6. cap. 5. Consulendæ etiam membranæ antiquæ coniugium istud asserentes, citatæ ab Thoma Tamayo, opusculo impresso de familia Moncadarum primi rami: quarum copiam si habuissent Zurita & Mariana, matrimonium hoc illustre non reuocassent in dubium; ille libro 2. cap. 22. iste libro 11. cap. 41. Hoc posito manifesta est consecutio ex sanguine Moncadarum & Bearnensium, potentissimos Galliæ Reges, Henricum IV. Ludouicum XIII. & Ludouicum XIV. oriundos esse qui clarissimus est Moncadarum familiæ splendor. Gulielmus hic ab Vicecomitissa Maria vxore sua, filios tres suscepit,*

quorum

quorum Tutor fuit demortuo Gulielmo Patre, frater eius Raymundus II. de Moncada.

Raymundus II. de Moncada, Senescalcus.

18. *Raymundus II. de Moncada, Catalaunia Senescalcus, Dominusq́ ditionum Patris sui Gulielmi Raymundi V. de Moncada, magna fuit æstimationis apud Regem Aragonia Alphonsum secundum, cui adfuit in congressu cum Rege Castella anno* 1170. *in vrbe Sahagunto, vnde paces inter vtrumque Regem subsecuta fuerunt, quas Casaraugusta Moncada hic vt Senescalcus & è Primoribus regni confirmauit. Ita Zurita l.* 2. *c.* 18. *Eiusdem Regis Aragonia fuit anno* 1180. *Legatus ad Regē Castella ad rixas sedandas, qua cum eo & Ferdinando Legionensi intercedebant, cum potestate Regem Castella ad singulare certamen prouocandi si renueret concordiam, vt Zurita loquitur l.* 2. *c.* 38 *sed antea ab eodem Rege suo fuerat delegatus ad Raymundum Comitem Tolosanum anno* 1177. *ad componendas controuersias & lites suas circa Prouincia Comitatum, Zurita scriptore lib.* 2. *c.* 34. *Denique in archiuo regio Barcinonensi innumera reperiuntur manuscripta volumina, suo nomine subsignata, paces, inducias, & fœdera regia confirmantia. Huic successit filius natu minor*

Gulielmus Raym. VI. de Moncada Senescalcus.

19. *Gulielmus Raymundus VI. de Moncada in dignitate Senescalci, maiore nominato Raymundo in scriptura authentica Tablini regij Barcinonensis, armario* 3. *rerum Illerda sacco* 1. *n.* 328. *qui iuuenis extinctus est. Hic verò Gulielmus Raymundus Senescalcus cum Rege Aragonia Petro II. profectus est, auxiliaturo Regi Castella contra Mauros, adfuitq́ pugna celeberrima VVedensi tam proficua Reipublica Christiana in Hispania. In reditu ab Rege Aragonia fuit in generum adoptatus, filiam suam Infantam Constantiam ei tradendo in vxorem, eo quòd, vt Zurita narrat, fuerit fortitudine ac prudentia militari pracipua causa victoria Christianorum contra Mauros, lib.* 2. *cap.* 61. *& Diagus lib.* 3. *c.* 12. *Porrò in dotem Infanta ac liberorum huius matrimonij dominia particularia diuersorum Nobilium in vrbibus Aytona, Serossu & Sosessu adiunxit, aliunde ab Rege compensatorum. Reperitur hac donatio in Tabulario Barcinonensi, in registro diuersarum rerum Regis Iacobi, folio* 247. *in quo nominatur hic Gulielmus Raymundus de Moncada, maritus huius Infanta Constantia. Quare sunt excusandi Beuterus lib.* 2. *cap.* 70. *& Tomichius c.* 88. *qui ex ignoratione harum tabellarum vocant illum Petrum. Hic idem Gulielmus Raymundus Catalauniam pro Rege Aragonia gubernauit sub titulo Procuratoris, ex scripturis antiquis Archiui regij Barcinonensis, inter eas qua pertinent ad familiam Moncadarum, in superiore loculamento, sacco* D. *n.* 2. *excessit è viuis anno* 1227. *& eius vxor Infanta Constantia an.* 1250. *ex eorum testamentis in eodem loco citato asseruatis, successorem habuerunt filium natu maiorem Petrum I. de Moncada, de quo fidem faciunt eorum testamenta.*

Nunnius, & tres Gulielmi, & duo Comites Ampuriarum, & Raymundus, & Hugo Moncadæ omnes.

Hoc loco alios octo Moncadas generosissimos interpono, Nunnium, Gulielmum, Raymundum, Comitem Ampuriarum, & alium Gulielmum, tum Hugonem, & alterum Comitem Ampuriarum, denique alium Gulielmum Æditnum sacrum Ecclesia Gerundensis, electumq́ Tarraconensis Ecclesia Archiepiscopum; qui licet spectare non videantur ad primarium propositum ramum Moncadarum, tamen quia circa idem tempus florebant, quo Gulielmus Raymundus VI. de Moncada superior obijt, & illustria edidere facinora in conspectu Iacobi II. Aragonia regis Baleares insulas subiugantis anno 1227. *quorum meminit Beuterus lib.* 2. *c.* 21. *è dignitate familia Moncadarum iudico esse, tales tantosq́ viros non pratermittere; sed etiam vt ostendam quod nu.* 4. *polliciti eramus, Armengolium Dapiferum III. stabilitum ab Imperatore Ludouico Pio Comitem Vrgellitanum & Ampuriarum filios suscepisse ad quos pertineret titulus ille Comitis, quem propterea germanus eius frater Otho I. vendicare sibi iure cùm non posset, sibi suisq́ successoribus nomen ac denominationem Moncada munitionis viciniores vrbi Barcinonensi assumpsit inter oppida & castella multa sibi ab eodem Ludouico Pio concessa in compensationem suorum egregiè factorum contra Mauros; verùm ipsos Comites Ampuriarum successores Armengolij ob reuerentiam Auunculi Othonis I. etiam Moncadas voluisse appellari, prout Historici fidem huius rei faciunt. Itaque Aragonia Rex Iacobus II.*

Regni Amplificator nominatus soluens è portu Saloni cum classe 150. nauium ac triremiũ, cum innumeris alijs myoparonibus, naue Gulielmi de Moncada praeunte, ad insulam Balearium maiorem appulit. In exscensione primi fuerunt Nunnius & Raymundus Moncada; voluitq́, Raymundus Maurorum agmina praestolantia Christianos recognoscere, vt signum daret suis & exemplum strenuè dimicandi. Ductor autem Maurorum ferox eques cataphractus suos praecedens, eminùs currendo lancea in Raymundum directa accedit, quem Raymundus incitatò in eum equo ictúmque declinans lanceà transfodit & in terram deiecit: Tum contenta voce Christianos milites euocando ad pugnam animosiores factos exemplo & forti gestò conspecto, ense districtò se cum illis in confertas hostium turmas coniecit, eásque protriuit, & terga vertere coëgit. Sub id tempus Rex exscendens è triremi, agerrimè tulit quòd nòn interfuerit huic suorum conflictui cum hostibus quem è mari spectauerat. Quare protinus equo conscenso cum solummodò viginti quinque claris equitibus audacter fugiẽtes hostium copias persequitur, & incurrens in cuneum Maurorum integrum circiter quadringentorum, eum aggreditur, rumpit & fugat. In reditu tamen sub vesperam ad stationem Regiam, quae circa maris littus tumultuariò parabatur, ipsum poenituit audaciae ac temeritatis, qui se cum tam paucis tam manifesto periculo hostium furori ac desperationi exposuerat; tulitq́, propterea aequo animo reprehensionem sibi prudenter & honorificè factam ab Raymundo Moncada, quam Gulielmus etiam Moncada speciosè ac sapienter correxit, regem nimirum impleße partes omnes magnanimi Principis succurrendo suis cum discrimine sui capitis, & exemplo suo exercitum prouocantis ad benè rem gerendam pro amplificatione Religionis ac fidei Christianae; verùm se debere & ingentis animi ardorem temperare deinceps, quòd in eo solo spes victoriae & salus omnium suorum consisteret. Sequenti die Gulielmus, Raymundus, & Comes Ampuriarum Moncada, sacra exhomologesi & Eucharistiae sacramento muniti cum suis è regijs castris egressi contra Maurorum stationes, cùm aduerterent Regem Maurum eduxisse ex vrbe Maiorica maiores copias, diuisi sunt Moncadae, & Comes Ampuriarum stationem Regis inuasit, penetrauit, ac diripuit; alij verò duo Gulielmus & Raymundus intrepidè in hostium turmas reliquas impetum faciunt, diuq́, ab vtraque parte fortiter dimicatur, tandémque Deò placuit victoriam armis Christianorum concedere, quae luctu totius exercitus Aragonij temperata fuit, ob interitum duorum Gulielmi & Raymundi Moncadarum, qui dum nimis ardenter ferro sibi viam per hostes facerent, telis Maurorum transfixi occubuerunt; sed non propterea sui animos deposuerunt, quin potiùs ferociores effecti vindictam cruentam de Mauris sumpserunt, coactúsque est eorum rex Retabohimbes fuga sibi consulere, & in ciuitatem Maioricam se recipere. At verò Rex Aragoniae summopere moestus ob deperditos Moncadas, tam strenuos, conquiri eorum corpora imperat, & loculamentis includi & asportari in Monasterium Sanctarum Crucum, quod Gulielmus Raymundus III. de Moncada in Catalaunia construxerat, quorum sepulchra honorifica visuntur. His peractis Rex Iacobus victoria praeterita animatus, statuit vrbem Maioricam, in quam Rex Maurus se receperat, obsidione valida cingere: nam multi nobiles Aragonij & Catalauni cum copijs recens aduenerant, inter quos erant Gulielmus de Moncada filius defuncti Raymundi, & Hugo de Moncada, & Comes Ampuriarum filius Comitis Ampuriarum commemorati, & Nunnius Sanchiz filius Comitis Sanchiz filij Principis Aragoniae & Catalauniae. Intereà oppida omnia inter Maioricam & littus maris obuersum Insulae Baleari minori, quae Minorica dicitur, vltrò se dediderunt: quapropter Christianorum exercitus annona omni redundabat, & vrbs Maiorica cum Rege Mauro fame premebatur. Quare Rex Maurus alloquium ab Rege Iacobo per internuncium suppliciter rogat, ad quem missus Nunnius Sanchiz, Rex Maurus offert Regi Aragoniae ciuitatem, modò ei concedat in Africam liberam discessionem & suorum, spondetq́, pro singulis capitibus eorum, qui secum abcederent, quinque nummos aureos. Hac Nunnius regi Iacobo totiq́, exercitui cùm referret, visa sunt non spernenda; soli Moncadae de suorum internecione perculsi, conditiones istas vt ostenderent indignas

esse regi

esse regi Aragoniæ & Christiano exercitui florentissimo, tanta dicendi eloquentia & rationum momentis vsi sunt, vt Regis animum, reliquosq; in suam sententiam traxerint, Regiq; Mauro responsum recusationis pactorum relatum fuerit; quo accepto furore ac desperatione incensus, Christianis aliquot captiuis præscindi capita, & catapultis in castra Christianorum promitti iubet. Hoc barbarico facinore commoti omnes. Rex Iacobus diuino auxilio fultus imperat suis impressionem & insultum in vrbem; quod præstò adfuit, præeunte sancto Georgio Aragoniæ & Cataluniæ Protectore, viso ab exercitu vniuerso, etiamq; ab Mauris: atque ita in vrbem penetrans exercitus Christianus, eam subdidit Religioni Christianæ & Aragoniæ Regi anno 1228. cæsáque Maurorum quindecim millia, & Rex ipse Maurus Retabohimbes ab rege Iacobo apprehensus & in terram allisus capite truncatus est: Gratiæ verò solemnes immortali Deo actæ in Mesquita maiore antea ritu Christiano expurgata, prò tam insigni victoria reportata. Sub id tempus alij multi Aragonum & Catalaunorum illustres viri cum magno militum numerò aduenerunt; quapropter Rex vrbe Maiorica egressus ad reliquas Insulæ vrbes subigendas egreditur, quibus in suam potestatem redactis, munitissimum montem & locum Artanam, ad quem Mauri Insulæ se receperant cum gazis suis & apparatu & annona copiosis, ad se contra Christianos tutandum, Rex Iacobus inuictus exercitu circumambit, & continuis insultibus diuexat, præsertim incẽdijs astu & ingenio Hugonis Fulqualqueri Hospitaliorũ Magistri excogitatis, quibus remediũ afferre Mauri desperantes, & frustra copias auxiliares ab Africa sperantes, cum Rege Iacobo pacti sunt se intra octiduum Arcem & montem cessuros, si ab Africa Mauri non aduenirent, qui eos in libertatem assererent. Huiusmodi conditione accepta contigit vt Christianus exercitus farinæ inopia laboraret, triticoq; leuiter macerato famem leuaret ægrè; sextóque die Rex ipse pane consueto è farina bene parata careret, coactúsque fuerit cum Nobilibus suis Aulicis ad Raymundi Moncadæ tentorium pransurus inopinatò accedere, qui apud omnes non solùm generosus, sed etiam prouidus audiebatur. Tanto hospite admirabundus Moncada, & beneficio isto singulari, chlamydem militarem ostrò fulgentem exuit & solo extendit, exponiq; iubet sex panes integros, quos tantummodò habebat, & alterum iam in duas sectum partes. Tum benedictione solita impertita ab Moncadæ Capellano, Rex & nobiles eius Asseclæ, & ipsius Moncadæ, ad numerum supra centum quinquaginta, non sine miraculo, illis septem panibus refecti, prout ipse Rex testatur in sua gestorum suorum historia, potuerúntque reliquis duobus diebus famem tolerare, quibus peractis Mauri se & Artanam munitionem & montem dediderunt, in quo facti sunt captiui mille quingenti, & reperta vaccarum decem millia, ac triginta veruecum millia, & innumeræ gazæ aureæ & argenteæ, pretiosiq; lapilli, quibus abundantissimè restauratus & recreatus est exercitus ac ditatus. Raymundus autem hic Moncada propter septem illos panes, hoc est sex integros & vnum in partes duas diuisum, quibus non sine miraculo refectus est Rex Iacobus & Aulici eius nobiles, vti narrauimus, in scuto gentilitio, & area coccinea, septem panes aureos assumpsit, tres cum dimidio ex vna parte, & alios tres cum dimidio ex alia, in duos ordines perpendiculariter distributos palorum instar; licet aliqui octo integros pinxerint, quatuor videlicet in singulis ordinibus: cùm anteà Moncadæ omnes scuto Ducum Bauariæ integro vsi essent, vtpote progeniti à Bauarorum Ducibus aut Regibus. Subactâ feliciter Baleari Insula maiore, minor se cum pactis aliquot Aragonum Regi subdidit, vrbibus & portu Mahonio traditis. Rex autem compositis rebus harum duarum Insularum victor redijt in Aragoniam: dúmque Alcanizij subsisteret, venit ad eum Gulielmus Moncada, sacer Æditus Ecclesiæ Gerundensis & electus Arenis Episcopus Tarraconensis, vt consensum Regis super sua electione suppliciter exposceret; quò impetrato, iterum rogat vt sibi & Moncadis liceret sumptibus proprijs Tuisam Insulam eripere ab Mauris, & possidere in feudum Aragoniæ Regum: cuius postulationi annuens Rex, hic Gulielmus Moncada electus Episcopus cum alijs consanguineis classem comparauit & exercitum, quo expugnata est vrbs Tuisa, resistentibus quidem Mauris, verumtamen deuictis: Et quia sumptus erat factus

 ex be-

ex beneficijs Ecclesiasticis quæ possidebat, ideo decimas Insulæ ad locupletandam Ecclesiam suam Tarraconensem, & præsertim dignitatem eius Æditui sacri assignauit. Hæc omnia de Moncadis octo in hac appendice numeri 19. enumeratis, fusiùs refert Beuterus loco suprà laudato. Redeamus ad Petrum I. de Moncada.

Petrus I. de Moncada, Senescalcus. 20. *Petrus I. de Moncada, Catalauniæ Senescalcus, Regis Aragoniæ Petri II. nepos. In grauioribus negotijs & expeditionibus bellicis Auunculi sui Regis Iacobi II. fratrisq; matris suæ Infantæ Constantiæ, egregiam nauauit operam, & gesta Comitiorum Montioniorum quæ Rex conuocauerat, confirmauit anno 1236. ex Zurita lib. 3. cap. 26. qui eum nominat Petrum de Moncada filium Gulielmi Raymundi de Moncada Catalauniæ Senescalci, & nepotem Petri Regis Aragonum. Expugnationi Valentiæ vrbis interfuit anno 1238. vt Escolanus narrat lib. 3. cap. 6. Tum in præsentia Regis ex officio suo Senescalci, locum singularis certaminis inter duos Nobiles assignauit, Zurita teste lib. 3. ca. 64. Vixit vsque ad annum 1266. ex eius testamento seruato in Tabulario Serossiano. Eius filius & successor fuit*

Petrus II. de Moncada Senescalcus. 21. *Petrus II. de Moncada, Catalauniæ Senescalcus. Ob singularem eius magnanimitatem & auctoritatem fuit electus, vt anno 1283. adesset singulari certamini inter Petrum Regem Aragoniæ & Carolum Regem Neapolitanum, ex Desclotio l. 2. cap. 6. & Zurita lib. 4. c. 6. tum scripturis Tablini Barcinonensis rerum Moncadarum sacco D. nu. 11. & alijs registris sub titulo diuersorum, folio 68. Præterea Zurita lib. 4. c. 61. & 65. scribit hunc Petrum Moncadam fortiter restitisse Gallis irrumpentibus in Catalauniam; & in alia inuasione Gallorum, in qua præsente Rege Aragoniæ fuit inter primos vulneratus; & consanguineus eius Raymundus de Moncada Fragæ Dominus præclara edidit militaris strenuitatis facinora. Hic idem Petrus, Zurita scribente lib. 5. c. 7. cum alijs Nobilibus Amicis, alios viros primarios Catalauniæ anno 1294. ad singularem pugnam vocauit, quam Rex Iacobus auctoritate sua interposita exturbauit, ne tot virorum clarissimorum iacturam faceret.*

Otho III. de Moncada. 22. *Otho III. de Moncada, filius natu maior Petri II. de Moncada iuxta Patris testamentum asseruatum Serossij, pluribus commendatur ab Rege Aragoniæ Petro II. in sua historia, ob singularem eius prudentiam rerumq; experientiam; quemq; celebrat Zurita lib. 7. cap. 17. & 37. In expeditione contra Mauros Almeriæ Regem Iacobum II. comitatus est anno 1309. ex Zurita lib. 5. ca. 28. Fuit eiusdem Regis Orator ad Summum Pontificem, & ad Regem Galliæ, vti constat ex instructionibus ei traditis, & in Tablino Serossiano nu. 11. conditis. Fuit etiam eiusdem Regis in Catalaunia Procurator, cuius rei fidem faciunt volumina Barcinonensis archiui, de rebus Balcaricis nu. 649. Idem Rex eum testamenti sui reliquit executorem anno 1327. ex Zurita lib. 6. cap. 75. Rex Alphonsus IV. Aragoniæ ei summam Valentiæ præfecturam commisit, in compensationem officiorum maximi momenti ab eius consilijs, fidelitate gestisq; acceptorum; ita loquuntur scripturæ Barcinonenses in registro Officialium. Tanta fuit eius integritas & auctoritas, vt nunquam vllo modo adduci potuerit ad confirmandas donationes ab Rege factas Infanti Ferdinando, in præiudicium Infantis Petri, qui debebat Regi succedere iuxta conuentiones Regum Alphonsi & Iacobi receptas, prout Zurita loquitur lib. 7. cap. 17.*

Otho IV. de Moncada. 23. *Otho IV. de Moncada, filius Othonis tertij, successit Patri in ditionibus ac dignitatibus. Vxorē duxit Theresam de Moncada, filiam Gulielmi Raymundi de Moncada Fragæ Domini, ex membranis matrimonij custoditis in archiuo Serossiano. Iste Gulielmus Raymundus de Moncada Dominus Fragæ, fuit in obsidione Almeriæ relictus ab Rege Præfectus Generalis; tum postea constitutus eius Procurator in Regno Balearico. Vxorem duxit Infantam Irenem neptem Theodori Lascaris Græciæ Imperatoris. hac Zurita refert lib. 5. cap. 85. & lib. 6. cap. 7. & lib. 7. cap. 12.*

Otho V. de Moncada. *Otho V. de Moncada, filius Othonis tertij Petro Regi Aragonum quarti de more maiorum suorum strenuè inseruiuit in bello Sardicensi anno 1353. tum etiam sequenti anno in bello Arboreensi, in quo diem extremum clausit, ex Zurita lib. 8. cap. 53. & 54.*

Huius

Huius frater germanus Petrus de Moncada, fuit ab eodem Rege Aragoniæ Petro quarto Archithalassus creatus, & missus in auxilium Regi Castellæ contra Mauros Africanos & Granatenses, cuiq; assignata fuit custodia freti Gaditani, ne classis Maurorum in Hispaniam appelleret. Interfuit etiam pugna celebri ad Salsum Fluuium, in qua Mauri ducenties mille, & Christiani solummodo viginti quinque cecidère, ex Zurita lib 7. cap. 50 & 53. In illo freto Gaditano triremes tredecim Mauritanas aggressus est, quatuor ex illis cepit, duas submersit, reliquæ laceræ in Africam se recepêre. ita Zurita narrat lib. 7. cap. 60.

Gulielmus Raymũdus VII. de Moncada.

25. *Gulielmus Raymundus septimus de Moncada, frater Othonis V. ei successit, ex Zurita lib. 8 cap. 57. Regi suo Aragoniæ Petro quartò adfuit in bello contra Regem Castellæ, pro iure Henrici Comitis de Trastamara fratris Règis ipsius Castellæ, cui postea in Regno successit. Hæc Zurita lib 9. cap. 16.*

Otho VI. de Moncada.

26. *Otho sextus, filius Gulielmi Raymundi septimi, Principem Aragoniæ Ducem Monblanc cum duobus filijs Gulielmo Raymundo & Petro de Moncadis, comitatus est anno 1392. ad possessionem Regni Siciliæ sumendam, contra rebelles, quo in bello eos sæpius repressit ac fudit: propereaq; ei Rex vrbem Licatam aduersariorum primarium munimentum donauit; quam postea anno 1398. in Comitatum Camaratensem & alias ditiones idem Rex commutauit, ex memorijs authenticis Tabularij Serossiani, & Tomichio in sua historia illius anni.*

Gulielmus Raymũdus VIII. de Moncada.

27. *Gulielmus Raymundus octauus de Moncada, primogenitus Othonis sexti superioris, ab eodem Rege Martino, anno 1409. ab Sicilia delegatus est in Sardiniam, ad eam Insulã in sua obedientia retinendam. Actiones Comitissæ Vrgellitanæ direxit, quæ Regẽ vrgebat, vti ius ad regnum declararet, quo Comes eius filius nitebatur. Anno 1410. defuncto Rege Martino, Primores Regni pro successore determinando, eum in Compromissorem delegerunt, ex Zurita lib. 11. cap. 12. Anno 1411. Infante Ferdinando renuntiato in Regem, fuit vnus ex Legatis, qui ad salutandum ipsum Regem, eiq; fidem præstandam nomine præcipuæ Nobilitatis electi fuère, Zurita teste lib. 11. cap 85. Anno porrò 1412. Rex Ferdinandus eius auctoritate ac sapientia vtitur ad Comitem Vrgellitanum ad sui obedientiam pertrahendum, ex Zurita lib. 12. cap 4. Deinde anno 1413. constanti animo inter alios partium Regis studiosior extitit, eumq; Oscæ tuitatus est ac defendit, vt Zurita loquitur lib. 12. cap. 17. Tum anno 1421. in præsentia Alphonsi V. Regis in obsidione Cerræ, graui quidem vulnere, sed honorifico læsus fuit, ex Zurita lib. 13. cap. 13. Tum etiam anno 1423. in alio bello Neopolitano ob discordias inter Regem ipsum & Reginam Ioannam exorto, grauiter vulneratus legitur apud Zuritam lib. 13. cap. 17. Quare Rex Alphonsus ob egregia eius gesta, & officia fidelis ac fortis Clientis, eum in Insula Sardinia, Comitatu Mormillæ, & Baronatu Montisregalis & ciuitate Bossa compensauit, vti manuscripta Serossiana & Barcinonensia, registro rerum Sardicensium fidem præstant. Hic Gulielmus Raymundus octauus de Moncada vnicam filiam reliquit heredem, nomine Euphrosynam de Moncada, in suo testamento seruato in Tablino Serossiano; quæ data est in vxorem Matthæo Florimundo de Moncada, Domino de Villamarchant, filio primogenito Petri de Moncada fratris Gulielmi ipsius Raymundi octaui, de quo nunc diximus, quæ legi possunt in capitulis matrimonialibus an. 1433. & in testamento Patris an. 1425. seruatis Serossij. Igitur sequitur*

Matthæus Florimundus de Moncada.

28. *Matthæus Florimundus de Moncada, Dominus de Villamarchant, Mormilæ Comes & Baro Montisregalis, & Bossæ Dominus. Ioanni secundo Aragoniæ Regi semper affectus & fidus: nam anno 1462. in emotionibus Catalaunicis ipse & Petrus Raymundus de Moncada consanguineus eius (& filius Ioannis de Moncada, Baronis de Chiua & Castelnou, de quo Zurita agit libro 10. cap. 88.) se & ditiones omnes Regi deuouerunt, etiam contra Principem filium Regis, (quarum emotionum præcipua causa erat) licet præuiderent, si superuiueret Princeps Patri Regi senectute confecto, eius iram & vindictam se experturos; officiosissimè tamen postularunt ab Rege post obitum Principis, vti Catalaunis leges & iura conseruaret, quorum violatione, non poterant ei, vti debebant, ex*

natura

natura fidelitatis inseruire; rebellesq́; misericordia & pietate sibi deuinciret, quorum certò sciebant sensus intimos esse iustis ipsius obtemperare mandatis. Hæc Zurita memorat lib. 17. c. 40. Eodem tempore hi duo Moncadæ Regi astiterunt in conflictu ad Rubinas, in quo rebelles fusi fugatiq́; fuerunt, scriptore Zurita lib. 17. cap 53. Postmodùm anno 1463. è suis munitionibus & castellis opportunè cum copiis egredientes hi duo Moncadæ diuersis in locis eosdem rebelles contriuerunt; tandemq́; Flixium rebellium asylum circumseptum validis muris ac turribus & situ validum, ad Ebri fluuij ripas Insulam efficientis, ardenti animo aggredientes expugnarunt ac diripuerunt. Hæc Zurita loco postremò citato. Anno insequente 1464. in altero exercituum congressu, Regis ac rebellium, ad regia prata, hic Matthæus Florimundus alam sinistram regiarum copiarum educens, hostesq́; circumueniens, eos à tergo aggressus est, ac deleuit. ex eodem Zurita lib. 17. cap. vltimo. Denique anno 1473. in circumsessione Perpiniacensi ab Gallis, fuit ab Rege Aragoniæ Arbiter, Iudex & Assertor constitutus induciarum transactarum inter Comitem de Cardona & Prades, & inter Philippum à Sabaudia Comitem Baugiensem, Dominúmque Sebusianorum, pro Comitatibus Rossillionensi & Cerdania, vt Zurita scribit libro 18. cap. 55. Mortuus est sine liberis, eiúsque heres fuit ex asse, consanguineus eius

Petrus III. de Moncada.

29. *Petrus III. de Moncada, (de quo iam multa dicta sunt in gestis Matthæi Florimundi de Moncada) vtpote filius Ioannis de Moncada, Baronis de Chiua & Castelnou, & nepos Othonis VI. de Moncada. De hoc Petro III. addit Zurita lib. 2. c. 36. impetum Gallorum fregisse in Puicerdani angustiis, inuadentium Comitatum Rossillionensem. Filios suscepit legitimos quatuor, Ioannem, Gastonem, Gulielmum Raymundum, & Hugonem: de quibus agemus appendice sequentis numeri 30. successorem habuit filium primogenitum*

Ioannes I. de Moncada Aragoniæ & Catalauniæ Senescalcus

30. *Ioannem I. de Moncada: cui ex decreto ac priuilegio singulari dato Montione 29. Iulij anno 1510. asseruato Barcinone in Tabulario Officialium 8. fol. 169. Aragoniæ Rex Ferdinandus, ditiones Auorum suorum omnes confirmauit, & ipsum Senescalcum Aragoniæ & Catalauniæ, & successores suos constituit, cum amplissima commemoratione gestorum terra mariq́; eorumdem Auorum suorum contra Mauros, rebelles, hostesq́; & in propagando Regno. Obijt ex intestato anno 1522. Quare hereditatem suam adiuit ac dignitates, Ioannes II. de Moncada filius Gastonis de Moncada fratris eius, vti constat ex tabulis testamentorum, Patris & Aui.*

Gasto, Hugo, & Gulielmus Raymūdus & Michael Moncadæ.

Age verò, proferamus ea quæ spectant ad reliquos fratres eius. De secundo fratre suo Gastone de Moncada, nihil reperio peculiare, nisi quod eius filius primogenitus Ioannes II. de Moncada hereditario iure successerit Ioanni I. Quoad Hugonem de Moncada vltimū Ioannis I. fratrem attinet: hæc habeto ex Gaspare de Baeza in vita ipsius, tum ex Sandouallio in vita Caroli V. Imperatoris & Regis Hispaniæ lib. 3. 10. 15. 17. Fuit in iuuentute animo præstanti & bellicoso; & Eques sancti Ioannis Hierosolymitani; dumq́; Rex Hispaniarum Ferdinandus Catholicus pacem haberet cum Rege Galliæ, ex beneplacito Regis Ferdinandi transijt ad partes Caroli VIII. Gallorum Regis, in Italiam cum exercitu numeroso proficiscentis. Sed cùm animaduertit eum Regni Neapolitani coronam appetere, ab eo officiosè obtenta prius venia recessit, sequutus est Alexandri sexti summi Pontificis partes, & Cardinalis de Borgia Valentini; qui eius consilio & fortitudine permultas de hostibus victorias reportarunt. Hugonis famam agnoscens Ferdinandus de Corduba, vulgò appellatus Magnus belli Dux, eum ad Regni Neapolitani defensionem inuitauit: quod auidè arripuit, secumq́; duxit exercitatos ac veteranos milites ac Duces, interfuitq́; famosa pugna Garillana, in qua suam generositatem & artis militaris scientiam comprobauit. Demortuo Rege Ferdinando, & Philippo I. eius genero, Carolus V. Imperator Nepos Ferdinandi & Rex Hispaniarum, Hugonem præfecit Siciliæ Regno, & simul Neapolitano in absentia Raymundi de Cardona Neapoleos Proregi occupati iussu Imperatoris Caroli V. in Longobardiæ bellis. Ex Sicilia Imperator Hugonem cum classe & exercitu amandauit Algerium in Africa, cui Federicus Acnobardus Turcarum

carum ductor se opposuit in campis circa Algerium, & vtrimque variæ velitationes actæ; tandémque non accurrente Rege Tremezino secundum pacta in fauorem Hugonis coactus est exercitum ad classem reducere: sed ecce dum nauigaret, tam sæua tempestas classem totam afflixit, vt penè tota fluctibus immersa vel conquassata fuerit. Poterat Hugo ad portum & castellum Rupis Velezianæ se recipere incolumem cum triremi sua primaria electissimis & fortissimis remigibus instructa; sed iuuare suos, eisque animos facere potius elegit, & cum eis idem vitæ discrimen subire, quàm saluti suæ propriæ consulere, tandémque summa cum difficultate Yuisam Insulam cum paucis triremibus laceris tenuit, in qua hyemem transegit. Hunc animum Hugonis infractum aduersis cùm admiraretur Imperator, ei commisit aliam classem & expugnationem Insulæ Xeluet, Pyratarum Turcarum asyli: sed paulò antè cum octo triremibus versùs Siciliam nauigans, in Pyratas ipsos incurrit, & vtrimque atrociter pugnatum, in quo prælio ipse Hugo sagitta Turcica in vultu transfixus est. Ex Sardinia Insula cum tredecim triremibus & septuaginta nauibus maioribus exercitum comparatum vehentibus soluit, & ad Insulam Xelues peruenit, turmásque militares in terram exponit & componit, quas Turcicæ operiebantur ordinatæ ad pugnam; quæ dira ex vtraque parte extitit, & in ea Hugo grauissimè læsus in humero: nihilominus Xelues Insulæ & arcis Gubernator Turcicus, constantia & magnanimitate Hugonis & exercitus Christiani territus & fractus cessit, & pepigit cum Hugone, tributum Imperatori Carolo V. pendere, & præsidium eius admittere. Imperator audito ac probato successu, Hugonem in Belgium aduocat, eique primo aduentu copias pedestres & equestres necessarias committit, ad impediendam vel retardandam Regis Galliæ fluuiorum transmissionem, qui cum quinquaginta millibus properabat ad liberandam vrbem Tornacensem ab Imperatoris exercitu obsessam: hanc prouinciem tam arduam & grauem sibi commissam, tanta cum vigilantia & fortitudine sic impleuit, vt re infecta in Galliam redire Rex adactus fuerit. Idem Imperator Comitatum Prouinciæ in Gallia Narbonensi aggressurus, classem Hugoni demandauit, quæ dum in portu Genuensi in anchoris esset, accepit aliquot Gallorum copias in pago munito illius Reipublicæ, Boragio dicto, parum sibi suisque rebus inuigilare: quare illuc cum aliquot triremibus & militibus accurrit, & inopinatò cum paucis qui secum exscenderant in Gallos irrumpit, plures iussu suo exscensuros ad opem ferendam expectans, sed vi ventorum contrariorum & furore, triremes auulsæ ab terra, copiam non fecerunt successuri auxilij, & Gallis animos addidere numerosioribus nauiter se defendendi, & ferociùs in Hugonem suosq́; paucos milites impetum faciendi, quorum impressionem vehementem ferre cùm nonpossent milites Hugonis, fuga suæ saluti consuluerunt, eumq́; derelinquunt comprehensum ab Gallis, qui statim ad Regem Franciscum I. in Papiensi obsidione occupatum, cursorem celerem mittunt, nuntiaturum Hugonis de Moncada Boragij detentionem. Hoc nuntio imprimis exhilaratus est Rex Franciscus I. sed fortuna ruente ipsemet Rex ab Cæsareo exercitu captus, Hugonem de Moncada liberum dimitti iussit, vt tanti terrâ mariq́; Ducis libertate, Imperatoris animum ad suam libertatem propriam disponeret. Postmodùm Carolus V. Hugonem cum instructione mittit Romam ad Clementem VII summum Pontificem cum hostibus suis fœderatum, vt eum quâ præstabat sagacitate ac eloquentia ab huiusmodi fœdere auerteret: cumq́; nihil proficeret, Neapolim proficiscitur ad Lanoyum Proregem, à quo exercitum impetrat, & cum eo celeriter Romam reuertitur, Vrbemq́; ingreditur, & compellit Pontificem se ad castrum sancti Angeli recipere, & inducias pacisci cum Imperatore ad spatium quatuor mensium, copiasq́; suas militares è Longobardia reuocare. Hugonis gesta fuêre Imperatori gratissima, qui defuncto Lanoyo Prorege suo Neapolitano, illi substituit Hugonem, qui pondus omne belli inter Imperatorem & Gallos ingenti animi robore sustinuit: nam Lautrechius exercitatissimus Gallorum Ductor cum sexaginta millibus in Regnum Neapolitanum ingressus, validis munitionibus Neapolim, & quaparte alluitur mari triremibus circumsedit, ita vt nul-

la vrbi

ia vrbi annona inferri posset, sperans hoc modo vrbem populosam fame ad deditionem breui obstringere: Hoc imminens discrimen Hugo cùm prauideret, classem suam adornat, decernitq; cum hostili congredi, liberumq; mare ad recipiendos victus necessarios aliaq; subsidia reddere. Cruentissimum ex vtraque parte committitur nauale prælium, tandemq; hostili globo maiore latus & humerum Hugonis Proregis dilacerante, ipse fortissimus vir interijt; eiusq; corpus posteà translatum Valentiā, honorifico in tumulo in Trinitariorum Religiosorum monasterio ac Templo Deiparæ Virgini Remediorum vt vocāt sacro conditum est; quod monasterium ac Templum magnificum sumptibus suis ædificauerat ac dotauerat Gulielmus de Moncada Auunculus eius & Archiepiscopus Tarraconensis. Quoad Gulielmum Raymundum de Moncada fratrem Hugonis antenatum attinet, Regi Ferdinando Catholico, vnà cum Hugone in bellis Neapolitanis inseruiuit; & ab Carolo V. Præfectus Arci Tripolitanæ in Africa, eam contra Turcas tutatus est, sic loquitur Zurita tomo 6. lib. 10. cap. 1. Filium habuit Michaelem de Moncada strenuissimum virum, qui in Belgio præclara fortitudinis facinora edidit, sed in obsidione & conflictu S. Quintini ab Gallis captus & Lutetiam abductus, dum redemptionis suæ militaris pecuniam recepisset, agnitus Moncada tam ab Rege Henrico II. quàm ab Antonio Borbonio marito Ioannæ Reginæ Nauarræ consanguineus, liber cum honore dimissus est, compensante Rege Henrico virum nobilem in cuius potestate iure belli detinebatur. Hic Michael adfuit bello contra Mauros rebelles Chiliarchus in Regno Granatæ: tum ab Philippo II. Prorex missus ad Baleares insulas muniendas ac tutandas contra Turcarum classem, quæ ferebatur in illas appulsuram & impetum facturam. Electo Serenissimo Principe D. Ioanne de Austria, & recepto ab Christianis Principibus & summo Pontifice fœderatis in summum Præfectum Christianæ classis contra Turcarum Imperatorem coniuratum in Christianos Principes omnes, Philippus II. ei Michaelem de Moncada fidum & fortem & exercitatum in militia committit, vt eius consilio vteretur: Et legere est apud Cabreram p. 1. lib. 9. c. 9. quomodo inter alios Auctor fuerit committendi in sinu Lepantico cum classe Turcarum; eiq; præfecturam dederit Serenissimus D. Ioannes de Austria partis vnius suæ primariæ triremis; eumq; socium in myoparone suo ad animandos reliquos Duces Christianos admiserit; eiq; suaserit Diuæ Virgini Remediorū anteà cōmemoratæ votum facere pro re feliciter succedenda ad maiorem Dei gloriam, & Religionis Christianæ propagationem, & hostium eius confusionem, præsertim cùm eo ipso die certaminis, dies ipsimet Deiparæ Virgini Remediorum festiuissimus quotannis Valentiæ celebraretur; & quomodo impetrata victoria eius fauore ac intercessione, Serenissimus D. Ioannes eum aduocarit, eiq; quadringentos aureos nummos pro voto suo facto numerarit mittendos sacello ipsius Deiparæ Virginis Remediorum: quæ typis mādauit Marcus Antonius Alos & Orraca Valentinus Ordinis sacri Trinitariorum in Chronico suo victoriæ illius celeberrimæ ad Lepantum; meminitq; §. 8. sui Chronici, illo eodē tempore ac die pugnæ illius naualis, prodigij testibus iure comprobati, videlicet rotulam paruis campanis areis circumdatam in sacello Deiparæ, solitam fune tracto ab sacrorum ministro sonum edere, dum sanctissimum Eucharistiæ sacramentum populo circumstanti spectādum eleuaretur; tunc temporis nullo fune trahente, sonum diutissimè circumuolutā reddidisse. Rediens in Hispaniam Michael de Moncada, eum Philippus II. delegat Proregem in Insulam Sardiniam, cum mandato turres & propugnacula periculosis in locis excitandi contra Pyratarum & hostium exscensiones. Adolescentiam, iuuentutem, & virilem ætatem in bellis consumpsit, & senectutem per annos tredecim in Sardiniæ Insula gubernatione. Iam verò reuertamur ad Ioannem II. de Moncada, successorem Ioannis I.

Ioannes II. de Mōcada Aragoniæ & Catalauniæ Senescalcus, & Comes de Aytona.

31. *Ioannes II. de Moncada, Aragoniæ & Catalauniæ Senescalcus, vtpote heres & successor Ioannis I. de Moncada: quam dignitatē ei confirmauit Carolus V. diplomate proprio asseruato in archiuo Serossiano. Tum etiam idē Imperator & mater eius Ioanna Hispaniæ Regina, eidem contulerunt dignitatem Præfecti supremi Iustitiæ in Regno Siciliæ, quā Hugo de Mōcada Auūculus eius possidebat: tum etiam Proregem eiusdē Regni Siciliæ constituerunt; tum etiā vrbē Aytonæ cuius Dominus erat & Prædecessores eius omnes, ab Gulielmo Raymun-*

Raymundo IV. Moncada, in Comitatum erexerunt. Hæc omnia beneficia teſtantur ſcriptura originales Imperatoris Caroli V. & matris eius Reginæ Hiſpaniarum conſeruata in Tabulario Seroſſiano, honorificam mentionem facientes, quomodo hic Ioannes II. de Moncada ſemper adfuerit in bellis Siculis & Neapolitanis Auunculo ſuo Hugoni, & præclarè ſe geſſerit. Huic ſucceſſit primogenitus eius filius

Franciſcus I. de Moncada, Aragoniæ & Catalauniæ Seneſcalcus, & Marchio de Aytona, & regiarum rationũ in Catalaunia Quæſtor ſupremus è Moncadis primus.

32. *Franciſcus I. de Mõcada, Aragoniæ & Catalauniæ Seneſcalcus, & ab Philippo II. è Comite Aytonæ factus Marchio; tum Prorex Catalauniæ; tum Prorex Valentiæ, quod Regnum per annos quatuordecim magna cum ſatisfactione Regis & Regni, quod rarò accidit, adminiſtrauit. Cùm etiam idem Rex in Catalaunia & ſucceſſores ſuos omnes dignitate rationum omniũ Regiarum Quæſtoris ſupremi inſigniuit; quæ ab Prorege & Seneſcalco nobilior cenſetur. Quare Franciſcus iſte I. de Moncada extitit primus Marchio de Aytona, & inter Moncadas primus rationum Regiarum ſupremus Quæſtor in Catalaunia.*

Gaſto III. de Mõcada Marchio II de Aytona, Aragoniæ & Catalauniæ Seneſcalcus, & regiarum rationũ in Catalaunia Quæſtor ſecundus è Moncadis.

33. *Gaſto III. de Moncada, Marchio de Aytona II. Aragoniæ & Catalauniæ Seneſcalcus, & regiarum rationum Quæſtor II. ſupremus in Catalaunia. filius Franciſci I. de Moncada primogenitus. Anno 1588. in claſſe Philippi II. contra Anglos depugnauit, Herrerà teſte in parte 3. lib. 4. c. 4. Idem Rex eum Proregem miſit in inſulam Sardiniam anno 1589. quam varijs munitionibus & propugnaculis ac turribus excitatis, ſecuriorem reddidit contra Pyratas & hoſtes; & quod hodie plurimùm æſtimatur, re frumentaria ditiorem reddidit, & copioſiorem, & Regios prouentus auxit, ſicuti omnes illius inſulæ incolæ fatentur, & ſcripſit Eſcolanus lib. 8. c. 23 n. 19. Eum anno 1607. Philippus tertius adſcripſit in numerum Nobilium Cubiculariorum ſuorum, & claue aurea condecorauit, Romamq́, miſit Oratorem ad Summum Pontificem Paulum V. & poſt triennium reuocauit vt in Aragonia Regno Proregis officio fungeretur; quo tempore ſumma cum prudentiâ & illius regni tranquillitate Mauriſcos omnes expulit, prout pluribus refert Marcus de Gualaxara lib. 6 c. 1. partis 5. hiſtor. Pontif. Poſteà ab eodem Rege Philippo tertio ad regium conſilium ſtatus & belli aſſumptus & euocatus, dum Regem in Aragoniam proficiſcentem comitatur, extremum diem clauſit.*

Hogo de Moncada frater Gaſtonis III.

Huius Gaſtonis III. frater extitit Hugo de Moncada, minor quidem ætate, ſed non inferior animo. De illo hæc ſcribit Herrera p. 3. l. 4. c. 4. & 67. In Belgio primùm contra rebelles Prouincias varia fortitudinis bellicæ argumẽta præbuit; tum in triremibus Neapolitanis contra Turcas. Quare Philippus ſecundus eum præfecit in nauali claſſe contra Anglos nauibus maioribus triremalibus, quibus præcipuam Anglorum nauem aggreſſus eam lacerauit, tandemq́, malò maiore priuauit, & ad littus Anglicum effugere coëgit: tum nauem Luſitanam prægrandem hoſtilibus circumſeptam & malè tractatam, liberauit: ſed propè Caleti portum in arenas impingens, renuit exſcenſione ſaluti ſuæ conſulere, voluitq́, potiùs mortem glorioſam cum ſuis oppetere acriter pugnando, quam generoſiſſimo Moncadæ iuueni annos nato triginta tres globus hoſtilis tormenti intulit, ſicuti alteri Hugoni de Moncada Proregi Neapolitano in claſſe regia Neapolitana ſub Carolo V. prout memorauimus in appendice num. 30.

Franciſcus II. de Mõcada Marchio III. de Aytone, Aragoniæ & Catalauniæ Seneſcalcus, & regiarum rationum in Catalauniæ ſupremus Quæſtor tertius è Moncadis.

34. *Franciſcus II. de Moncada, Marchio III. de Aytona, Aragoniæ & Catalauniæ Seneſcalcus, & rationum regiarum è Moncadis Quæſtor tertius ſupremus. Cùm iuuenis eſſet, & viuente Patre Gaſtone tertio, Oſſonæ Comes appellaretur, ſcripſit Hiſpanico ſermone Catalaunorum expeditionem in Græciam, tum Boetij viri Conſularis vitam, tum memorabilia rerum moralium & politicarum, tum Latino ſermone notas de Bearnenſium Vicecomitatu. Primus liber publico datus eſt Valentiæ: vltimum edidit Nobilis & eruditus Petrus de Marca Præſes Palenſis, in fine ſuæ Hiſtoriæ Bearnenſis, quem ab eo expoſtulauerat: Alij duo, nimirum vita Boetij, & memorabilia moralia & politica, conſeruantur, & in lucem hactenus non prodierunt. Sic Palladis manſuetioris primis annis Palaſticus fuit; cuius arma poſtmodum, varijs & grauiſſimis perfunctus muneris, proſperè tractauit. Ad Infantam Iſabellam Claram Eugeniam, vxorem Alberti Archiducis Auſtriaci, vt ei de obitu Archiducis mœrorem Regis Philippi quarti teſtaretur, ab*

tur ab ipso Rege Legatus missus est in Belgium: tum in reditu ad Aulam, claue aurea cubiculi Regij cohonestatus, & in numerum Nobilium Cubiculariorum adscitus, delegatut est ab eodem Rege Orator ad Imperatorem Ferdinandum II. eoq; tempore solertia & prudentia sua, Imperatori Princeps Transyluaniæ Bethlemgaborius & Rex Daniæ, reconciliati fuere; & Palatinus Hungariæ electus imprimus studiosus Domui Austriacæ; suppetiásque Regijs Ducatus Mediolanensis Gubernatoribus, & opportunas procurauit. Adscitus in numerum Consiliariorum regiorum status ac belli: Designatus ab Rege Gubernatór Mediolanensis, pridie quo discessum è Germania in Italiam parauerat; literis ab Rege secundis acceptis, quibus reuocabatur Administratio Mediolanensis, & iubebatur in Belgium proficisci, vt apud Serenissimam Infantam Isabellam Legati munere fungeretur, illico itineri se commisit, & post aliquot annos viuente Infanta declaratus est ab Rege supremus in Belgio armorum suorum terra marique Præfectus, quam prouinciam & onus, ferè omnes illo tempore aduerso declinabant, ita ingenti animo suscepit, vt celerrimè Bouchainum vrbem ab rebelli Gubernatore receperit, & Nobiles aliquot primarios rerum nouarum Architectos è Belgio euadere coëgerit: Principi Auriaco regium exercitum florentissimum opposuerit eiúsque machinationes dissiparit. Demortua Serenissima Infanta Isabella, Heroina huius sæculi, & sapientissima pijssimáque fœmina Belgij Gubernatrice, declaratus ab Rege eiusdem Belgij Gubernator, statim Insulam Steuensuertam in medio Mosæ fluuij sitam ac munitam ab Hollandis, intercepit: Ducatum Limburgensem recuperauit: Castrum Argentallum expugnauit; Lauanam & Leuthum muniuit; Ducatus Gueldriæ & Iuliæ stabiliuit; castrum sanctæ Annæ & vrbem Disthemium recepit; Bredamq; obsidione inchoata liberauit; Treuirensem ciuitatem è manibus Gallorum eripuit, & Electorem Archiepiscopumq; illius ciuitatis Imperatoris hostibus affectum comprehendit, quod factum Ferdinandi tertij electionem in Imperatorem non mediocriter iuuit; Serenissimo Cardinali Ferdinando Infanti, & Regis fratri, è Germania in Belgiũ aduentanti Gubernatori obuiam processit Iuliacum vsque, & honorificentissimè, vt par erat excepit; eiq; potius & Regi obedire & inseruire decreuit, quàm in Hispaniam ad res proprias ac ditiones componendas ex Regis facultate concessa redire. Nec fuit irrita magnanimi viri electio & constantia, cuius consilio & arte duo numerosi exercitus Gallorum & Hollandorum, amplissimam quidem vrbem Louanium, sed non validè circumseptam obsidentium, breui tempore seuncti ac dissipati fuerunt. Deinde summo cum secreto & prouidentia singulari, & astu militari, Arcem Schenquianam fortissimam, Hollandorum vallum præcipuum situm in angulo Rheni fluuij, è quo in bina brachia ingentia diuiditur, & per diuersas hostium Prouincias profluentia, tandem ab septemtrionali Oceano absorbentur, intercepit & subiecit Regi, conseruassetque ad ruinam & euersionem Hollandorum, nisi paucis post. diebus Gocchij oppidi neutralis in Cliuia Ducatu, febre maligna correptus intra septem dies extremum diem obijsset, totius exercitus & Belgij & Serenissimi Infantis Cardinalis Ferdinandi, imò ipsius Regis summo cum mœrore & luctu. Sensum Regis explicabo schedula particulari ad Comitem Oliuariũ præcipuum suum Consiliarium ac Ministrum, scripta sua manu propria Hispanicè, quæ penes me fuit, & illam hîc exscribo ad verbum: Conde, la muerte del Marques de Aytona, me ha causado grande dolor y justo sentimiento; puesque he perdido en el vn Ministro de muchas prendas, y tal que no veo yo otro que le iguale: y obligame à sentir mas su falta, el auerse encargado de seruirme en Flandes, quando todos lo reusaron; y el auer abandonado totalmente por mi seruicio sus hijos y hazienda, sin tratar de mas que de seruirme con fidelidad, desuelo y amor. Lo que a mi me toca, es gratificar esto; como lo harè luego con larga mano: puesque que quiero que vea el mundo que sè premiar a quien me sirue como el Marques, que Dios perdone. *Sic verò hanc Regis schedulam & sensum, vt ab omnibus intelligatur, Latinè verto. Comes, obitus Marchionis de Aytona mihi ingentem peperit dolorem, & me iusto animi sensu perculit; nam in eo iacturam feci Ministri multarum virtutum*

præditi,

præditi, etiámque tali vt non ego aduertam alium ei æqualem: obstrictúsque sum iacturam eius magis persentire, quòd onus susceperis mihi in Belgio inseruiendi eo tempore quo alij omnes illud recusauerunt; tum quòd mei causa penitus filios, résque suas omnes posthabuerit, nihilq; attenderit quàm cum fidelitate ac vigilantia & amore mihi morem gerere. Quantum ad me attinet, est gratificari istud, sicuti statim larga manu præstabo: nam volo ut orbis totus agnoscat me scire præmiari eum qui mihi inseruit vt Marchio, quem Deus absoluat. O illustre de magnanimo fideliq; Ministro suo Maximi & sapientissimi Regis testimonium posteritati commendandum. Parùm erat ingenti animo Marchioni suas res pro Regis obsequio negligere; cùm pro eodem se obarauerit in hoc bello ad summam excedentem octoginta millia aureorum nummorum, quos in exploratores, egenos, & vulneratos, & præmia, & munera militaria, & ad conciliandos Duces, ac viros primarios lautè & opiparè tractandos, expendit.

Hactenus Antecessores Tuos numero triginta quatuor præstantissimos viros deduximus, quorum postremus est Pater Tuus immortali memoria dignissimus. Sed antequam de Te verba faciam, liceat mihi nobilissimas & clarissimas Gentis Tuæ feminas attexere: tum prærogatiuas aliquot Moncadarum non vulgares commemorare; quæ duo numeris proprijs distinguemus.

1. Elisena de Moncada, filia Petri secundi de Moncada, & soror Othonis tertij, nupsit Iacobo secundo Aragonum Regi, quam vnicè adamauit, ex Zurita libro 6. cap. 39. Hæc à fundamentis exstruxit Monasterium amplissimum Pedralbanum prope Barcinonem, ac reditibus dotauit pro Monialibus sexaginta, & pro clericis duodecim ad officia diuina celebranda. Moniales autem sunt ex regula sancti Francisci Assinatis, debéntque esse è Moncadarum Gente, vel antiqua probatæ Nobilitatis, & earum Abbatissa debet esse è Moncadis. Quæ constant ex antiquis scripturis Monasterij huius fundationis. Elisena de Moncada.

2. Constantia de Moncada matrimonio iuncta fuit Lupo Diazio de Haro Cantabriæ Dynastæ & Regum Castellæ consangineo. Ex Zurita libro 3. cap. 77. Constantia de Mócada.

3. Altera Constantia de Moncada, vxor fuit Alphonsi primogeniti Regis Iacobi Aragonij; & postea Henrici primogeniti Richardi Principis Cornubiensis Romanorum Regis & fratris Henrici Regis Angliæ. Ex Bernardo Miedesio libro 15. de gestis Iacobi Regis Aragonum, & Zurita libro 3. cap. 60. & Elia de Pamiers in genealogia Comitum Foxensium. Altera Cóstantia de Moncada.

4. Gulielma de Moncada, soror Constantiæ vltimæ, nonnullos habuit nuptiarum suarum Regios competitores: nam vt ait Zurita libro 4. cap. 47. & 89. connubij eius pactiones diu agitatæ fuerunt cum Sanctio Infante filióque Alphonsi Regis Castellæ, cui in regno successit: posteà cum Iacobo Siciliæ Rege, fratre Alphonsi Aragonum Regis; sicuti constat ex scripturis authenticis Messanensibus de huiusmodi pactionibus asseruatis in Tabulario Barcinonensi Regio. Demum nupsit Petro fratri Iacobi secundi Aragoniæ Regis, vti legere est apud Zuritam lib. 5. cap. 14. & Montanerium cap. 184. & 189. Hæc fuit mulier generoso & virili animo, quæ lites armis componebat: Visitur eius sepulchrum marmoreum in sacra æde Monasterij sanctarum Crucum, cum statua eius marmorea equo insidente & eleuatà manu dextera strictum ensem protendente. Gulielma de Moncada.

5. Ioanna de Moncada, nuptui tradita est Infanti Petro, Comiti de Riuagorza, Ampuriarum & Prades, filióque Iacobi secundi Aragoniæ Regis. Ita scribit Elias de Pamiers in historia Comitum Foxensium, & Paulus Lescunus in genealogia Principum Bearnensium. Ioanna de Moncada.

Quoad prærogatiuas attinet domus ac familiæ Moncadarum, deductas ex iam recensitis & citatis, vel citandis Auctoribus: prima & originaria est, vt sit ex stirpe Regum vel Ducum Bauariæ, & consanguinea Caroli Martelli Francorum Regum & Regni Administratoris; ideóque etiam Pippini filij sui, & Caroli Magni Imperatoris, & Ludouici Pij Imperatoris filij Caroli Magni. I. Prærogatiua domus Moncadarum.

II. Prærogatiua domus Moncadarum. *Altera est, quòd Otgerto Duce exercitus auxiliaris pro Catalaunis Christianis contra Mauros, vitâ functo, in eius locum fuerit electus Dux, Nauferus Dapifer primus, eiq; in eadem armorum Præfectura suffectus eius filius Arnaus Dapifer secundus; & huic Armengolius Dapifer tertius filius primogenitus Arnai; & huic Armengolio, eius frater Otho Dapifer quartus. Quæ successiua electiones ab Francorum & Catalaunorum Christianorum exercitibus vnanimiter conspirantibus, supereminentem nobilitatem & fortitudinem & authoritatem Dapiferorum istorum præseferunt, fundatorum in Hispania domus ac familiæ Moncadarum.*

III. Prærogatiua domus Moncadarum. *Tertia est, quòd ab Imperatore Ludouico Pio post ereptam è Maurorum tyrannide Barcinonem & constitutum Wifredum Comitem I Barcinonensem; Armengolium Dapiferum tertium, eodem tempore titulo Comitis Vrgellitani & Ampuriarum, idem Imperator decorauerit. Atque ita in Catalaunia primus post Comitem Barcinonensem, Armengolius iste fuerit, Comes habilitus.*

IV. Prærogatiua domus Moncadarum. *Quarta fundata est in connubijs vndecim, tam virorum, quàm feminarum Gentis Moncadarum, cum Principibus ac Regibus. Virorum quidem sex: nam Otho secundus de Moncada, vxorem habuit filiam Comitis Barcinonensis Suinfredi, & vxoris eius Infantæ Mariæ filiæ Regis Aragonum Sanctij Abarca: Gasto secundus Hermengardam filiam Comitis Barcinonensis Raymundi Borelli: Gulielmus secundus Adelaiam filiam Rogerij Comitis Carcassonensis, sororémque Hermenseda vxoris Comitis Barcinonensis Raymundi Borelli: Gulielmus tertius Mariam Vicecomitissam Bearnia & Gasconia: Gulielmus Raymundus sextus Constantiam filiam Petri secundi Aragonum Regis. Otho quartus Irenem, Neptem Theodorici Lascaris Græciæ Imperatoris. Feminarum verò quinque è Moncadis, ordine suo proprio, paulò ante commemoratarum.*

V. Prærogatiua domus Moncadarum. *Quinta profert magnanimos ac fortes Moncadas, qui pro fide Christiana propaganda, vel pro Principibus suis interempti sunt, vel ab hostibus vulnerati, vel in exercitibus obierunt, vel ab hostibus inter pugnandum comprehensi fuerunt. Arnaus Dapifer secundus prope Narbonam, Maurorum armis interijt. Gulielmus Raymundus primus de Moncada, ad latus Raymundi Borelli Comitis Barcinonensis & Principis sui, ab exercitu Maurorum cæsus. Otho de Moncada, frater Gastonis secundi de Moncada, in conflictu contra Mauros Cordubenses, telis eorum transfixus in præsentia Comitis & Principis sui Raymundi Berenguerij, vitam cum morte commutauit, vti referunt volumina vetusta Tabularij Serossiani. Gulielmus & Raymundus Moncada in Insula Baleari maiore, Maurorum ferro vitâ priuati sunt. Gasto de Moncada in obsidione Mureti prope Carcasonam, præsente Rege Aragoniæ Muretum expugnante, in viuis esse desijt, vti constat ex historia Albigensium. Hugo de Moncada filius quartus Petri tertij de Moncada, & Prorex Neapolitanus, in classe regia dimicans contra Gallorum triremes, hostili globo laceratus vitam amisit. Alter Hugo de Moncada filius Francisci primi de Moncada, propè Caletum, in pugna naualicontra Anglos, eorum globo traiectus occubuit. Otho quintus de Moncada in bello Arboreensi in Sardinia Insula spiritum extremum emisit. Franciscus secundus de Moncada capto Schenquio in castris regijs vitam hanc mortalem finiuit. Petrus secundus de Moncada, in præsentia Regis Aragoniæ inter primos dum se opponit Gallis in Catalauniam impetum facientibus, graui vulnere affectus est. Gulielmus Raymundus octauus de Moncada in obsidione Cerræ, Rege Aragonum spectante vulneratus est; tum etiam in bello Neapolitano altera vice læsus. Hugo de Moncada classis Imperatoris Caroli quinti Præfectus cum Pyratis Turcis obuijs in mari decertando, sagittâ eorum in vultu transfixus est; tum Insulam Xelues expugnando hostili globo in humero traiectus. Petrus de Moncada Templariorum Equitum Magister in Aragonia, interceptus fuit quidem à Mauris in pugna, sed artificiosè corrupto Almugauare Mauro, liber effugit, vti scribunt Desclottus lib. 1. cap. 20. & Zurita libro 3. cap. 100. Hugo de Moncada idem qui vulneratus in vultu & humero ab Turcis, captus quidem fuit ab Gallis in oppido Botagio Liguriæ, sed honorificentissimè ab Francisco primo Gallorum Rege, liber dimissus. Mi-*

sus. Michael de Moncada, ad sanctum Quintinum in pugna exercituum Philippi secundi & Henrici secundi Regum aduersariorum, ab Nobili Gallo comprehensus & Lutetias Parisiorum abductus, vbi agnitus Moncadæ, fauore Ioannæ Reginæ Nauarræ, & Antonij Borbonij eius mariti, apud Regem Henricum secundum gratiosis, libertate donatus est.

Sexta & præcipua nota. Vnio Regni Aragoniæ cum Catalaunia Moncadis tribui debet, videlicet Gulielmo Raymundo IV. de Moncada: ea prudentia & auctoritate quam retulimus num. 15. cum de ipso tractaremus. VI. Prærogatiua domus Moncadarum.

Septima continet singularem Pietatis ac Religionis sensum in quatuor fundationibus ac dotationibus sacris. Nam Gulielmus Raymundus IV. de Moncada, ædem sacram ac Monasterium Ordinis sancti Bernardi Valdauræ primum circa Moncadæ castrum, postea verò ad sanctas Cruces in amœniore loco, quod Valles nominatur non longè à primo ædificauit ac dotauit, prout diximus num. 15. Præterea Elisena de Moncada, magnificum aliud Ordinis sancti Francisci Pedralbanum circa Barcinonem pro Monialibus à fundamentis erexit ac copiosis redditibus locupletauit, de quo egimus num. 1. feminarum clarissimarum è Moncadis. Insuper Gulielmus de Moncada Archiepiscopus Tarraconensis, ex decimis Insulæ Yuisæ dignitatem Æditui sacri Ecclesiæ Taraconensis amplioribus reditibus exornauit. Denique Gulielmus Raymundus de Moncada, Episcopus Vicquensis primùm, tum Archiepiscopus Tarraconensis monasterium Religiosorum Trinitariorum, ædemq; eorum sacram Deiparæ Virgini Remediorum, in Valentiæ ciuitate à fundamentis construi iussit ac ditauit. VII. Prærogatiua domus Moncadarum.

Octaua commemorat Moncadas Proreges & Regnorum Procuratores, qui olim eadem Regia auctoritate Regna gubernabant, qua hodie Proreges. Gulielmum Raymundum VI. Procuratorem Regis Aragoniæ in Catalaunia, Othonem III. Procuratorem in Catalaunia; tum in Valentiæ Regno: Othonem IV. Procuratorem in Balearibus Insulis: Hugonem de Moncada sub Carolo V. Siciliæ simul & Neapoleos Proregem, tum altera vice Neapolitani Regni: Ioannem II. sub Carolo V. Catalauniæ Proregem: Michaelem de Moncada sub Philippo secundo Balearium Insularum Proregem, & postmodum Sardiniæ: Franciscum I. sub Philippo secundo Valentiæ Proregem: Gastonem tertium sub Philippo secundo Proregem Sardiniæ, & sub Philippo tertio Proregem Aragoniæ: Franciscum secundum à Philippo quarto destinatum Gubernatorem Mediolanensem. VIII. Prærogatiua domus Moncadarum.

Nona profert catalogum Moncadarum, Legatorum ad Summos Pontifices, & Imperatores & Reges, & Principes: Raymundum secundum ad Regem Castellæ missum ab Alphonso secundo Aragoniæ Rege, tum etiam ad Raymundum Comitem Tolosanum: Gulielmum Raymundum quartum ab Rege Aragoniæ ad Principem Catalauniæ Comitemque Barcinonensem: Othonem tertium ab Iacobo secundo Aragonum Rege ad Summum Pontificem, tum ad Regem Galliæ: Hugonem de Moncada ad Summum Pontificem ab Carolo V. Gastonem tertium à Philippo tertio ad Summum Pontificem: Franciscum secundum à Philippo quarto bis ad Serenissimam Infantam Isabellam Claram Eugeniam; tum ad Ferdinandum secundum Imperatorem. IX. Prærogatiua domus Moncadarum.

Decima recenset Moncadas classium in mari Præfectos. Armengolium Dapiferum tertium, qui classe comparata, Maurorum classem Pyratarum in mari mediterraneo superauit ac cepit. Gulielmum de Moncada, qui primam aciem classis Iacobi secundi Aragoniæ Regis ad subiugandas Baleares Insulas direxit. Alterum Gulielmum de Moncada Archiepiscopum Tarraconensem, qui sumptibus proprijs & aliorum Moncadarum classem instruxit, & Yuisam Insulam sibi & Moncadis cum beneplacito Regis Iacobi secundi Aragoniæ acquisiuit. Petrum de Moncada fratrem Othonis V. Archithalassum Petri IV. Aragonum Regis missum cum classe ad opem ferendam Regi Castellæ in freto Gaditano contra Maurorum classem. Hugonem de Moncada summum Præfectum trium diuersarum classium ab Carolo V. constitutum; primæ contra Algerium in Africa; alterius contra Insulam Xelues etiam Africanam; tertiæ contra Prouinciam in Gallia Narbonensi, quartam superaddo Neapolitanam, quam ipse Hugo dum Prorex esset istius Regni instruxit con- X. Prærogatiua domus Moncadarum.

xit contra Gallicam obsidentem ex parte maris Neapolim. Michaelem de Moncada, fidum comitem, & exercitatum militem, & Consiliarium datum Serenissimo Principi Ioanni de Austria, ab Philippo secundo pro conflictu contra Turcicam classem; cui Moncadæ in ipsa pugna, triremis suæ primariæ latus vnum defendendum commisit. Alterum Hugonem de Moncada Præfectum maioribus nauibus ab Philippo secundo in nauali congressu contra Anglos. Denique Franciscum secundum de Moncada, nauium Dunquerquanarum Gubernatorem constitutum ab Philippo quarto, cuius directione plures hostium naues, quàm reliquis præcedentibus temporibus, in Anglicano freto ab Hollandis interceptæ fuerunt.

XI. Prærogatiua domus Moncadarum. *Vndecima enarrat Prouincias, Insulas, Vrbes & Arces subactas, & victorias reportatas in continenti ab Moncadis, tum etiam in mari. Nauferus Dapifer primus victoriam memorabilem in campo Vrgellitano contra exercitum trium Regum Maurorum, Segoruiensis, Toleti, & Fraga reportauit. Idem & Arnaus eius filius Dapifer secundus Comitatum Vrgellitanum & Ampurias, Mauris profligatis, subiugarunt. Armengolius Dapifer tertius Maurorum classem iuxta Baleares Insulas disiecit & cepit, quingentis Christianis captiuis in libertatem assertis. Raymundus primus de Moncada, sæpius Maurorum copias in Comitatū Barcinonensem excurrentes expulit & contriuit. Gulielmus Raymundus primus de Moncada ingenti animo suas ditiones contra Mauros defendit, & non solùm Barcinonem ab illis captam ac direptam recuperauit, sed etiam loca omnia Catalauniæ Illerdam vsque, Mauris expulsis, imperio Comitis Barcinonensis subdidit. Gulielmus Raymundus tertius de Moncada, in prima Balearium Insularum expugnatione multoties Maurorum agmina dissipauit & afflixit. Gulielmus Raymundus quartus de Moncada, Tortosam vrbem, Mauris resistentibus tandem feliciter cepit, & in potestatem Comitis Barcinonensis redegit. Gulielmus Raymundus sextus de Moncada, præcipua causa fuit victoriæ celeberrimæ Wedensis de Mauris reportatæ, Zurita teste, loco citato, cùm ageremus num. 19. de isto Gulielmo Raymundo sexto. Raymundus de Moncada post exscensionem in Balearem Insulam maiorem, primus cum paucis Maurorum agmina composita lacessit, Ducémque lancea transfodit, turmas hostium proterit, cadit, & fugere cogit, spectante Iacobo secundo Rege Aragoniæ, è triremi sua regia, primam hanc suorum pugnam contra hostes, & graui mœrore affecto, quòd non interesset tam generosæ suorum actioni. Gulielmus de Moncada Tarraconensis Archiepiscopus, cum alijs Moncadis consanguineis Tuisam Insulam Mauris superatis debellauit. Petrus secundus de Moncada semel & iterum Gallorum ingressum in Catalauniam repressit. Otho quartus de Moncada in circumsessione Almeriæ vrbis & expugnatione fuit ab Rege Aragonum relictus armorum suorum Moderator, vrbémque è Mauris abs se deuictam, in Regis sui potestatem redegit. Otho sextus de Moncada cum duobus filijs suis Siculos rebelles sæpius contriuit, & ad imperium Ducis de Monblanc Infantis Aragoniæ reduxit. Gulielmus Raymundus octauus de Moncada, Insulam Sardiniam titubantem sub Regis Aragonum Martini imperio, sub eius obedientia, quà prudenter, quà fortiter, retinuit; & Comitem Vrgellitanum ad Regis eiusdem voluntatem, pari modo reduxit; & ipsummet Regem Oscæ proprijs armis generosè & constanter contra rebelles suos defendit. Matthæus Florimundus primus & Petrus tertius Moncadæ, coniunctis armis rebelles Ioanni secundo Aragoniæ Regi, non solùm semel euicerunt in conflictibus varijs, sed etiam Flixium munitum oppidum asylum eorum eripuerunt & Regi restituerunt. Idem Petrus tertius de Moncada, impressionem Gallorum ad Puicerdani angustias retudit. Hugo de Moncada in Belgio cum copijs ab Carolo V. traditis, Gallorum Regis exercitum numerosum impediuit in Belgio, ne fluuios trajceret. Idem exercitu Neapoli comparato Romam ingreditur, cogitq; Summum Pontificem abrumpere fœdus quod cum hostibus Caroli V. pepigerat. Franciscus secundus in Belgio armis Regias res instaurauit; plurimas vrbes ab hostibus recepit, intercepit; alias muniuit; Ducatus Gueldriæ & Iuliæ, stabiliuit, Limburgensem hostibus eripuit; duas obsidione liberauit, Bredam & Louanium; Treuirensem Electorem & Episcopum comprehendit hostibus*

stibus Imperatoris studiosum plurimas naues Hollandicas in freto Anglicano cepit: quæ retulimus n. 34. in eius gestis.

Duodecima est, integritas, affectus & reuerentia & amor & fidelitas Moncadarum, erga Principes & Reges suos, eis promptè constantérque in difficultatibus & bellis contra Mauros & rebelles & hostes assistendo, & pro eorum honore & propagatione Regnorum decertando fortunásque omnes proprias exponendo, sanguinem profundendo, & vitam ipsam cum morte commutando: quæ omnia manifesta sunt ex his quæ in eorum gestis narrauimus. Sed inter alios eminet Gulielmus Raymundus quartus de Moncada, qui exul in Aragonia, & omnibus bonis ac dignitatibus ab suo Principe Catalauniæ spoliatus; amoris & affectus & fidelitatis erga suum Principem tantummodò conscius, sapientia incomparabili & generosa, illi Principem vnicam & heredem Aragoniæ Regni, vxorem & Regnum ipsum procurauit. Tum Otho tertius de Moncada, qui nullo vnquam modo flecti potuit & adduci, ad confirmandas donationes ab Rege Aragoniæ Alphonso quarto Infanti Ferdinando factas, in præiudicium Principis Petri, qui Regi succedere debebat iuxta constitutiones & conuentiones & statuta Regum Alphonsi ipsius & Iacobi antea recepta & confirmata. Quid referam Gulielmum Raymundum octauum de Moncada, qui Regem suum Ferdinandum in vrbe Osca armis contra rebelles constanti animo tutatus est ac defendit? Accedunt Matthæus Florimundus primus & Petrus tertius Moncadæ, qui pro Rege Iacobo secundo senectute graui confecto, posthabitis fortunis & gratiâ Principis filij sui cui fauebant rebelles, arma sumpserunt, eósque sæpius debellarunt. Denique Franciscus secundus de Moncada, teste Rege suo Philippo quarto & scribente ad Comitem Oliuarium, qui Regis sui causa penitus filios résque suas omnes posthabuit, nihilq; aliud attendit, quàm cum fidelitate & vigilantia & amore, illi morem gerere. Neque prætereundum iudico dicere in summa de Moncadarum Gente fidelitate; quod nunquam partes Regibus suis ac Principibus aduersantes, sequuti fuerint. XII. Prærogatiua domus Moncadarum.

Decima tertia est, vt supra nongentos annos, nunquam mares defecerint, & semper nomen Moncadarum in maribus eiusdem gentis constiterit, & nunquam in alienam transierit, etiam cum obligatione assumendi ac propagandi nomen. XIII. Prærogatiua domus Moncadarum.

Decima quarta est, quòd ab anno 1068. in Catalaunia fuerint è Moncadis Senescalci ad hæc vsque tempora; quæ dignitas post Principem Regémque summa est, officiáque habet annexa Præfecti primarij domus regiæ ac Regni, & Comitis stabilis, vti ostendimus num. 13. cùm ageremus de Gulielmo Raymundo secundo de Moncada, primo constituto in Catalaunia Senescalco. Quòd si ab Petro secundo de Moncada, vsque ad Ioannem primum de Moncada, interrupta fuerit in familia Moncadarum hæc Senescalci Catalauniæ tam eminens dignitas; causa eius interruptionis nihil detrahet Moncadis primi rami, quin potiùs splendorem maiorem superaddet. Nam ex Zurita multis in locis, Alphonsus quartus Aragoniæ Rex & Princeps Catalauniæ, Infanti Petro fratri suo titulum ac iura Senescalci in Catalaunia & Aragonia contulit; cui successit in hac dignitate filius proprius Ioannes Aragonius, Comes de Prades; tum Petrus quartus Rex Aragoniæ hanc eandem coëmit ab Ioanne Aragonio commemorato, eáque Infantem filium suum Martinum condecorari voluit. Restituta denique est Moncadis ab Ferdinando Rege Aragoniæ, vnà cum titulo ac præeminentia Senescalciæ Regis ac Regni Aragoniæ, in persona Ioannis primi de Moncada, & successorum eius, vti diximus in n. 30. Atque ita Senescalci in Catalaunia & Aragonia fuère Moncadæ, tum fratres aut filij Regum Aragoniæ; nullius autem alterius Gentis aut familiæ; tum demum restituti ab Regibus ipsimet familiæ Moncadarum: quod splendidissimum est præexcellentis nobilitatis & auctoritatis Moncadarum monimentum. XIV. Prærogatiua domus Moncadarum.

Decima quinta catalogum proponit dominiorum, quibus Moncadæ pridem superioribus sæculis condecorati fuère, ob eorum egregiè gesta & merita; nimirum Comitatuum Vrgellitanorum & Ampuriarum; tum Vrbium Tortosæ, Vicqui, & Maioricæ; & Arcium Peniscolæ & Illerdæ; tum Insularum Minoricæ & Yuisæ; tum Præfecturæ Valentia XV. Prærogatiua domus Moncadarum.

ĕ

lencia: tum in Sicilia vrbis Licatæ, & Comitatus Camaratensis: tum in Sardinia vrbis Bossæ, & Comitatus Mormilæ, & Baronatus Montis regalis.

XVI. Prærogatiua domus Moncadarum. *Decima sexta prærogatiua est, Clauis aurea Cubiculariorum Regiorum è nobilissimis familijs selectorum insigne, quod in Hispania introduxit Philippus primus, quo Auus tuus Gasto tertius fuit ab Philippo tertio exornatus, & Franciscus secundus Pater tuus ab Philippo quarto.*

XVII. Prærogatiua domus Moncadarum. *Decima septima est, Consilium status ac belli, ab Carolo quinto Imperatore in Hispanijs institutum, & ab Philippo secundo eius filio, alijsque Regibus consequentibus conseruatum & amplificatum: ad quod non nisi prudentissimi Proreges, & viri varijs Legationibus ad Reges exteros perfuncti, tum in militari scientia exercitatissimi euehuntur. Quare non immeritò Philippus tertius Auum tuum Gastonem tertium, & Philippus quartus Parentem tuum Franciscum secundum, ob eorum comprobatam prudentiam, & rerum tam in Hispania, quàm in aliorum regnis notitiam, ad ea consilia assumpserunt.*

XVIII. Prærogatiua domus Moncadarum. *Decima octaua est, numerus Archiepiscoporum & Episcoporum è familia Moncadarum, deductus ex Catalogo Prælatorum in Catalaunia. Ludouicus filius Armengolij Dapiferi tertij Episcopus Vicquensis. Gulielmus de Moncada Archiepiscopus Tarraconensis tempore Iacobi secundi Aragoniæ Regis. Alter Gulielmus de Moncada filius Gulielmi Raymundi sexti & Constantiæ Infantæ filiæque Petri Aragonum Regis, Episcopus Illerdensis. Gasto de Moncada filius Petri de Moncada secundi & frater Elisenæ vxoris Iacobi secundi Aragonum Regis Episcopus primùm Oscensis, tum Gerundensis. Otho de Moncada, filius Othonis sexti de Moncada Comitis de Camarata, Episcopus Tortosæ. Hugo de Moncada, filius Ioannis secundi de Moncada, & frater Francisci primi de Moncada, Episcopus Vrgellensis. Gulielmus de Moncada, filius Ioannis de Moncada, Domini de Chiua & Castelnou, & Nepos Othonis sexti de Moncada, Episcopus primo loco Vicquensis, secundo verò Archiepiscopus Tarraconensis. Ioannes de Moncada, filius Francisci primi de Moncada Episcopus Barcinonensis, & postea Archiepiscopus Tarraconensis.*

XIX. Prærogatiua domus Moncadarum. *Decima nona referet prodigia diuinitus operata, quorum causam dedêre Moncadæ. Primum est apparitio Sancti Georgij in assultu Christiani exercitus Iacobi secundi Aragoniæ Regis, & violento ingressu in vrbem Maioricam, milites Christianos animantis & Mauros territantis: Cuius vrbis expugnatio Moncadis debetur, qui Regis animum ac totius exercitus eius, eloquentia & auctoritate in propriam eorum opinionem pertraxerunt, in prosequenda illius vrbis expugnatione, & facienda impressione, licet inclinati omnes essent cum Rege, conditiones Maurorum Regis quas retulimus in appendice num. 19. admittere. Alterum prodigium diuinum est, Regis Aragonum & aulicorum eius panis defectus, & fames, leuata in Artanæ munitionis obsidione, ex septem panibus Raymundi de Moncada, quos tantummodò habebat, impertita priùs benedictione ab suo Capellano, Regi & aulicis eius appositis, quibus ad reliquos duos dies pactorum inter Regem & Mauros de redditione munitionis Artanæ, panis inopiam sine vlla difficultate tolerarunt, vti diximus in eadem appendice num. 19. Tertium prodigium diuinum est, rotæ campanariæ pulsatio nemine trahente funem, in æde sacra Diuæ Mariæ Remediorum Valentiæ in vrbe, tempore pugnæ ac victoriæ Lepanticæ reportatæ de Turcarum classe ab Christiana, cui præerat Serenissimus D. Ioannes de Austria, qui suasu Michaelis de Moncada votum emiserat eidem Deiparæ pro felici successu certaminis illius tam periculosi: prout etiam narrauimus in appendice num. 30. Atque ita manifesta fit Moncadarum confidentia in Deum, & eius sanctissimæ Matris auxilium.*

En Excellentissime Marchio, GVLIELME RAYMVNDE DE MONCADA, *animorũ ingentium Patris & Auorum & Proauorum ab nongentis & amplius annis, præstantissimas imagines, non marmoreas & æneas in atrijs ac palatijs & foris publicis erectas, successu temporis & inconstante fortuna, hostium furore barbaro inuidentium conterendas; qua-*

das; quales legimus Assyriorum ab Græcis, & Græcorum ab Romanis, & Romanorum ab Gothis: sed in historiarum monumentis & in mentibus legentium quamdiu orbis erit hic terrenus constanter perseueraturas. Nam quæ Assyrij & Græci & Romani gessêre, ea vel propter inanem gloriæ humanæ auram, vel mentitorum Deorum suorum honorem, vel contra iustitiam omnem aggressi sunt; eapropter media eorum omnia quæ ad immortalitatem nominis sui comparandam adhibuerunt, vana ceciderunt, & asportatas aliò vel confractas eorum statuas & simulacra, & mausolea solo æquata conspicimus. Quæ verò Prædecessores Tui Moncadæ pro veri Dei gloria & Christianæ Religionis dilatatione, contra Mauros & Turcas, & pro iure Principum ac Regum suorum contra hostes ac rebelles suos, & pro veris virtutibus Christianis perpetrarunt; hactenus perstat eorum memoria, & semper vt Dei gloria quam spectarunt, & Christiana Religio quam promouerunt, & virtutes Christianæ quas excoluerunt, perennabunt.

Sed quid Marchio de Te dicam, nisi omnia quæ de Tuis Antecessoribus Moncadis, ex historiarum voluminibus antiquis & recentioribus narrari: ita vt sis Tu virtutum omnium illorum summa & compendium; eôsque repræsentes vnicè, sintque omnes Tui peculiares delineationes. Quare appositè eos ac Te comparauero opticæ picturæ, quam Lugduni anno 1627. cùm docerem Mathematicas spectandam exhibui ex mesoptrica reconditis speculationibus & praxi non infelici à me depictam: in qua varij vultus in plano suis proprijs coloribus artificiosè formati, species emittunt proprias partium quarumdam suarum ad polyedram crystallum eis obuersam, & in tubo pedali firmato inclusam; quæ refractæ in ipsis diuersis crystallinis superficiebus, appellunt ad exiguum tubi foramen, & inde ad spectantis oculum foramini illi applicatum, repræsentántque ad stuporem & admirationem iucundam, alterius faciei simulachrum, ex partibus aliorum in plano vultuum depictorum: ita vt hæc noua imago diuersa ab alijs obiectis in plano formatis, aliquid earum omnium contineat, & ab ipsis in summa efformetur.

Tu es illa imago, quam per partes Aui Tui delinearunt. Nauferus enim Dapifer primus artem militarem professus est sub Otgerto Duce misso in Catalauniam ab Carolo Martello in Catalaunorum Christianorum auxilium ab Mauris oppressorum: & Arnaus Dapifer secundus sub Patre suo Naufero: & Armengolius Dapifer tertius primogenitus Arnai, sub ipso: & Otho primus qui Moncada ex electione sua primus vocari voluit, sub Armengolio fratre suo maiore, & sub Patre Arnao: Gulielmus Raymundus & Petrus Moncadæ, fratres, & filij Othonis sexti de Moncada, sub Patre Othone in Sicilia, res Martini Principis Ducisque de Monblanc, posteáque Regis Siciliæ, & Aragoniæ heredi, promouente ac stabiliente, contra rebelles in illo Siciliæ regno: Denique Ioannes secundus de Moncada militiam didicit sub Hugone de Moncada Auunculo suo in bellis Siculis & Neapolitanis. Tu verò militiæ rudimenta posuisti sub Patre Tuo Francisco secundo, qui Te ex Hispania anno 1633. in Belgium euocauit, dum summus esset regij exercitûs & classis Dunquerkanæ Præfectus: Téque voluit primo loco militem peditem esse in cohorte primaria chiliarchiæ Hispanicæ generosissimi Marchionis de Zelada è Cordubarum gente nobilissima: tum anno 1634. in equitatu, equitem manipuli equitum custodiæ Patris Tui, tum eiusdem cohortis equestris excubitorem ac vigilem, sub Centurione Iosepho de Sorriuas nobili ac strenuo Catalauno, Ordinisque sancti Iacobi Equite torquato: tum demum anno 1635. alterius turmæ equitum, centum quinquaginta cataphractorum Ducem. Præterea in omnibus bellicis facinoribus & actis Patris Tui sub vexillis Regijs adfuisti, quæ numero 34. summatim exposuimus; demptâ interceptione Schenckij, eò quòd Disthemij recuperati à Patre, decumberes crure fracto, ob equi licet generosi lapsum in occultum terræ hiatum, dum hostiles Hollandorum copias quadrato agmine compresso Tua cataphractorum equitum cohortis cum reliquo regio equitatu ad congressum insequereris.

Omnes maiores Tui Antecessores, ab Othone primo huius nominis, & primo Domino de Moncada, vsque ad Gulielmum Raymundum quartum, Comites suos Barcinonenses & Principes Catalauniæ sequuti sunt in bellis contra Mauros. Tum reliqui omnes ab eodem Gulielmo Raymundo quarto, ipsum comprehendendo, vsque ad Ioannem primum de Moncada, Reges suos Aragoniæ & simul Principes Catalauniæ comitati sunt, dum bella gererent vel contra Mauros, vel contra hostes exteros, vel negotia tractarent ardua. E reliquis verò Gasto tertius, & eius frater Hugo de Moncada, & Pater Tuus, Regibus suis inseruierunt absentibus magna cum approbatione. Tu verò Regem tuum Philippum quartum, dum esses iuuenis in reditu à Belgio, comitatus es in expugnatione Vrbium, Montionis primum, tum Illerda, quas armis occupauerant Galli: & anteà pro recuperatione Salsulæ arcis, in Comitatu Rossilionensi chiliarchiam militum lectissimorum è Tuis clientibus conuocaueras, & pro libertate illius Comitatus & Regis honore illuc deduxeras.

Paucissimis exceptis, Moncadæ omnes fuère copiarum militarium ductores, vel contra fidei Christianæ hostes, vel contra rebelles Principibus suis, vel contra eorum aduersarios: quos vel fregerunt, vel refrænarunt. Tu in Callætia regno Gubernator Lusitanos rebelles castello in faucibus & aditu Vallis Montis-regij à Te magni animi fortitudine ac diligentiâ excitato, eorum excursiones in illam Vallem & Comitatum, Regnumq́ ipsum interclusisti ac impetum refrænasti.

Moncadarum multi Pyratas in mari & hostes debellarunt. Tu Regis potestate Callæcos hyemis tempore pacato contra Lusitanos, animasti ad naues hostium in Oceano intercipiendas; feliciterque Tibi successit: duæ enim post cruentum conflictum captæ fuerunt; Prima Hollandorum onerata mercibus & annona, quam in Lusitaniam comportabant: Altera ex Indijs orientalibus Lusitana rediens, cum innumeris Regnorum Angolæ & Guineæ mancipijs, & pretiosis Indiæ gazis, & ebore: Atque ita otium in continenti solitum hyeme sæuiente transfigi, otij impatiens in bellum nauale conuertisti.

Matthæus Florimundus primus & Petrus tertius Moncadæ, ditiones omnes suas ac dignitates exposuerunt manifestæ publicationi, Regem Iacobum secundum Aragoniæ defendendo, contra rebelles, quorum caput erat Princeps filius, si superuixisset Patri Regi senectute confecto. Tu in rebellione Catalauniæ, quia constans in fidelitate Regi Tuo Philippo quarto permansisti, ditionibus omnibus & vrbibus & oppidis in ea Prouincia, ad numerum centum & vnius priuatus es ab ipsis rebellibus.

Innumeri Prædecessores Tui Proreges ab Regibus ac Principibus suis fuerunt constituti. Tu ab Philippo quarto Prorex in Catalaunia creatus, & armorum suorum & exercitus sui summus Præfectus declaratus.

Pater Tuus Franciscus secundus antequam publicis Legationibus diuersis, & exercitibus præficeretur, libros conscripsit diuersos, quorum mentionem fecimus num. 34. Tu in armorum exercitio, vt Iulius Cæsar commentarios militiæ præclaros magna eruditione refertos, & historijs exornatos, & rebus politicis plenos elaborasti, & librum de militia emendanda in Hispanijs superiore anno dedisti in lucem, ex quo veluti ex vngue, Leo Tuus militaris breui edendus colligi poterit.

Aui Tui antiquiores & recentiores multi, & Pater Tuus Te excedunt, quòd in varijs Legationibus fuerint ab Regibus suis exercitati, vel vulnerati ab hostibus, vel interempti, vel in ipsis exercitibus diem extremum clauserint. Sed imprimis nemo de Tuo ingenti animo parato ad vulnera, & mortem pro Regibus Tuis oppetiendi, dubitabit; quandoquidem periculis manifestis Te sæpius exposueris & agnoscant omnes Tuam prudentiam, quâ Reges successu temporis absque dubio vsuri sunt in Legationibus.

Pater Tuus Bredam in Belgio Hollandorum obsidione, & Louanium altera obsidione Hollandorum simul & Gallorum liberauit. Tu Illerdam acerrimè à Gallis obsessam & impugnatam ab Principe Condæo, & forti animo ab Hispanis defensam, & præ-

sertim

sertim ab Gregorio de Britto Nobili fidelique Lusitano propugnatam, liberasti, & Regi asseruisti: in qua obsidione permulta inter illum Principem ac Te Proregem transacta sunt, seclusis Regum iuribus, vrbanitatis varia officia, & militaria munera: fortè quia Te Regis sui Christianissimi consanguineum nouerat; Tu verò eum vti Primum sanguinis Regij Principem, veneratione omni & obsequio dignissimum; vel quia Auunculus eius Antonius Borbonius Nauarræ Rex, Michaelem de Moncada comprehensum ab Nobili Gallo in sancti Quintini conflictu, liberum dimitti ab Rege Henrico secundo sine redemptione militari consueta procurauerit.

Ille idem Michael de Moncada, filius Ioannis primi de Moncada, de quibus egimus numero 30. deuotissimus erga Deiparam Virginem, Serenissimo D. Ioanni de Austria suaserat votum Diuæ Virgini Remediorum facere, quæ colitur Valentiæ, pro felici successu pugnæ naualis in freto Lepantico, & victoria reportanda. Tu pro libertate Illerdæ vrbis obsessæ ab Condæo Principe, votum emisisti Diuæ Virgini Remediorum, quæ in Templo Religiosorum Mercenariorum in summa veneratione est Matriti, & persoluisti: illud erat octingentorum aureorum nummorum; Tuum fuit, duo Angelorum ex puro argento statuæ, pretij aureorum nummorum mille, quæ hodie in altari Diuæ Virginis, conspiciuntur, Tuo nomine subscripto ac cælato ad perpetuam Tuæ in Deiparam Virginem deuotionis & confidentiæ in aduersis memoriam.

Auus Tuus Gasto tertius, & Pater Tuus Franciscus secundus decorati sunt claue aurea cubiculi Regij, & in numerum Nobilissimorum Cubiculariorum Regiorum selecti. Ille ab Philippo tertio, hic & Tu etiam ab Philippo quarto.

Iidem duo, Auus & Pater te excedunt, quod ex consilijs status ac belli fuerint; ille sub Philippo secundo, hic sub Philippo quarto, quæ prærogatiua successu temporis ad Te spectabit, quando Te Rex in grauioribus Regnorum suorum negotiis & exterorum Principum exercuerit: Tu enim ingenio es perspicacissimo & attentissimo ad res magnas bene tractandas, & facunditate naturali dotatus à natura, & comitate ingenua omnes tibi deuincis, & grauitate sine fastu ad Tui venerationem detines: quæ omnia requiruntur ad magis ardua periculosáque negotia cum exteris cognoscenda, vel tractanda, vel consequenda.

Maiores Tui plurimas nobilésque ditiones possederunt, ac dignitates maximas. Tu hodie ditiones illas omnes; nam in Catalaunia centum & vnam vel vrbes, vel oppida possides, in regno Aragoniæ quinquaginta, in Regno Valentiæ duodecim; quæ numerum efficiunt 163. Mitto mentionem facere Comitatuum Vrgellitani & Ampuriarum, tum vrbium Vicquensis ac Tortosæ, & Maioricæ, & Insularum Minoricæ & Ibisæ, & Arcus Peniscolæ; quæ omnia ab Regibus, alijs dominijs redempta sunt; vel ad ipsos Reges rediere, defectu successorum directorum; vti fidem præstant Historiæ. Quoad Senescalci dignitatem attinet in Catalaunia & Aragonia, eam ampliori titulo vt Pater Tuus retines: nam Rex Philippus quartus Patrem Tuum solebat compendiosiùs vocare Magnum Aragoniæ Regnorum Senescalcum, Téque solet etiamnum sic interpellare; intelligens eum ac Te Senescalcum in Catalaunia, & in Aragonia esse; voluitque Magni nomen præponere honoris ergo ac beneuolentiæ. Tu etiam retines Quæstoris supremi Regiarum rationum in Catalaunia dignitatem, quam Franciscus primus, Gasto tertius & Franciscus secundus Moncada; Abauus, Auus, & Pater ab Regibus concessam possidebant.

Verùm vnâ prærogatiuâ exeedis maiores Tuos omnes, quam Magnus Rex Philippus quartus Tibi contulit ob omnium Antecessorum Tuorum, & præsertim Patris Tui merita, Hispaniarum TE MAGNATEM *(Hispani vocant suâ linguâ* GRANDE DE ESPAGNA*) renuntiando sub titulo Marchionis de Aytona & amplissima priuilegia eorum, qui de numero illorum Magnatum sunt, Tibi conferendo: quæ dignitas post Infantes suprema censetur & appetitur in Hispania.*

Hæc

Hæc omnia de Tuis Maioribus Moncadis, ac de Te recensita, nimis multa Lectores iudicabunt, si Epistolæ dedicatoriæ præscripta respiciant; nimiùm verò pauca si Moncadarum Tuorum, Tuáque propria merita, & meum in eos & præsertim in Te affectum spectent: quæ panegyrim longiorem & eloquentiorem stylum, imò historiam nobilem requirerent. Fateor tamen ingenuè me in quantum potui temperasse stylum, & habenas longioris narrationis retinuisse: verùm affirmo me omnia ex probatis citatis auctoribus, & codicibus Tabulariorum Barcinonensis & Serossij, in quibus asseruantur, decerpsisse, & fideliter retulisse. Quæ omnia & Commentarium hunc meum in primos Appollonij Pergæi Conicorum libros, gratitudinis ergo & obseruantiæ offero

TVÆ EXCELLENTIÆ

Studiosissimus & obstrictissimus seruus
CLAVDIVS RICHARDVS
è Societate IESV Sacerdos.

FACVLTAS REVERENDI PATRIS VICE-PROVINCIALIS SOCIETATIS IESV, IN PROVINCIA TOLETANA.



EGO Franciſcus de Cepeda Societatis IESV in Prouincia Toletana Præpoſitus Vice-Prouincialis, poteſtate ad id mihi facta à Reuerendo Patre noſtro Vincentio Caraffa Præpoſito Generali, facultatem facio, vt COMMENTARIVS IN QVATVOR PRIMOS CONICORVM APOLLONII PERGÆI LIBROS, tum etiam alij quatuor Libri Sectionum Conicarum, in quibus ſupplentur quatuor poſtremi Libri eiuſdem Apollonij, quintus, ſextus, ſeptimus & octauus; Auctore Patre CLAVDIO RICHARDO noſtræ Societatis, & eiuſdem Societatis grauium Doctorum iudicio approbatus; typis mandetur. In quorum fidem has litteras manu noſtra ſubſcriptas, & ſigillo noſtro munitas dedimus, Matriti in noſtro Collegio Imperiali, die duodecima Iunij, Anno M. DC. XLVI.

FRANCISCVS DE CEPEDA.

APPROBATIO.

T*Ractatus hic Geometricus* R.P.CLAVDII RICHARDI *è Societate IESV, cùm nihil contineat fidei aut bonis moribus contrarium, & Geometriæ illustrandæ non parum deseruiat, lucem meritò aspiciet. Datum Antuerpiæ 27. Ianuarij M. DC. XLV.*

GVIL. BOLOGNINO S. Th. L.
Eccl. Cath. Canon. & librorum
Censor.

SVMMA PRIVILEGII.



HILIPPVS IV. Hispaniarum & Indiarum Rex Catholicus ac potentissimus Belgarum & Burgundionum Princeps diplomate sanxit ne quis præter *Hieronymi Verdussij* voluntatem Opera Mathematica *R. P. Claudij Richardi* Societatis IESV, vllo modo imprimat, aut alibi terrarum impressa in has inferioris Germaniæ ditiones importet vænaliave habeat. Qui secus faxit, confiscatione librorum & aliâ graui pœnâ mulctabitur, vti latiùs patet in litteris datis Bruxellæ 24. Decemb. 1643.

Signat

STEENHVYSE

ADMONITIO
AD
LECTOREM
GEOMETRIÆ STVDIOSVM.

DE Authoribus Scriptoribusque Conicorum; tùm editionibus, commentarijs & versionibus Conicorum Apollonij Pergæi; tùm de intento & scribendi ratione in hoc nostro commentario in quatuor primos huius Authoris libros, sectiones sequentes accipite beneuoli Geometriæ Studiosi.

Sectio I. continens Antiquorum authoritates quibus nituntur multa in sequentibus sectionibus proferenda.

DE Eudoxo & Conone, ex Archimedis epistola ad Dositheum præfixa libro suo 1. de Sphæra & cylindro, hæc habemus. *Demonstrata plurima fuerunt eorum quæ ab Eudoxo circa solida contemplata sunt: veluti quòd omnis Pyramis tertia pars sit prismatis basim habentis eandem cum pyramide, paremque altitudinem: Et quòd omnis conus tertia pars sit Cylindri basim eandem habentis cum cono, & eandem altitudinem. Hæc etenim naturâ præexistentia in his figuris, non vni duntaxat, sed multis qui ab Eudoxo extiterunt præstantibus Geometris nouisse contigit. Licebit verò ijs qui potuerint eadem diligentiùs scrutari. Tum debemus Conone viuente ipsa emittere in vulgus. Hunc enim accepimus talia potissimùm posse deprehendere, & ipsis accommodatam proferre demonstrationem.*

De Conone, ex epistola Archimedis ad Dositheum, præmissa libro suo 2. de Sphæra & cylindro. *Antea quidem mihi mandasti scriberem eorum problematum demonstrationem, quæ priùs ipse proposueram Cononi.* Inter quæ post pauca istud refert his verbis: *Præterea quod omne segmentum solidum*, (supple Sphæræ) *æquale sit Cono basim habenti circulum æqualem superficiei portionis sphæræ, quæ segmento continetur, altitudinem verò æqualem radio sphæræ.*

De Conone ex eodem Archimede in epistola sua ad Dositheum, initio libri de Spiralibus. *In ijs quæ ad Cononem missa sunt theorematibus, eorum quidem quorum à me flagitabas assiduè demonstrationes multorum ab Hercule latas conscriptas habes; nonnullas rursus eorumdem in hoc libro ad te scriptas mitto. Ne mireris verò si longum tempus consumpserimus antequam horum demonstrationes dederimus: hoc enim contigit quod cupiuerim priusquam eas darem, & ipsis inquirere eos qui in mathematicis exercitati sunt. Quot enim in Geometria theoremata visa primum impossibilia, tempore perfectionem capiunt? Conon quidem non sufficiens*

** tempus

tempus sortitus in eorum disquisitione, vitam cum morte commutauit, & ea dubia reliquit: quamquam omnia inuenerat, vt & alia multa, quibus plurimum Geometriam adauxit. Scimus quippè in illo fuisse non vulgarem Mathematicarum artium peritiam, laborisque supra modum tolerantiam. Post obitum verò Cononis multi exacti sunt anni, quibus à nemine, quod nouerimus, vllum sit horum problematum tentatum. Volo autem eorum singula persequi. Etenim contigit duo quædam eorum quæ apud Cononem erant, hoc libro inserta, fuisse finem tandem consequutura: vt qui prædicant omnia se inuenire, demonstrationem verò eorum nullam proferentes, sophisticè agunt, ea aliquando spondere videantur reperisse quæ sunt impossibilia.

Adhuc de Conone ex Archimedis libro suo de quadratura Parabolæ, ad Dositheum scribens. *Cùm audiissem defunctum esse Cononem qui nobis reliquus erat in amicitia, tibique admodum fuerat familiaris, putà in Geometria maximè versatus; virum quidem mortuum amarè planxi, vt amicissimum, & hominem in Mathematicis planè mirabilem. Atque tunc repentè statui mittere ad te, sicuti antea ad Cononem solebam, Geometricum theorema, quod nemo quidem prius est contemplatus: nunc verò à nobis ostenditur mechanicè quidem primò inuentum, deinceps & Geometricè demonstratum. Nonnulli ante nos qui Geometriam tractare mouerant, conati sunt scribere quomodo possibile esset circulo vel circuli segmento dato, inuenire æquale rectilineum: & postea tentarunt quadrare spatium sub totius coni sectione & recta linea comprehensum; incertæ fidei lemmata assumentes, quæque à multis non inuenta, damnata sunt. Cæterùm qui statuerit quadrare portionem rectanguli coni sectione comprehensam, neminem scimus* (hoc est Parabolam.) *Hoc verò à nobis iam tandem inuenitur.* &c.

En Apollonij ipsius Pergæi Epistolam ad Eudæmum primam, præpositam primo libro suo Conicorum. *Apollonius Eudemo S. D. Si & corpore vales, & aliæ res ex animi tui sententiâ se habent, bene est; nos quidem satis bellè habemus. Quo tempore tecum Pergami fui, animaduerti te cupidum esse intelligendi conica quæ à nobis scripta sunt. Itaque misi ad te primum librum emendatum, reliquos deinceps missurus cùm animo ero tranquilliori: non enim arbitror te oblitum quod à me accepisti, quid scilicet causæ fuerit, cur ego hæc scribere aggressus sim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriam veniens apud nos fuit; & cur nos cùm de illis octo libris egissemus, maiorem statim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipse Naucrates quamprimum esset nauigaturus, nos ea non emendauimus, sed quæcumque sese nobis obtulerunt conscripsimus, vtpote qui ea postremo essemus percursuri; Quamobrem nunc tempus nacti; vt quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex ijs qui nobiscum fuerant habuisse primum & secundum librum antequàm emendaretur, noli mirari si in quædam incidas quæ aliter se habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi huius disciplinæ continent elementa: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum & earum quæ oppositæ dicuntur; itemque principalia ipsarum accidentia, à nobis vberius & vniuersalius quàm ab alijs qui ea de re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad illas lineas quæ cum sectione non conueniunt; tùm de alijs differit, quæ & gene-*

generalem & necessariam vtilitatem ad determinationes afferunt: quas autem vocem diametros, & quos axes, ex hoc libro cognosces. Tertius liber continet multa & admirabilia theoremata, quæ vtilia erunt & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima & noua sunt. Hæc nos perpendentes, animaduertimus non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas; verùm ipsius tantummodò particulam quandam; atque hanc non satis fœliciter: non enim fieri poterat, vt ea compositio rectè perficeretur absque ijs quæ à nobis inuenta sunt. Quartus liber tradit quot modis conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ occurrere possint; & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab ijs qui ante nos fuerunt memoriæ proditum est: coni sectio & circuli circumferentia & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Quintus enim de minimis & maximis magna ex parte agit. Sextus de æqualibus, & similibus coni sectionibus. Septimus continet theoremata quæ determinandi vim habent. Octauus problemata conica determinata. At verò in omnibus his editis, licet vnicuique qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia iudicare. Vale. In hac epistola sua Apollonius argumenta suorum librorum octo de conicis sectionibus disertè proponit, & ea quæ inuenit propria in vniuersum declarat. Consulenda etiam epistola Apollonij ad eumdem Eudemum initio libri sui secundi; & alia ad Attalum initio libri sui quarti: quas in argumentis nostris ad illos libros inserendas iudicauimus.

Audiamus Pappum Alexandrinum in procemio ad librum septimum mathematicarum collectionum suarum differentem de Apollonij conicis; eiusque iudicium de Apollonio circa hos libros; & honorificè loquentem *de Euclide & Aristæo; & iratum Apollonio, quod locum circa tres vel quatuor lineas minimè perfectum esse dixerit ab Euclide. Euclidis libros quatuor Conicorum cùm Apollonius expleuisset, ac quatuor alios adiunxisset, octo conicorum libros confecit. Aristæus autem qui scribit ea quæ ad hoc vsque tempus tradita sunt, solidorum libros quinque, conicis cohærentes vocauit. Et qui ante Apollonium fuerunt, trium conicarum linearum vnam quidem coni acutanguli alteram rectanguli; tertiam verò obtusanguli coni sectionem appellarunt. Quoniam autem in vnoquoque horum trium conorum differenter sectorum tres lineæ fiunt; dubitans vt apparet Apollonius, cur nam qui ante se hanc tractationem expleuerant, vnam quidem acutanguli coni sectionem vocauerint, quæ potest & rectanguli & obtusanguli coni esse; alteram rectanguli, quæ potest in acutangulo & obtusangulo cono reperiri; tertiam verò obtusanguli, quæ & in acutangulo & rectangulo cono inesse potest; mutatis nominibus, quæ quidem acutanguli sectio nominatur, Ellipsim appellat; quæ rectanguli Parabolen; quæ verò obtusanguli Hyperbolen; vnicuique ab aliquo proprio accidente nomen imponens: spatium enim quoddam ad lineam quampiam comparatum in acutanguli coni sectione deficiens fit quadrato; in obtusanguli coni sectione, quadrato excedens; in rectanguli verò coni sectione, neque deficiens, neque excedens. Hoc autem illi accidit, quod*

non

non considerauit, iuxta vnum duntaxat casum plani cõnum secantis, & tres lineas gignentis, in vnoquoque conorum aliam, neque aliam fieri lineam, quam à coni proprietate nominarunt: si enim secans planum ducatur vni laterum coni æquidistans, vna tantùm ex tribus lineis efficitur semper eadem, quam Aristæus illius coni sectionem appellauit. Apollonius igitur quæ continent ab ipso conscripti conicorum octo libri dicit summatim colligens in proœmio libri primi, hoc modo. Continet autem primus liber generationes trium coni sectionum, & earum quæ oppositæ dicuntur; itemque principalia ipsarum accidentia à nobis & vberius & vniuersalius quàm ab alijs qui ea de re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad lineas illas quæ cum sectione non conueniunt, quæ à Græcis ἀσύμπτωτοι appellantur; tùm de alijs differit, quæ & generalem & necessariam vtilitatem ad determinationes afferunt: quas autem vocem diametros, & quos axes, ex hoc libro cognosces. Tertius liber continet multa & admirabilia theoremata, quæ vtilia erunt & ad solidorum locorum compositiones & ad determinationes, quorum complura & pulcherrima & noua sunt. Hæc nos perpendentes animaduertimus non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas, verùm ipsius tantùm particulam quandam; atque hanc non satis fœliciter: non enim fieri poterat, vt ea compositio rectè perficeretur absque ijs quæ à nobis inuenta sunt. Quartus liber tradit quot modis conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ occurrere possint; & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab ijs qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum est; coni sectio & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Quintus enim de minimis & maximis magna ex parte agit. Sextus de æqualibus & similibus coni sectionibus. Septimus continet theoremata quæ determinandi vim habent. Octauus problemata conica determinata. Et hæc quidẽ Apollonius. Quẽ autem dicit in tertio libro locũ ad tres & quatuor lineas ab Euclide perfectũ non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paululũ quid addere ijs quæ Euclides scripsit, per ea tantũ conica quæ vsque ad Euclidis tẽpora præmonstrata sunt, vt etiam ipse testatur dicens, fieri non posse vt locus perficeretur absq; ijs quæ ipse scribere coactus sit. Euclides autẽ secutus Aristæũ scriptorem luculentũ in ijs quæ de conicis tradiderat, neq; anteuertẽs, neq; volens eorũ tractationem destruere, cùm mitissimus esset, & benignus erga omnes, præsertim eos qui mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere & amplificare possent, vt par est, & nullo modo infensus sed accuratus, nõ arrogans velut hic, quantũ ostendi potuit de loco per eius conica memoriæ prodidit; nõ addẽs perfectum illud absolutumq; esse: tunc enim necessariò reprehendi posset. Nunc verò haudquaquã illud faciẽdum est; siquidem & ipse in conicis pleraq; imperfecta relinquens, non satis ea valet tueri. Adijcere autem loco quæ deerant facile potuit, animo comprehendens ea quæ ab Euclide de loco scripta fuerant. Et dans operam Euclidis discipulis Alexandriæ lõgo tempore, ex quo adeò excellentem in mathematicis habitum est assecutus, neque vsquam deceptus est. At locus ad tres & quatuor lineas, in quo magnificè se iactat & ostentat, nulla habita gratia ei qui priùs scripserat, est huiusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis ab vno & eodem puncto ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data sit proportio rectan-

rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ; punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit: similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus ostensus est. Quod si ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantùm dictas: quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, & quæ manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse: Propositiones autem ipsarum hæ sunt. &c. quas hîc non exscribo cùm non faciant ad Apollonij nostri conica. Subiungo autem quæ habet Pappus in fine proœmij sui citati, de numero propositionum Apollonij & lemmatum in suis omnibus libris conicorum. *Itaque habent omnes libri conicorum Apollonij, theoremata vel diagrammata quadringenta octoginta septem; lemmata verò quæ in ipsa sunt, nonaginta.*

Quæ obscurè dicta sunt à Pappo Alexandrino circa conicas sectiones vniuersaliùs deprehensas in omni cono, ab Apollonio, quàm ab antiquis; Geminus apud Eutocium Ascalonitam initio commentarij sui in Apollonij conicorum primos quatuor libros, distinctè explicat, & honorificum honoris titulum Apollonio ab Geometris coætaneis datum commemorat. Ita verò loquitur Eutocius epistola sua ad Anthemium, in qua Heraclium refutat accusantem Apollonium, quod conica sua Archimedi surripuerit. *Apollonius Geometra, Anthemi sodalis charissime; natus est Pergæ, quæ Pamphiliæ ciuitas est; tempore Ptolemæi Euergetæ, vt tradit Heraclius in Archimedis vita; qui etiam scribit Archimedem quidem primum conica theoremata fuisse aggressum, Apollonium verò cùm ea inuenisset ab Archimede nondum edita, sicut propria sua edidisse: neque id verè, vt mea fert opinio; nam & Archimedes multis in locis velut antiquioris conicorum institutionis mentionem facere videtur; & Apollonius ea scribit, non vt à seipso inuenta: non enim dixisset vberiùs & vniuersaliùs hæc à se, quàm ab alijs tractata fuisse. Sed quod scribit Geminus verum est. Antiqui, inquit, Conum definientes, rectanguli coni circumuolutionem manente vno eorum quæ circa rectum angulum sunt latere; & conos omnes rectos, & vnam in singulis sectionem fieri arbitrati sunt: in rectangulo quidem cono, vocatam Parabolen; in obtusangulo, Hyperbolen; in acutangulo autem, Ellipsim: atque ita nominatas apud ipsos sectiones passim inuenias. Quemadmodum igitur Antiquis illis in vnaquaque triangulorum specie contemplantibus duos rectos, primùm in æquilatero, deinde in æquicruri, postea in scaleno; ætate posteriores vniuersale theorema demonstrarunt eiusmodi, Omnis trianguli interiores tres anguli, duobus rectis sunt æquales. Ita & in coni sectionibus: rectanguli quidem coni sectionem dictam, in rectangulo tantùm cono contemplati sunt; secto scilicet plano ad vnū coni latus recto; obtusanguli autē coni sectionem in cono obtusangulo factam demonstrarunt: & acutanguli sectionē in cono acutangulo: similiter in omnibus conis ducentes plana ad vnum corū latus recta; quod & antiqua sectionū nomina indicant. Verùm postea Apollonius Pergæus*

vniuersè inspexit in omni cono tam recto quàm Scaleno omnes sectiones inesse, iuxtà plani ad conum differentem inclinationem. Quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonstrationem, magnum Geometram appellarunt. Hæc quidem Geminus in sexto mathematicarum præceptionum libro scripta reliquit.

Sectio II. Quinam ex antiquis ante Apollonium conica tractarint.

MVltos ex antiquis reperio qui ante Apollonium Conica contemplati sunt; Aristæum Geometram, Eudoxum Gnidium, Menæchmum Eudoxi huius discipulum, Euclidem, Cononem, Trasideum, Nicotelem, Archimedem, & Dositheum. Quinam verò primus conicas contemplationes sit aggressus, definiendum relinquo Chronographis: & solùm refutandus Heraclius qui primum facit Authorem theorematum Conicorum Archimedem, ex ipsomet Archimede, qui locis superiùs adductis Eudoxum antiquiorem, & Cononem seniorem se, conica tractasse fatetur: & ex Pappo Alexandrino liquet Euclidem vestigijs Aristæi Geometræ insistendo quatuor conicorum libros edidisse: hos verò duos Authores ne Heraclius quidem in vita Archimedis coætaneos illius, ne dicam recentiores illo facit.

Sectio III. Quinam ex antiquis tempore Apollonij Pergæi vel postmodùm Conica tractarint, vel intellexerint.

COnica intellexisse Naucratem Apollonius fatetur in epistola sua prima ad Eudemum; vtpote cuius rogatu animum ad Conica conscribenda applicuerit: Tum Philonidam, quem dignum iudicabat cui sua conica communicaret Eudemus: Denique Eudemum & Attalum ad quos cònicorum suorum tractationem perlegendam mittebat. Quis enim huiusmodi tractatus & libros de conicis ad ignaros huius materiæ destinaret? Atque hi quatuor sint Apollonij tempore contemplationum conicarum periti, Naucrates, Philonida, Eudemus, Attalus.

Postmodùm verò ab Apollonio, Serenus Antinsensis libro vno sectionem coni factam ab plano per verticem eius acto diligenter contemplatur, & multas eius affectiones demonstrat. Et libro alio de sectione cylindri, primus ostendit sectionem coni Ellipticam in cylindri sectione reperiri; definitionesque varias ex Apollonio, diametrorum & axium curuarum linearum, rectarumque linearum ordinatim dictis diametris vel axibus applicatarum, desumpsisse fatetur. Huius verò Authoris libros duos peculiari nostro commentario illustratos asseruamus, in lucem prodituros. Post Serenum repono Cyrum cui vti intelligenti Serenus ipse cylindrica sua & conica dedicauit, proposuitque euoluenda.

uenda. Ab his annumero Pappum Alexandrinum, qui in libro septimo mathematicarum suarum collectionum, inter lemmata sua quæ in omnes libros conicorum Apollonij composuit, excepto quarto, multa sunt conica; videlicet primum, secundum ac tertium, ad librum 1. tùm secundum, tertium & quintum, ad librum 5. Præterea cùm ageret de locis ad superficiem in eodem lib. 7. cit. lemmata, primum, tertium, quartum & quintum, conica proponit. Denique libro 8. problemata nonum ac decimum exhibet de conicis sectionibus. Vltimum locum occupabit Eutocius Ascalonita qui egregium in quatuor libros primos Apollonij Conicorum Anthemo sodali etiam in Conicis perito conscripsit.

Sectio IV. Quot libros Apollonius Pergæus de Conis ediderit, & an extent hodie omnes.

EX ipsomet Apollonio epistola ad Eudemum prima; Pappo Alexandrino lib. 7. math. coll. & Eutocio ad Anthemum; constat octo libros conicorum Apollonium posteritati reliquisse: quos omnes euoluerunt Pappus & Eutocius; nam primus lemmata diuersa in eos præmisit lib. cit. Alter verò Anthemo pollicebatur ad finem commentarij sui in quartum librum, se commentarium etiam in reliquos quatuor postremos libros euulgaturum.

An verò etiam nunc extent hi omnes libri octo Apollonij, hæc habeo dicere. Imprimis certum esse quatuor primos ad hæc nostra tempora peruenisse, in quos commentarium hunc proponimus; reliquorum verò quatuor posteriorum memoriam nullam esse: nam multi magna authoritate præditi operam omnem ac diligentiam in eis conquirendis frustrà adhibuerunt. Inter nonnullos peruagatur rumor & suspicio hos præ manibus habuisse Reuerendissimum Abbatem Messanensem, Franciscum Maurolycum, ordinis Sancti Benedicti, virum in mathematicis præcellentem; eosdemque asseruari Messanæ ab hæredibus suis: fundantur in eo quod catalogus elucubrationum suarum omnium, & manuscriptorum, Venetijs impressus, proponat hæc duo, Primum, Apollonij conica elementa libris quatuor & demonstrationibus & lineamentis opportunis instaurata. Alterum, Quintum & sextum libros conicorum post quatuor Apollonij libros reponendos. Sed vir tantus reliquos hos quatuor libros Apollonij postremos sub nomine Apollonij sincerè euulgasset, sicuti edidit tres Theodosij Sphæricorum libros, tresque alios triangulorum Sphæricorum Menelai; non autem dixisset quintum & sextum conicorum post quatuor Apollonij primos reponendos. Quoad primum attinet, titulum ei apposuisset octo conicorum Apollonij libri, quatuor libris proprijs instaurati; non autem Apollonij conica elementa libris quatuor & demonstrationibus & lineamentis opportunis instaurata. Ingenuè fateor me diligentiam omnem adhibuisse in conqui-

rendis his libris Maurolyci, quibus libenter vsus essem in hoc commentario, & libris quatuor nostris iuxta reliquorum quatuor Apollonij postremorum argumenta conscriptis.

Sectio V. An omnia quæ Apollonius de Conis proposuit sint ipsius, vel antiquiorum; & quænam sint propria ipsius.

QVandoquidem ipse Apollonius Eudemo fatetur sectiones conicas ab se vberiùs & vniuersaliùs quàm ab alijs qui ea de re scripserunt elaboratas; tertiumque librum suum continere theoremata complura pulcherrima & noua; & Attalo scribens demortuo Eudemo, se ab nullo demonstratum reperisse quot modis circuli circumferentia sectionibus conicis occurrere posit; neque vlli vnquam venisse in mentem quot etiam modis sectiones conicæ & circulus & sectiones oppositæ sectionibus alijs oppositis occurrant, quæ tamen in quarto suo libro determinat: Et quia etiam ex Gemino in sexto præceptionum mathematicarum libro apud Eutocium, conicas sectiones non solùm in omni cono recto, sed etiam in cono scaleno reperit, quas antiquiores se in conis, solùm rectis particularibus singulas obseruauerant. Ea propter asserere possumus multa habere Apollonium ex antiquioribus Aristæo, Eudoxo, Menechmo, Euclide, Conone, Trasideo, Nicotele, Archimede; & multa præterea superaddidisse circa conum rectum, & scalenum, & occursum sectionum conicarum & circuli sectionibus oppositis, in singulis suis conicorum primis quatuor libris, & sine dubio in reliquis quatuor postremis.

Sectio VI. Quid contra Apollonij conica dictum reperiatur ab antiquis.

APud Eutocium Heraclius scribit Archimedem primum conica theoremata fuisse aggressum, Apollonium verò cùm ea inuenisset ab Archimede nondum edita, sicut propria sua edidisse.

Pappus Alexandrinus primùm ægrè fert Apollonij censuram in Euclidem circa locum ad tres vel quatuor lineas ab eo minimè perfectum: tùm iactantiam Apollonij reprehendit, eo quod sine inuentis suis circa conica locum illum perfici non posse asseruerit, non addens perfectum illum absolutumque esse abs se. Denique ait ipsum in conicis pleraque imperfecta reliquisse; ideoque quædam non satis posse tuta esse. Miror Pappum iam commotum in Apollonium & in antiquorum scriptis versatissimum, non adduxisse grauiorem inustam Cononi notam, viroque etiam Archimedi suspiciendo, quam illi inussit in epistola sua ad Attalum, accusans eum minimè in demonstrationibus versatum esse.

Sectio

Sectio VII. Defenditur Apollonius contra Heraclium & Pappum & alios.

EVtocius Heraclij accusationi abundè satisfecit, his verbis, *neque id verè, vt mea fert opinio: nam Archimedes multis in locis, velut antiquioris conicorum institutionis mentionem facere videtur; & Apollonius ea quæ scribit, non vt à se ipso inuenta: non enim dixisset vberiùs & vniuersaliùs hæc à se quàm ab alijs tractata fuisse.* Quod si vera esset accusatio Heraclij, an non Pappus Apollonium de plagio conuixisset? & plagiarium iure appellasset?

Quod verò Apollonius dixerit Euclidem minimè perfecisse locum ad tres vel quatuor lineas, & posse ex suis circa conica inuentis perfici: quis non videat leue esse peccatum, leuemque iactantiam. Quotus enim quisque est etiam doctissimus, qui non imperfecta multa relinquat, & ex suis proprijs inuentis aliorum conatus ad exitum perduci posse aliquando non æstimet: quandoquidem ex trito effato facile sit inuentis addere; aut addenda existimare. Sed esto; Apollonius locum illum non perfecerit: in eadem naui est atque Euclides. Esto etiam, locus ille ab suis conicis perfectionem consequi non possit; (quod tamen à nemine est demonstratum) in hoc dabimus Apollonium fuisse deceptum; sicuti antiquiores se, præstantissimos Geometras, inter quos Euclides ipse annumeratur, qui Parabolen in rectangulo solùm cono, Ellipsim in acutangulo, Hyperbolen in obtusangulo reperiri censebant: & sic iterum pares erunt in aliqua deceptione Apollonius & Euclides. Temperare igitur poterat animum Pappus in Apollonium, & Euclidem, æquamque lancem inter illos duos summos viros in Geometricis sustinere. Decebat denique imprimis Pappum propositiones Apollonij minus tutas prodere; quarum nulla hactenus inuenta est huiusmodi ab tot tamque peritis in Geometria viris.

Quoad censoriam Apollonij virgulam de Conone in demonstrationibus imperito, sic explicanda videtur; circa materiam solùm de qua scribebat ad Attalum, videlicet in occursu mutuo sectionum conicarum; licet in alijs eum meritò cum Archimede Geometricis suspiceret & deprædicaretur: fieri enim potest vt aliquis summus in multis, in aliqua non ita obuia materia principijs destitutus ad illam necessarijs paralogizet, & non ita sit versatus in huiusmodi demonstrationibus.

Fatendum tamen est, commendandam esse summopere Euclidis modestiam, qui Aristæi conica immutare nec carpere voluit; eamque imitari potuisse Apollonium in Euclidem, & præsertim in Cononem, tùm etiam Pappum in Apollonium nostrum. Sed neque etiam commoueri quis debet, si eius aut Amici imperfecta opera, publica præsertim, vel errores ab alio adnotentur: licet id semper maximè deceat in præcellentibus viris magna cum animi moderatione in rebus quæ nullam admittere possunt excusationem, adnotari.

 Sectio

Sectio VIII. Quinam Geometræ præstantes tempore Apollonij & post ipsum floruerint vsque ad Eutocium.

EX Apollonij epistolis ad Eudemum & Attalum, hos habemus Geometras insignes, Apollonij tempore, ipsosmet Eudemum, Attalum, tùm Naucratem & Philonidam: tùm ex Chronographis & præsertim Iosepho Blancano nostræ Societatis in sua Mathematicorum Chronologia, alios ab ipso Apollonio vsque ad Eutocium, Isidorum, Hypsiclem Alexandrinum, Philonem Bizantium, Posidonium, Serenum Antinsensem, Heronem Alexandrinum, Hipparchum, Theodosium Tripolitam, Menelaum, Diophantem Alexandrinum, Ptolemæum Alexandrinum, Porphyrium Philosophum, Nicomedem, aliumque Eudemum, aliumque Menelaum Alexandrinum, Geminum Rhodium, Dioclem, Sporum, Proclum Diadochum, Marinum Philosophum Neapolitanum, Demetrium Alexandrinum, Philonem Tyanæum, Pappum Alexandrinum, Theonem Alexandrinum, Hypatiam Theonis huius filiam, demùm Eutocium Ascalonitam.

Sectio IX. Commendatio & laus Apollonij Pergæi.

APollonij Pergæi excellentia est ea inter Geometras omnes; vt propter vniuersalem coni recti & scaleni sectionem, & inspectionem sectionum Paraboles, Ellipseos & Hyperboles in omni cono tam recto quàm scaleno, quam antiquiores se Geometræ celeberrimi Aristæus, Euclides, Conon, Nicoteles & Archimedes non aduerterant; mirificamque conicorum theorematum demonstrationem, multaque admirabilia & noua in eis inuenta: Magnus Geometra sit ab omnibus illius temporis clarissimis Geometris teste Gemino Rhodio Geometra etiam nominatissimo acclamatus: quem honoris titulum & prærogatiuam nemo tot consequentium Geometriæ Luminum tanto viro ausus est denegare.

Accedet alia commendationis Apollonij gloria ab illustribus conicorum suorum tam interpretibus quàm commentatoribus, quos in sequentibus duabus sectionibus nostris decima & vndecima producemus.

Sectio X. Quinam in Apollonij conica scripserint vel Commentarios ediderint ex antiquis.

PAppus Alexandrinus lib. 7. Mathematicarum suarum collectionum, sexaginta quinque lemmata in libros Apollonij conicorum disposuit; vndecim videlicet in librum primum; octo in secundum; quatuordecim in tertium; nulla in quartum; decem in quintum; octo

in sextum; quatuordecim in septimum & octauum.

Tùm quod admiratione multis dignum censebitur, Hypatia Theonis Alexandri filia, commentarium in Conica Apollonij scripsisse fertur, sicuti in Diophanti numeros reconditissimos.

Vltimo loco Eutocius Ascalonita, cuius commentarius in Apollonij quatuor primos Conicorum libros extat cum lemmatibus aliquot & corollarijs proprijs: quique Anthemo commentarium alium in reliquos quatuor alios libros pollicebatur.

Demiratus sum cùm inciderem in Eutocij verba ad Anthemum, in epistola sua ad lib. 3. Apollonij, quibus asserit nullum ex Geometris qui ante eum floruerint commentarium in hunc librum tertium edidisse. Quare suspicor Hypatiam Theonis filiam consequenti post Eutocium tempore vixisse, & in Apollonij conica commentarium scripsisse.

Sectio XI. Quinam ex recentioribus in Apollonij Conica, vel de Conicis sectionibus scripserint.

TRes reperio inter recentiores qui commentarium in Apollonij conica ediderint, Primum, Ioannem Baptistam Memum Patritium Venetum; Secundum, Maurolycum in sectione quarta laudatum; Tertium, Federicum Commandinum de Republica Geometrica meritissimum, qui Eutocij Commentarium in quattuor Apollonij libros primos illustriorem fecit, & notis proprijs locupletauit.

Extant etiam permulta de conicis sectionibus describendis in plano apud eos qui de Horologijs vel Panisphærijs in plano delineandis agunt; & inter hos primum obtinet locum Maurolycus in libro 2. & 3. de lineis horarijs; secundum, Guidus Vbaldus in planisphærijs proprijs; Tertium, Federicus Commandinus in suo libro de horologijs; Quartum, Christophorus Clauius noster in suo de Gnomonica libro; Quintum, Franciscus Aguillonius noster in libro suo quarto & sexto optices. Tùm alij permulti Geometræ practici & Architecti.

His addendi sunt qui doctissimè de centro grauitatis planorum & solidorum, & sectionum conicarum, aut partium eius tractarunt, inter quos est Lucas Valerius qui etiam post Archimedem de quadratura Paraboles scripsit, tùm Ioannes Carolus della Faille noster in libro suo aureo de centro grauitatis partium circuli & ellipseos.

Non prætermittendus Pater Vincentius Leautandus è Societate nostra, qui in parte secunda suorum elementorum Geometricorum Dolæ impressorum anno 1631. nonnulla habet breuiter quidem sed concinnè explicata de sectionibus conicis. Denique monitum velim Lectorem, me hunc Commentarium in quatuor primos Apollonij Pergæi libros, anno 1642. publicè Auditoribus meis Matriti prælegisse, tùm etiam sequente 1643. alios meos proprios quatuor Conicorum, in quibus iuxta

Apollonij Pergæi argumenta quatuor reliquorum suorum, quinti, sexti, septimi, & octaui deperditorum, vel eos supplebam, aut quæ in eis tradiderat diuinabam. Testor autem me nullos alios Authores de hac materia præter citatos, legisse, vel mihi innotuisse, antequam hos duos tomos absoluissem, & cum diuersis Typographis edendos tractassem. Verum fateor me postmodùm magna cum animi voluptate & admiratione, duorum clarissimorum huius æui Mathematicorum opera cum antiquis comparanda euoluisse: Et quidem anno 1644. tres Conicorum libros Claudij Middorgij Patritij Parisiensis, noua methodo ex Apollonianis fontibus petitos, & proprio ingenio apposité digestos: tùm anno 1647. duos Reuerendi Patris Gregorij à Sancto Vincentio Societatis nostræ Mathematico insigni reconditæ Geometriæ tomos, sub titulo Quadraturæ circuli; in quibus præter elementa conica peculiari ordine disposita, innumera prodit sicuti Middorgius, quæ spectant ad postremos quatuor Apollonij libros iniuriâ temporum suppressos, in lucem reuocandos: sed longè vberius noster à Sancto Vincentio, quàm Middorgius; imò ille supra vel extra Apollonij argumenta fœlicissimè peruagatur. Quid memorem Reuerendum Patrem Marinum Mersenium sacri Ordinis Sancti Francisci de Paula ornamentum, nobilemque suis in Sacram Scripturam commentarijs, & in omni disciplinarum genere versatum, qui in suis Mathematicarum Collectionibus Parisijs publico datis, curiosa multa & scitu digna profert, variosque citat Galliæ præstantes in hac materia viros.

Finem facio, ac demùm Lectorem compellor circa hunc meum Commentarium, & Conicorum quatuor alios libros meos, eisdem verbis quibus *Apollonius* Eudemum Geometram & Amicum suum, circa suos octo libros Conicos, in fine epistolæ suæ ad eumdem, alloquitur. *His omnibus editis, licet vnicuique qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia iudicare. Vale.*

Sectio XII. An & quot sint diuersæ Apollonij editiones Græcæ.

EX Apollonio ipso in epistola sua prima ad Eudemum colligo plures fuisse operum suorum conicorum editiones Græcas. Primò enim de conicis quæcumque ipsi in mentem veniebant conscripserat & Naucrati commiserat, vtpote qui ea postremò esset percursurus; tempusque & otium nactus emendauit & edidit; monetque mirum nemini esse debere, si in quædam immutata incidant.

Quot verò fuerint huiusmodi Græcæ editiones minimè constat: Eutocius tamen in prooemio suo libri 1. Conicorum Apollonij, Anthemo sodali fatetur se ex illis editionibus diuersis manifestiora collegisse: sic enim loquitur. *Cùm autem plures editiones sint, vt ipse Apollonius etiam in epistola*

Stola scribit; optimum fore iudicaui ex multis quæ occurrerunt, manifestiora colligere: in ipsius quidem verbis, vt legentibus ad hæc facilior pateret aditus; seorsim verò in Commentarijs, vt par est differentes demonstrationis modos explicare.

Sectio XIII. An Apollonius aliqua lemmata suis conicis præmiserit, & an extent; & quot propositiones sint in suis conicorum libris octo.

IN fine proœmij sui Pappus ad lib. 7. math. suarum collect. ita scribit de numero lemmatum Apollonij, & numero propositionum in omnibus suis octo libris Conicorum. *Itaque habent omnes libri Conicorum Apollonij, theoremata vel diagrammata quadringenta octuaginta septem; lemmata verò quæ in ipsa sunt nonaginta.*

Horum lemmatum nullum vestigium est apud Pappum neque apud Eutocium, nisi aliqua propria ex illo desumpserint: hoc verò, cùm summis viris repugnet, suspicari non conuenit.

An verò Pappus numerum problematum Apollonij in suis conicis omiserit, & solùm theorematum meminerit; vel sub nomine diagrammatum vniuersaliore theoremata & problemata comprehenderit, prudenti Geometrarum iudicio relinquendum videtur.

Sectio XIV. An Græca editio Apollonij conicorum ab Eutocio conscripta; & commentarius eius in eundem Apollonium Græcus, sit ipsius Apollonij, vel Eutocij, vel excerptus à multis.

ESse tam propositiones Apollonij ab Eutocio editas, quàm commentarium eius in illas, hoc est demonstrationes, tùm Apollonij, tùm Eutocij, aliorumque antiquorum post Apollonium, asserere quis potest, ex ipsius Eutocij verbis in sectione duodecima productis. Et certè reperio propositionem quartam libri secundi conicorum Apollonij, esse lemma secundum Pappi ad lib. 5. ipsius Apollonij; quam sine dubio Eutocius inserendam illi libro iudicauerit; & cur non etiam alias huiusmodi propositiones interponendas ex alijs censuerit? Venire autem in suspicionem Pappum propositionem illam quartam lib. 2. Apollonij inter lemmata sua reposuisse ad lib. 5. Apollonij, nemo prudenter potest; quandoquidem lemmata in libros alicuius Authoris distinguantur ab eiusdem propositionibus, propter quas lemmata præmittuntur; & nemo propositiones vnius libri, inter lemmata conducentia ad librum consequentem reponat, sed ijs vti præcognitis ad consequentium intelligentiam vtatur.

Sectio XV. Quot sint Latinæ versiones primorum quatuor librorum Conicorum Apollonij.

DVas solùm reperio. Primam Ioannis Baptistæ Memi Patritij Veneti, & publici Venetijs Mathematicarum Professoris, Vrbe celeberrima & doctissimorum virorum fœcundissima Parente; anno 1537. typis mandatam.

Alteram Federici Commandini Geometræ eximij, Bononiæ anno 1566. impressam.

An verò sit excussa versio Maurolyci ignoro, de qua mentionem fecimus in sectione quarta & vndecima.

Sectio XVI. In quo conueniant versiones Latinæ Memi & Commandini, & quod sit discrimen inter illas.

COnueniunt in ordine librorum quatuor Apollonij, & numero propositionum iuxta editionem Græcam Eutocij; discrepant verò in verbis: & Memi demonstrationes carent citationibus etiam primorum elementorum; qui Author figurationibus adiunxit calculum ex principijs Algebricis. Altera Commandini illustrata est citationibus proprijs, & multis lemmatibus, corollarijs & notis locupletata: sed & continet lemmata Pappi in tres primos Apollonij libros demonstrata; multaque alia refert ex Eutocij commentario ad pleniorem Apollonij intelligentiam conducentia.

Sectio XVII. Quem ordinem & numerum propositionum Apollonij, & versionem Latinam in hoc commentario sequamur.

SVpponimus in hoc nostro Commentario numerum ordinemque propositionum librorum quatuor primorum Apollonij iuxta editionem Eutocij & versionem Latinam Federici Commandini, licet æstimemus, vt par est, alteram Memi Latinam versionem.

Sectio XVIII. conijcere numerum propositionum in reliquis quatuor vltimis conicorum libris Apollonij.

SVpposito numero & ordine propositionum Apollonij iuxta Eutocium & Commandinum; cùm primus liber contineat propositiones 56. secundus quinquaginta tres, tertius quinquaginta sex, quartus quinquaginta quinque: Summatim hi quatuor conicorum libri primi complectentur propositiones ducentas supra viginti. Supponendo prætereà summam quadrigentorum octoginta septem diagrammatum ab

Pappo

Pappo recensitorum in octo libris conicorum Apollonij, comprehendere etiam problemata vnà cum theorematibus: si ab his quadringentis octoginta septem propositionibus detrahantur ducentæ viginti quatuor primorum librorum; relinquentur ducentæ sexaginta septem pro reliquis quatuor postremis Apollonij libris.

Sectio XIX. An & cur difficilia sint Apollonij Conica.

SI Pappus Alexandrinus in Geometricis excellens ad intelligenda Apollonij conica, tot lemmata sua iudicauerit esse necessaria vnà cum nonaginta ipsius Apollonij: an non difficilia erunt Apollonij conica?

Cur verò ita obscurus & laboriosus sit Apollonius: est, quia vt summus Geometra sibi alijsque amicis contemporaneis æquè doctis scribebat, qui quæ supponebat & in alijs libris demonstrauerat norant. Atque ita illis deperditis iniuria temporum, tum lemmatibus ipsius quæ Pappus legerat, mirum nemini esse debet si etiam cum lemmatibus Pappi obscura adhuc permanserint.

Sectio XX. An & cur Apollonij conicorum quatuor primi libri, ex Eutocio, Memo, & Commandino difficilia multis videantur.

NVllam citationem proferre ex præcedentibus iam demonstratis, sed memoriæ firmæ committere præcognita: quis non censeat arduum esse multis præsertim non ita in Geometria exercitatis, in tanta tamque varia multitudine præcognitorum, vim demonstrationum percipere. Ea propter Eutocius & Memus à permultis in commentarijs suis difficiles iudicantur.

Hanc difficultatem magna ex parte sustulit in commentario suo Commandinus: Verùm in multis sequendo Eutocium lacunas eius non omnino compleuit; & in alijs demonstrationis discursum non expoliuit; & in alijs Eutocij vestigijs insistendo demonstrationes protulit per analysim supponendo multa ex datis Euclidis quæ non ita facile à multis intelliguntur. Propterea etiam à nonnullis austerus ac difficilis æstimatur.

Sectio XXI. Intentum nostrum ac methodum, & quæ supponam in hoc Commentario, euulgare.

SVppono solùm meum in Euclidis elementa, Isidorum, Hypsiclem, & Proclum commentarium; & vt mihi liceat definitionibus, axiomatibus, & corollarijs nostris in illos Authores superadditis vti.

Intentum fuit primarium & vniuersale, diligentiam omnem adhi-

 bere,

bere, vt propositionum demonstrationes siue nouæ, siue aliorum expolirentur; scrupulique ac dubitationes omnes in illis tollerentur; & facilitatem parere etiam ijs qui in primis solùm Geometriæ elementis sunt exercitati. Quare definitiones multas suppleui, & varias considerationes ad illas adhibui; tùm lemmata varia singulis his libris quatuor præmisi; totumque opus multis resperſi corollarijs & animaduersionibus nostris; citationesque omnes quàm fidelissimè apposui: quorum omnium adminiculo finem propositum consequeret, fines verò particulares in singulis librorum argumentis nostris cognoscere poteris.

More nostro, quæ sunt aliorum prodo simul & Authorem; quæ sunt nostra, dico. Verùm si in quædam incidas, quæ aliorum qui ante nos scripserunt esse recognoscas; ignoscas velim: certoque scias me cum illis concurrisse, & ignorasse eorum propria inuenta, vel è memoria excidisse.

Non subterfugio fateri varias esse propositiones, quæ casus & figurationes multitudine incredibiles admittunt; quorum aliquos tantum Eutocij & Commandini exemplo assumo ac demonstro; reliquos prudenti Geometræ iudicio explicandos permittens, ne tomus supra modum grandior fieret.

Sectio XXII. Proferre in medium quæ speciatim in hoc commentario expoliuerimus.

EVtocius, Memus, & Commandinus eum Apollonio assumunt rectas lineas ordinatim diametris sectionum conicarum applicatas; licet nullibi doceant eas ordinatim applicare: Et fortè Apollonius eam praxim in librum suum octauū circa problemata conica distulerat. Hęc verò suppositio legitima est, posita definitione seu natura ipsarum rectarum ordinatim diametris applicatarum; subiectum enim definitum assumi potest, vt affectiones variæ de eo demonstrentur, licet præmissa non sit ars, subiectum ipsum efformandum delineandi: Verùm in corollarijs nostris ad prop. 49. lib. 1. consultò voluimus ex præcedentibus notis methodum tradere ipsas rectas lineas ordinatim diametris applicandi; vt in sequentibus non solùm eas assumere, sed etiam practicè ordinatim applicatas habere possemus.

Præterea quia Authores distinctè non assignant rectam lineam in sectionibus conicis cui ex definitione 10. lib. 1. Apollonij inter primas, parallelæ esse debent rectæ omnes lineæ ordinatim diametris proprijs applicatæ: in explicatione definitionis 12. eiusdem lib. 1. inter primas, præmoneo vnam esse posse ex quinque designatis in eadem definitionis citatæ explicatione; quas postmodùm suis proprijs locis legitimè assignatas esse demonstro.

Insuper cùm animaduerterem ab Apollonio neque ab eius Commenta-

mentatoribus nullas esse traditas definitiones sectionum conicarum, sed colligendas esse ex primis libri primi propositionibus; eas inter secundas libri eiusdem primi definitiones retuli sub duplici forma; primas per causas originarias efficientes, & nonnullas circumstantias; secundas per causas solùm formales: postremisque vtor formalibus ad faciliùs conicarum sectionum figurationes in plano factas demonstrandas. Propter eundem finem latera transuersa & recta sectionum conicarum per causas originarias & formales definiui. Nimius essem si reliqua à nobis politiora facta referrem, quæ Lector facilè in operis huius decursu animaduertet, & compendiosius in argumentis ad singulos libros propositis.

Sectio XXIII. Occurrere obiectionibus contra hunc nostrum Commentarium.

Reprehendere quis posset multitudinem lemmatum, definitionum, considerationum & corollariorum nostrorum, quibus excreuit noster hic commentarius, & Geometriæ Studiosi absterreri possunt: præsertim cùm corollaria multa in librum nostrum quartum circa problemata conica, seu octauum Apollonij suppletum referri potuissent.

Sed respondeo ea non debere æstimari nimia, neque extra locum collocata proprium, neque terrifica, quæ maiorem pariunt facilitatem legentibus; & quæ consultò addidimus ad noua media demonstrationum inuenienda; innumeraque relinquunt in nostris quatuor libris posttremos quatuor Apollonij deperditos supplentibus reponenda.

Sectio XXIV. Vtilitatem conicarum sectionum ostendere.

Astronomi, & qui de Gnomonica libros edunt, sine subsidio conicorum Apollonij & conicarum sectionum, nihil concludere possunt circa sectiones planorum circularium Sphæræ & conorum vertices habentium in centro Sphæræ, basesque circulos Sphæræ minores, puta tropicos; vt determinent an sint circulares, vel Parabolicæ, vel Hyperbolicæ, vel Ellipticæ: sed neque eas in plano delineare.

Eisdem conicis Optici & qui Planisphæria delineant, & Pictores, necesse habent, ad circulos in plano ex obliquo aspectu conspectos effomandos: tunc enim Ellipses oculo repræsentantur.

Architecti verò ad arcus & concameratas testudines exædificandas, an non etiam opus habent Parabolas vel Hyperbolas vel Ellipses figurare?

Denique quis non aduertat ex Apollonio, conica eius determinationibus Geometricis inseruire: quandoquidem propositiones eius innumeræ varios casus admittant assignatos.

Ad hæc quod locis ſolidis plurimum proſint, oſtendemus in parergo ad noſtros quatuor libros de eiſdem ſectionibus conicis. Multa enim proponemus, beneficio harum conicarum ſectionum ſoluemus.

ARGVMENTVM LIBRI PRIMI.

LIber primus Conicorum Apollonij Pergæi continet ipſius Authoris definitiones primas nouemdecim; ſecundas quatuor: Propoſitiones quinquaginta ſex: & corollaria ſeptem, ſeu deductiones, ſeu manifeſta. Corollarijs ſuperaddidimus vnum ex Federico Cõmandino. Præmiſimus lemmata quinquaginta tria, quotum quatuor ſunt Pappi Alexandrini, tria Eutocij, reliqua quadraginta ſex ſunt noſtra. Ad quatuor Authoris definitiones ſecundas continuatis numeris ipſius Apollonij adſcripſimus alias viginti octo noſtras; tùm etiam ſuper his omnibus definitionibus ſecundis triginta duabus, conſiderationes noſtras quadraginta quinque. Corollaria denique ſuprà commemorata locupletauimus alijs noſtris centum octoginta ſex; duobus videlicet ad primas definitiones; duodecim ad lemmata; ſeptem ad definitiones ſecundas; & centum ſexaginta quinque ad propoſitiones. Itaque in ſumma ſunt in hoc libro primo definitiones nouemdecim primæ; triginta duæ ſecundæ; lemmata quinquaginta tria; conſiderationes noſtræ quadraginta quatuor; propoſitiones quinquaginta ſex; corollaria cenium & quatuor ſupra nonaginta.

Apollonius in epiſtola ſua ad Eudemum Geometram præſtantiſsimum ſibique deuinctiſsimum, quam retulimus in admonitione ad Lectorem, præcipuum ſibi propoſuit in hoc libro ſcopum, vt ipſe loquitur, *tradere generationes trium coni ſectionum*, id eſt Parabolæ, Hyperboles, & Ellipſeos, *& earum quæ oppoſitæ dicuntur*; *itemque principalia ipſarum accidentia*: videlicet ex Eutocio, initio ſui in hunc librum commentarij, *quæcumque ipſis in prima generatione contingunt; habent enim & alia quædam conſequentia.*

Eutocius ipſe diuerſis commentarij ſui in locis, compendiosè profert fines & texturam omnium huius libri propoſitionum.

Primùm quidem ad propoſitionem vndecimam ſic ait: *Animaduertendum eſt, decem hæc theoremata*, hoc eſt decem propoſitiones primas, *aptiſſimè cohærentia inter ſeſe, & continuata eſſe. Primum quidem oſtendit rectas lineas quæ in ſuperficie coni ad verticem pertinent, in eadem permanere. Secundum, contrà oſtendit. Tertium, explicat coni ſectionem, quæ per verticem efficitur. Quartum, ſectio-*

sectionem basi æquidistantem. Quintum verò, subcontrariam. Sextum est tanquam lemma ad septimum, in quo ostenditur oportere communem sectionem plani secantis & circuli qui est basis coni, ad eius diametrum perpendicularem esse: atque hoc ita se habente, lineas omnes quæ ipsi æquidistantes ducuntur, à triangulo bifariàm secari. Septimum, tres alias sectiones, earumque diametrum ostendit; & lineas quæ ad ipsam diametrum ordinatim applicantur, ei quæ in basi æquidistantes esse. In octauo demonstrat, Parabolen & Hyperbolen ex eorum numero esse quæ in infinitum augentur. In nono, Ellipsim quæ in seipsam vergit, tanquam circulus; quod planum secans cum vtroque latere trianguli conueniat: circulum non esse: subcontraria etenim, & æquidistans sectio, circulum facit. Sed & illud scire oportet, diametrum sectionis, in Parabola quidem vnum dumtaxat trianguli latus secare, & ipsam basim; in Hyperbola secare & latus & lineam quæ reliquo lateri ad partes verticis producto in rectum constituitur; in Ellipsi verò, & vtrumque latus, & basim secare. Posset fortasse arbitrari decimum theorema idem esse quod secundum, sed non ita res habet: illic enim in omni superficie duo quæuis puncta sumi asserit; hic in eà tantùm quæ à secante plano efficitur. At in tribus quæ deinceps sequuntur theorematibus, vnamquamque sectionem diligentiùs expendit, & principes earum proprietates declarat.

Circa decimumquartum theorema hęc habet in commentario suo ad illud. *Propositum idem est, quod in tribus superioribus: similiter enim & oppositarum sectionum principalem diametrum inquirit; & lineas iuxta quas possunt quæ ad ipsam ordinatim applicantur.*

Tùm verò ad prop. decimam quintam, & sequentem decimam sextam hæc subiungit. *Animaduertendum autem est in quintodecimo & sextodecimo theoremate, Apollonio propositum fuisse, vt secundas & coniugatas quas vocant diametros, inquireret, tùm Ellipsis, tùm Hyperbolæ, seu oppositarum sectionum; Parabolę enim eiusmodi diametrum non habet. Sed & illud notatione dignum est, diametros Ellipsis intrà recipi, Hyperbolæ verò & oppositarum sectionum diametros describi extrà. Oportet autem lineas iuxta quas possunt ordinatim applicatæ, seu recta latera, & lineas quæ ipsis æquidistant, ad rectos angulos aptare; ordinatim verò applicatas, & secundas diametros non omninò: maximè tamen deberent in acuto angulo applicari, vt longè aliæ & diuersæ ab eis quæ recto lateri æquidistant deprehenderentur. Post sextum decimum theorema definitiones tradit eius quæ secunda diameter appellatur Hyperbolæ & Ellipsis.* & post pauca hæc subiungit de diametris prima & secunda Hyperboles & ellipsis. *Constat ergo vtramque diametrum terminatam esse; primam quidem per sese; ex generatione sectionis; secundam verò quod media proportionalis sit inter lineas terminatas, videlicet inter primam diametrum, & eam iuxta quam possunt, quæ ad diametrum ordinatim applicantur: sed in ellipsi quod dictum est, nondum apparet. Itaq; cum ipsa in se ipsam vergat instar circuli, & omnes diametros intra recipiat; atq; terminet: omninò in ellipsi quæ media est proportionalis inter figuræ latera, ductaq; per centrum sectionis, & à diametro bifariàm diuisa, ab ipsa sectione terminatur: quod ex iis quæ dicta sunt in quintodecimo theoremate ostendere possumus.*

Denique ad propositionem quinquagesimam sextam & vltimam, continuato discursu, reliquarum propositionum ab 16. vsque ad 56. scopos

breuiter indicat sic. *At vero in septimo decimo asserit Apollonius rectam lineam quæ per verticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, extra sectionem cadere. In decimo octauo lineam quæ vtcumque contingenti æquidistans intra sectionem ducitur, ipsam secare. In decimo nono, lineam quæ ducitur ab aliquo puncto diametri, ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conuenire. In vigesimo, & vigesimo primo, lineas in sectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter sese habeant; itemque diametri portiones, quæ ab ipsis fiunt. In vigesimo secũdo, & vigesimo tertio, tractat de linea quæ in duobus punctis sectioni occurrit. In vigesimo quarto, & vigesimo quinto, de ea quæ ipsi occurrit in vno puncto tantùm; hoc est de linea, quæ sectionẽ contingit. In vigesimo sexto de ea quæ diametro Parabolæ & Hyperbolæ æquidistans ducitur. In vigesimo septimo de linea secante Parabolæ diametrum, quippe quæ ex vtraque parte sectioni occurrat. In vigesimo octauo, de ea quæ æquidistans ducitur contingenti vnam oppositarum sectionũ. In vigesimo nono, de ea quæ per centrum oppositarum sectionum transiens producitur. In trigesimo de linea transeunte per centrum ellipsis, & oppositarum sectionum, quæ producta, à centro bifariàm diuiditur. In trigesimo primo, de linea Hyperbolen contingente, quæ quidem diametrum secat inter centrum & verticem sectionis. In trigesimo secundo, trigesimo tertio, trigesimo quarto, trigesimo quinto, trigesimo sexto, de lineis contingentibus agitur. In trigesimo septimo, de contingentibus, & de ijs quæ à tactu applicantur in Hyperbola & ellipsi. In trigesimo octauo, de contingentibus Hyperbolen & ellipsim, quo pacto se habeant ad secundam diametrum. In trigesimo nono & quadragesimo, de ijsdem agit, compositas ex his proportiones inquirens. In quadragesimo primo, de parallelogrammis descriptis ab applicata, & ea quæ ex centro Hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo secundo, asserit triangulum in Parabola ex contingente & applicata factum, æquale esse ei parallelogrammo, quod cùm æqualem altitudinem habeat, in dimidia basi constituitur. In quadragesimo tertio inquirit in Parabola & in ellipsi, quomodo sese habeant triangula, quæ à contingentibus & applicatis fiunt. In quadragesimo quarto, idem inquirit in oppositis sectionibus. In quadragesimo quinto, itidem in secunda diametro Hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo sexto, de alijs Parabolæ diametris, quæ sunt post diametrum principalem. In quadragesimo septimo, de alijs diametris Hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo octauo, de alijs diametris oppositarum sectionum. In quadragesimo nono, de lineis iuxta quas possunt applicatæ ad alias Parabolæ diametros. In quinquagesimo, de ijsdem in Hyperbola & ellipsi. In quinquagesimo primo, de ijsdem, in oppositis sectionibus. Itaque cùm hæc scripsisset, addidissetque epilogum quendam, in quinquagesimo secundo, problema illud ostendit: quomodo Parabole in plano describatur. In quinquagesimo tertio, quomodo describatur Hyperbole. In quinquagesimo quarto, quomodo ellipsis. In quinquagesimo quinto, quomodo oppositæ sectiones. In quinquagesimo sexto, quomodo describantur oppositæ sectiones illæ, quas coniugatas appellamus.* Hæc ex Eutocio locis suprà laudatis.

Age verò ex proprijs depromamus admirabilem Apollonij in primis sexdecim huius libri propositionibus contextum, in quibus ortum & generationem sectionum conicarum; tùm etiam diametrorum propria-

propriarum ipsis, tùm etiam rectarum linearum ordinatim illis diametris applicatarum; tùm rectarum linearum iuxta quas possunt ipsæ ordinatim applicatæ diametris, seu rectorum laterum; denique secundarum diametrorum, fælicissimè manifestat; & necessaria præmittit vel insetit omnia tàm in definitionibus quàm in præuijs propositionibus ad euidenter demonstrandum propositum; videlicet originem trianguli rectilinei in propositione tertia; circuli verò in propositione quarta & quinta; Parabolæ in vndecima; Hyperbolæ in duodecima; Ellipseos in decima tertia; oppositarum sectionum in decima quarta: secto cono beneficio vnius vel duorum planorum distinctorum. Et quia opus habebat quædam demonstrare de lineis rectis tàm in superficie coni, quàm intra ipsam, quin etiam extra eandem; tùm etiam de rectis lineis ordinatim applicatis ad alias rectas, vt indicaret diametros & axes ipsarum conicarum sectionum quæ ipsas admittunt. Et quia trianguli illius rectilinei ortum in cono aduertit esse necessarium ad alias prædictas omnes sectiones coni patefaciendas; & hanc generationem trianguli dependere ab rectis lineis in superficie coni & intra ipsam existentibus; ideò in propositione prima ostendit rectas omnes lineas ab coni vertice ad quodcumque aliud eiusdem superficiei punctum ductas, in ipsamet superficie sustentari: alias verò quascumque ab puncto quolibet superficiei ad quodlibet aliud punctum eius, (modò recta illa linea copulans prædicta duo puncta ad verticem non pertineat producta vel non producta,) intra superficiem ipsius coni extendi, productisque vlterius extra illam procedere, propositione secunda demonstrat. Quare secto cono per verticem eius & interiora acto si concipiatur hoc planum vndequaque productum vltra superficiem & basim dicti coni; secabit etiam superficiem conicam, & basim circularem coni: cumque hæc basis sit superficies plana, sectio communis huius plani circularis & plani secantis erit recta linea terminata duobus punctis circumferentiæ circuli sectæ, iuxta prop. 3. lib. 11. elem. sustentata tàm in plano secante, quàm in circulo secto, prout requirit natura sectionis communis planorum: Cumque in hoc plano secante conum penetrante ipsum per verticem, obtineamus punctum verticis coni imminens desuper prædictæ rectæ lineæ; ab hoc puncto ad extrema duo puncta prædictæ rectæ poterimus concipere transmissas duas rectas lineas, quæ per coroll. nost. 2. ad prop. 7. lib. 11. element. sustentabuntur in plano ipso secante in quo existunt tàm punctum verticis coni, quàm alia duo puncta terminantia sectionem linearem communem plano secanti & circulo secto; ideoque triangulum rectilineum efformabunt: sed & istæ duæ rectæ seu duo latera trianguli huius adæquabuntur rectæ lineæ producentis suo motu superficiem conicam, iuxta def. 1. inter primas, alioquin duæ rectæ lineæ superficiem concluderent, contra 14. axiom. lib. 1. element. terminabunturque versus basim coni, in extremis rectæ alte-

rius lineæ quæ est communis sectio plani secantis & plani circularis baseos coni; igitur quandoquidem rectalinea efficiens conicam superficiem in quocumque instanti concepta quiescere sustentatur in ipsa coni superficie, duo latera dicti trianguli existent in eadem superficie conica, basisque trianguli existet in plano circularis baseos coni: Cumque tres rectæ lineæ efficientes dictum triangulum ostensæ sint esse in plano secante conum per verticem, & in superficie curua coni duæ, tertiaque in plano basis eius; ipsum triangulum erit communis sectio plani secantis prædicti, & coni secti, sicuti proposuit Apollonius propositione 3. Huiusmodi autem triangulo vtitur Author ad ostendendam in propositione quarta sectionem coni factam plano parallelo basi eius,esse circulum, centrum obtinentem in axe coni secti; figuram verò solidam conclusam hoc circulo & superficiei coni parte verticem versus, esse alterum conum: & propositione quinta sectionem aliam circulum esse quam vocat subcontrariam, effectam ab plano perpendiculariter posito supra prædictum triangulum, & secante conum, & ab dicto triangulo triangulum aliud auferente ex verticis parte simile quidem prædicto triangulo quod per axem rectoque ad basim coni, subcontrariè verò positum. Hoc idem triangulum adhibet ad sectiones alias coni manifestandas, Parabolam nimirum in propos. 11. Hyperbolam in 12. Ellipsim in 13. sectiones denique oppositas in 14. Verùm prius in propositione 6. docet rectas omnes lineas ab quibuscumque punctis in superficie conica sitis extra trianguli prædicti per axem latera ductas æquidistantes rectæ lineæ alteri orthogoniæ ab circumferentia baseos coni ad eius diametrum, occurrere plano illius trianguli, & vlteriùs extensas ad alteram superficies partem conicæ peruenire,& bifariàm omnes diuidi in punctis proprijs dicti trianguli. Præterea tradit propositione 7. secto cono beneficio plani per axem applicati; vnde triangulum resultat per prop.3. tùm altero plano secante planum baseos secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis ad basim trianguli non productam vel productam, existentibus hisce duabus rectis angulum rectum efficientibus in eodem plano baseos circularis coni non producto, vel in infinitum circumquaque diducto; lineas omnes rectas ex punctis lineæ sectionis resultantis in superficie coni ab sectione facta per secundum hoc planum, parallelas prædictæ perpendicularis rectæ ad basem trianguli prædicti, incurrere in rectam lineam quæ est communis sectio plani trianguli per axem, & plani prædicti secundi secantis conum, vlteriusque protensas ad alteram eiusdem lineæ sectionis partem peruenire, & bifariàm omnes diuidi ab dicta recta linea in quam incurrunt; & quidem ad angulos rectos ab ea diuidi, si conus diuisus fuerit rectus, vel scalenus modò triangulum per axem sit basi coni orthogonium; ad angulos verò obliquos si scalenus obtineat triangulum per axem ad basim propriam obliquum: Vnde duo colligit; primum, rectam illam lineam secantem

bifa-

bifariàm prædictas omnes rectas, esse iuxta def. 10. diametrum sectionis, quia illas rectas æquidistantes rectæ alteri constitutæ in eodem plano baseos coni, orthogoniæ basi circulari coni productæ vel non productæ bifariàm diuidit; Alterum, fieri posse, vt prædictæ omnes rectæ parallelæ bifariàm quidem diuidantur ab diametro sectionis, non autem ad angulos rectos. Hinc transitus fit ad octauam propositionem quæ fundamentum est ad probandam Parabolen & Hyperbolen sectiones conicas posse in infinitum ad partes vertici contrarias protendi; earumque diametros etiam in infinitum extendi intra ipsarum sectionum locum. Nona verò propositio est circa sectionem coni plano conuenientecum vtroque latere trianguli per axem, quod neque basi æquidistet, neque subcontrariè ponatur; illamque sectionem affirmat esse non posse circulum; determinabitque propositione vndecima Ellipsim esse. Et ne quis imposterum dubitaret rectas in sectionibus conicis ductas ab puncto vno ad aliud ipsarum, ad aliud vel aliud earumdem ipsarum punctum pertinere posse; propositione decima tradit, si in omni sectione duo puncta sumantur, rectam lineam huiusmodi puncta duo copulantem, intra sectionem cadere, productam verò extra illa duo puncta, extra sectionem procedere semper; vel in directum ipsi constitutam aliam rectam, extra sectionis limites esse. Iam verò explicata sectione coni triangulari in prop. 3. & circulari in propositionibus 4. & 5. aggreditur in propositione vndecima determinare Parabolam eamque describere per causas & proprietates, secto nimirum cono primùm plano per axem, & altero secundo plano secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem fit perpendicularis; & sit recta linea quæ est sectio communis planorum prædictorum, trianguli, & secundi secantis, hoc est iuxta prop. 7. & eius coroll. 1. diameter sectionis vni laterum trianguli per axem æquidistans; rectaque linea quæ à sectione coni ducitur parallela communi sectioni plani secantis & basis coni vsque ad prædictam sectionis diametrum; possit spatium æquale contento linea quæ ex diametro abscissa inter ipsam & verticem sectionis interijcitur, & alia quadam quæ ad lineam inter coni angulum & verticem sectionis interiectam, eam proportionem habeat, quam quadratum basis trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus eius lateribus continetur. In duodecima propositione stabilit causas & nonnullas proprietates definientes Hyperbolen, videlicet si Conus plano secetur per axem; tùm altero plano findente basim secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem fit perpendicularis; & sectionis diameter producta cum vno latere trianguli per axem, extra sectionem coni conueniat: & recta linea quæ à sectione ducitur æquidistans communis sectioni plani secantis secundi & basis coni vsque ad sectionis diametrum, possit spatium adiacens lineæ ad quam ea quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangulum,

lum, eandem proportionem habeat, quam quadratum lineæ quæ diametro parallela à vertice coni vſque ad baſim trianguli ducitur, ad rectangulum baſis partibus quæ ab ea fiunt contentum, latitudinem habens lineam quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam & verticem ſectionis interiectam; excedenſque figura ſimili & ſimiliter poſita ei quæ continetur linea extra triangulum ſubtenſa, & ea iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum applicantur. Ad hæc in propoſitione decima tertia profert cauſas & quaſdam affectiones ad ellipſim definiendam, vtpote ſi Conus plano ſecetur per axem, & ſecetur altero ſecundo plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque baſi æquidiſtet, neque ſubcontrariè ponatur; planum autem in quo eſt baſis coni, & ſecans planum ſecundum conueniant in recta linea quæ ſit perpendicularis vel ad baſim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur: Rectaque linea quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni planorum vſque ad diametrum ſectionis, poſſit ſpatium adiacens lineæ ad quam ſectionis diameter eam proportionem habeat quam quadratum lineæ diametro æquidiſtantis à vertice coni vſque ad trianguli baſim ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus, quæ inter ipſam & rectas trianguli lineas interijciuntur, latitudinem habens quæ ex diametro ab ipſa abſcinditur vſque ad verticem ſectionis, deficienſque figura ſimili & ſimiliter poſita ei quæ diametro & linea iuxta quam poſſunt, continetur. Itaque definitiones trium coni ſectionum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipſeos includunt duo plana ſecantia conum; Primum, ex cuius ſectione reſultet triangulum per axem: Alterum ſecans conum, & dictum triangulum; ita vt trianguli huius & plani ſecantis ſectio communis linearis, ſit diameter ſectionis reſultantis in cono, factæque ab ſecundo plano ſecante & applicato ſecundum rectam lineam in plano baſeos coni ſecti perpendicularem baſi dicti trianguli per axem; tùm etiam includunt rectam aliam lineam inueniendam ad quam alia recta linea proportionem habeat quam quadratum proprium in ſingulis dictis ſectionibus, ad rectangulum aliud determinatum in eiſdem proprijs ſectionibus: Denique comprehendunt alias rectas à ſectione propria ductas ad diametrum propriam æquidiſtantes prædictæ rectæ lineæ quæ eſt ſectio communis baſeos coni & ſecundi plani ſecantis conum & efficientis ſectionem, quæ poſſint rectangula comprehenſa ſub portione diametri inter ipſas & verticem, & ſub recto latere vel recta linea inuenienda, vel partibus eius, vel producta illa recta linea inuenienda; vnde quadrata prædictarum rectarum applicatarum ad diametrum, vel æqualia erunt dictis rectangulis; vel excedent, vel deficient dicta rectangula figuris ſimilibus rectangulum aliud ſub proprijs lateribus determinatum. Verumtamen in Parabola, diameter parallela erit vni laterum trianguli præmoniti per axem; & in Hyperbola ſecabit ambo latera dicti trianguli, vnum non

produ-

productum, aliud verò vltra verticem extensum; & in ellipsi vtrumque non productum vltra verticem. Suppositis autem ijs quæ propositione duodecima de Hyperbola tradiderat, ortum & generationem sectionum oppositarum aperit propos. 14. sectis plano vno superficiebus duabus conicis ad verticem coaptatis iuxta definitionem primam, sed non per hunc verticem; in vtraque enim superficie resultare ait hyperbolas oppositas duas eandem diametrum sibi vendicantes transuersam, lateraque æqualia recta, communeque figuræ latus transuersum. Positis autem ijs quæ de ellipsi in propos. 13. docuit, tradit in propos. 15. fundamentum reperiendi diametrum coniugatam datæ in ellipsi, ex transuerso & recto latere; tùm etiam datis duabus diametris coniugatis, recta eorum latera reperiendi. Decima verò sexta propositione, assignat methodum inuestigandi secundam diametrum seu coniugatam datæ in oppositis sectionibus. Denique his stabilitis aggreditur definitiones secundas; centri nimirum in Hyperbola & ellipsi, & oppositis sectionibus; tùm linearum rectarum ex centro; tùm secundæ diametri vel coniugatæ in prædictis sectionibus. Atque hæc sint satis de artificiosa Apollonij architectura in primis suis sexdecim propositionibus circa originem sectionum conicarum, diametrorumque propriarum, & rectarum linearum ipsis ordinatim applicatarum: fatemur autem nos in reliquis propositionibus huius libri similem texturam minimè dignoscere, quam fortè alij oculatiores dispicient; verùm adnotamus eum in eisdem reliquis propositionibus vsque ad 51. inclusiuè tradere modum dignoscendi rectas lineas tangentes sectionum conicarum lineas curuas, tùm etiam secantes, tùm etiam diametros transuersas & rectas, tùm etiam rectas lineas ordinatim ipsis applicatas: Præterea nonnullas prædictarum rectarum linearum affectiones ostendit, tam seorsim sumptarum, quàm cum ordine ad alias. Demùm postremis quinque propositionibus quæ praxim inuoluunt, docet modum describendi in plano, sectionum prædictarum lineas curuas, reuocando seu potius euocando ipsas ab conis in quibus ortum suum habuerunt; & ex principijs datorum Euclidis subtilissimè praxes demonstrat, vti videre est in Commentario Eutocij Græco, vel Latinitate donato ab Federico Commandino.

Circa ea quæ in lemmatibus, & corollarijs, & considerationibus nostris addidimus, hæc accipe.

Imprimis circa ipsas sectiones conicas. Determinamus lemmate secundo sectionem communem quarumcumque superficierum esse lineam: planæ verò & curuæ prout curua est & non angulosa, esse lineam curuam, lemmate tertio; quæ continebit spatium in casu corollarij nostri primi, 3ⁱ. & 4ⁱ. ad illud lemma; vel non comprehendet figuram in casu corollarij nostri secundi; & in casu lemmatis quarti, quando planum secat superficiem curuam prout curua est & non angula,

la, ſimulq́ue aliud planum terminans vnà cum illa curua ſuperficie ſolidum vnum, eſſe lineam curuam & rectam ſpatium planum continentes; & in corollarijs noſtris ad hoc lemma, 2°. & 3°. ſpeciatim hæc ſpatia in ſectione coni per planum, quænam ſint aſsignamus. Lemmata noſtra ab 24. ad 45. incluſiuè ſunt ad breuiorem & faciliorem demonſtrationem originis in cono ſectionum conicarum Paraboles, Hyperbóles, & Ellipſeos; quarum naturam definitionibus particularibus concluſam ex antiquitatis ruderibus non habemus, ſicuti etiam laterum earum tranſuerſi ac recti in genere & ſpecie, ſectionis ſubcontrariæ in cono, ſectionum oppoſitarum, ſectionumq́ue coniugatarum oppoſitarum, tùm etiam circuli generati in cono. Porrò has definitiones ſupplemus in definitionibus ſecundis: Parabolæ quidem per cauſas originarias in cono, & aliquas proprietates, in definitione quinta; Hyperbolæ in definitione ſeptima; Ellipſeos in definitione nona; ſectionum oppoſitarũ in definitione ſecunda numeri decimi, circuli in definitione decima ſexta. Quia verò aduertimus ad probandam rectè factam delineationem Paraboles, Hyperboles, Ellipſeos, ſectionum oppoſitarum, earumq́ue coniugatarum, etiamq́ue circuli; nimis prolixum eſſe & operoſum vti prædictis definitionibus, quæ ſupponunt delineationes huiuſmodi reuocandas eſſe ad conos vnde profluxerunt, vti videre eſt in modo demonſtrandi figurationes conicarum ſectionum, quem adhibet ex Apollonio Eutocius in poſtremis huius libri propoſitionibus: nos harum ſectionum definitiones alias inter ſecundas protulimus formales, Parabolæ quidem definitione vigeſima prima, Hyperbolæ vigeſima ſecunda, Ellipſeos 23. ſectionum oppoſitarum vigeſima quarta, circuli vigeſima quinta, ſectionum denique oppoſitarum coniugatarum trigeſima ſecunda; quibus vtimur ad oſtendendam breuiter & facilè praxim deſcriptionis linearum illarum Paraboles, Hyperboles, Ellipſeos, aliarumq́ue laudatarum, in poſtremis huius libri propoſitionibus. Sed & diametros harum ſectionum, tranſuerſaq́ue latera & recta originalia definiuimus ex cauſis proprijs; & peculiari modo formali eadem recta latera ab definitione 26. ad 30. incluſiuè inter ſecundas. ſuper his definitionibus ad finem illarum adiungimus quadraginta quatuor conſiderationes noſtras, in quibus multa proferimus ad clariorem diſtinctioremq́ue prædictarum ſectionum intelligentiam conſequendam; & in vltimis quinque ex dato axe, & latere eius recto proprio, eas in plano deſcribimus; non autem ex data quacumque alia diametro & latere eius recto, quod vniuerſalius eſt, & ad praxim reducimus in propoſitionibus 52. 53. 54. 55. 56. adnotando in corollarijs noſtris nouem ad vltimam propoſitionem 56. & perpendendo conditiones ab Apollonio allatas circa duas datas rectas lineas ad prædictas ſectiones conicas in plano depingendas. Definitionibus noſtris laterum rectorum ſectionum conicarum ex cauſis originarijs non vtimur, ſed forma-

formalibus; propter easdem rationes allatas circa definitiones ipsarummet sectionum causales. In corollario nostro sexto ad propos. 11. dubitationi satisfacimus cur sectio conica Parabolica, ita vocetur; & in corollario nostro decimo ad propos. 12. quare sectio Hyperbolica; & in corollario nostro tertio ad propos. 13. cur sectio alia conica Elliptica, Ellipsis nuncupetur; & in corollario nostro 9. ad propos. 14. cur duæ Hyperbolæ generatæ in duabus superficiebus conicis ad verticem communem consistentibus iuxta def. 1. inter primas, sectiones oppositæ ab Apollonio sint appellatæ.

De sectione coni per plana, docemus corollario nostro 1. ad prop. 3. & 4. si planum secans fuerit applicatum axi eius, semper sectionem communem plani huiusmodi & baseos circularis coni esse diametrum ipsius baseos; alteram verò eius chordam si planum secans conum per verticem non fuerit applicatum axi: & corollario nostro 2. ad propos. 4. ostendimus secto cono per planum parallelum basi eius, resultare conum similem secto: & corollario nostro 1. ad propos. 5. assignamus methodum conum quemcumque secandi plano per axem eius recto ad basim ipsius circularem; & corollario nostro 3. ad eandem propos. 5. Planum datum findendi plano alio orthogonio ipsi: & in corollario nostro 2. ad eandem propos. 5. problema proponimus de triangulo dato scaleno abscindere aliud triangulum simile, verticem habens communem cum dato, sed subcontrariè positum. Et in corollario nostro 1. ad propos. 14. congerimus theorema geometricum de sectione planorum, Duobus planis se mutuò secantibus, puncta omnia communia ipsis existere in recta linea quæ est sectio communis eorum. Denique in corollario nostro 3. ad proposit. 22. demonstramus lineas curuas Parabolæ vel Hyperbolæ in infinitum productas ad partes contrarias vertici iuxta propos. 8. distare posse infinito syncategorematicè interuallo ab diametro quacumque propria, & ab inuicem diuaricari.

Circa rectas lineas contingentes quamlibet coni sectionem curuam, hæc ab corollarijs nostris accipe. Recta linea ducta ab vertice sectionis curuæ conicæ, seu ab extremo diametri eius sito in linea curua sectionis, æquidistans rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad ipsam datam diametrum; sectionem ipsam contingit in vnico tantùm puncto, nimirum verticis; corollario nostro ad prop. 17. Et si contingenti rectæ sectionem, ducatur intra eius locum ab quolibet puncto lineæ eius curuæ parallela recta linea, occurret alteri puncto lineæ curuæ sectionis; sed in ellipsi & circulo punctum assumptum non debet esse extremum diametri aliud ab puncto contactus dati, corollario nostro 3. ad prop. 18. Tùm recta linea contingens Parabolen vel Hyperbolen, non occurret diametro Parabolæ vel Hyperbolæ extra sectionem, si punctum occursus sit vertex diametri, corollario nostro 1. ad prop. 24. & in ellipsi & circulo recta linea contingens sectionem, occurret diametro extra

sectionem si non transeat hæc diameter per dictum punctum contactus, vel non sit parallela rectæ contingenti, corollario nostro 2. ad prop. 25. & si recta linea ex centro sectionum oppositarum quantumcumque producta; non attingere possit alteram sectionum, neque etiam aliam attinget, corollario nostro ad prop. 29. & in omni sectione coni si recta linea contingat lineam eius curuam & non secet, nulla alia introduci poterit ipsammet sectionem contingens & non secans in eodem puncto contactus, corollario nostro 3. ad prop. 32. & nulla recta linea contingens sectionem conicam, duo puncta sectionis contactæ transfigere potest, corollario nostro 2. ad prop. 36. & si vnam oppositarum sectionum recta linea contingat, & ab tactu ducatur recta linea per centrum vsque ad alteram sectionem; quæ ex hoc puncto huius alterius sectionis ducitur parallela rectæ prædictæ contingenti, sectionem ipsam continget in illo eodem puncto, corollario nostro 1. ad propos. 44. & si ab puncto contactus vnius rectæ lineæ contingentis vnam oppositarum sectionum ducatur diameter illarum occurrens oppositæ sectioni in vno puncto, in quo sit altera recta contingens ipsam sectionem; hæ duæ rectæ lineæ contingentes erunt parallelæ & æquales inter se, corollario nostro 2. ad prop. 44. & ex tribus propositionibus 46. 47. 48. colligitur verum esse quod monuimus in explicatione definitionis 12. inter primas; videlicet vnam ex lineis rectis cui debent esse parallelæ rectæ lineæ omnes in qualibet sectione coni, bifariam diuisæ ab diametro sectionis conicæ, esse rectam lineam contingentem in vnico tantum puncto, quod in citatis propositionibus determinatur esse vertex diametri, corollario nostro 3. ad prop. 48. huius libri primi.

Quod spectat ad axes, diametros, & rectas lineas ordinatim applicatas ipsis; sequentia monemus ex nostris corollarijs. Primum quidem adnotes velim quinque rectas lineas esse, quibus parallelæ esse debent rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ ad sectionum conicarum diametros, ex dictis in expositione ad 12. definit. inter primas. Tum rectas omnes lineas vtrimque terminatas in lineis curuis sectionum, perpendicularesque axibus proprijs illarum, esse ordinatim applicatas ad illos axes proprios; ex corollario nostro ad definit. 18. inter primas. Tum si ex centro lineæ curuæ sectionis excitetur in eius diametro quæ sit axis eius, recta linea perpendicularis, esse axem coniugatum eidem, ex corollario nostro ad 19. definit. inter primas. Tum vnam esse posse ex præmonitis lineis rectis ad 12. definit. inter primas, rectam lineam quibus debent esse parallelæ rectæ omnes lineæ in sectione accommodatæ & bifariam sectæ, ad determinandam diametrum sectionis iuxta defin. 10. inter primas; sectionem communem plani secundi secantis & efficientis sectionem, & plani baseos circularis coni, ex corollario nostro 2. ad prop. 7. Tum prædictam rectam, vnamque ex rectis lineis quibus parallelæ esse debent rectæ lineæ accommodatæ in sectionibus, & bifariam

fariàm sectæ, ad determinandam diametrum sectionis iuxta defin. 10. inter primas, posse esse extra circularem basim coni in plano eius, ipsius circumferentiam contingentem in puncto vno, vel non contingentem, vel intra circulum ipsum, ex corollario nostro 3. ad cit. prop. 7. Præterea diametrum originariam, de qua sermo est in prop. 8. nunquam occurrere etiam productam in infinitum versus partes contrarias vertici, lineæ curuæ ipsius sectionis etiam productæ in infinitum versus partes prædictas; eamque solùm secare in puncto verticis, & ab eo progredi versus partes assignatas intra locum sectionis; ex corollario nostro ad prop. 8. Insuper diametrum Paraboles originariam posse in infinitum augeri versus partes contrarias vertici, & solùm secare ipsius lineam curuam in vnico puncto verticis prædicti, ex corollario nostro 3. ad prop. 11. & rectam omnem lineam ex punctis lineæ curuæ Paraboles, perpendicularem ad diametrum eius, cuius mentio fit in cit. prop. 11. esse mediam proportionalem inter eius latus rectum, & portionem dictæ diametri inter verticem eius & hanc rectam perpendicularem; ex corollario nostro 5. ad prop. cit. 11. Et omnem rectam lineam ex punctis lineæ curuæ Hyperboles ad eius diametrum originariam eductam, & æquidistantem sectioni communi plani secundi secantis & efficientis Hyperbolen, & circularis baseos coni secti, esse mediam proportionalem inter latera rectanguli, de quo agitur in prop. 12. ex corollario nostro 8. ad ipsam prop. 12. & infinitas esse alias diametros in Hyperbola diuersas ab eius originaria, se mutuò secantes in puncto quod est extra eius locum & lineam curuam, admittentes sua propria latera; ex corollario nostro 11. ad cit. prop. 12. Diametrumque originariam Hyperboles extendi posse in infinitum intra eius locum, & nunquam occurrere alteri puncto lineæ eius curuæ, & solum eam secare in puncto verticis; ex corollario nostro 12. ad cit. prop. 12. Ad hæc diametrum originariam Ellipseos productam si opus sit, secare basim trianguli per axem; ex corollario nostro 6. ad prop. 13. tùm esse axem ellipseos si planum secans primum sit perpendiculare basi coni, ex corollario nostro 7. ad cit. prop. 13. & infinitas esse diametros in ellipsi diuersas ab originaria, propria latera sibi vendicantes, ex corollario nostro 9. ad cit. prop. & omnes ellipseos diametros se mutuò secare in centro eius, & bifariàm, ex corollario nostro 10. & si diameter originaria ellipseos secet basim trianguli per axem non productam, circumferentiam ellipseos non esse integram, sed posse perfici, ex corollario nostro 11. quod si diameter eius originaria attigerit extremum baseos trianguli per axem, tunc circumferentiam ellipseos esse integram, ex corollario nostro 12. & rectam lineam quamlibet ordinatim applicatam diametro ellipseos, esse mediam proportionalem inter rectanguli latera, de quo fit mentio in prop. 13. ex corollario nostro 15. ad prop. 13. Denique latus rectum respectu axeos in ellipsi, esse inæquale ipsi axi, ex corollario nostro 16. ad cit. prop. 13.

Tùm infinitas esse diametros sectionum oppositarum diuersas ab originaria, admittentes sua propria latera recta, ex corollario nostro 3. ad prop. 14. & centrum oppositarum sectionum esse extra earum loca, inter vtrasque, ex corollario nostro 4. ad eandem prop. Diametrum verò originariam illarum, esse axem, si planum primum secans fuerit perpendiculare basi coni secti per axem, ex corollario nostro 6. ad eandem prop. cit. 14. Tradimus verò methodum in ellipsi ex data eius diametro & latere eius recto, reperiendi aliam diametrum ordinatim applicatam datæ, in corollario nostro 5. ad prop. 15. & asserimus in corollario nostro 6. ad eandem prop. 15. rectam lineam mediam proportionalem inter diametrum aliquam & eius latus rectum in ellipsi, esse diametrum eiusdem ellipseos ordinatim applicatam datæ initiò diametro. Et in corollario nostro 1. ad prop. 21. rectum latus in ellipsi semper esse inæquale transuerso suo proprio quod sit axis. Et in corollario nostro 2. ad eandem prop. 21. Rectum latus in Hyperbola & oppositis sectionibus esse inæquale transuerso lateri quod sit axis, si sumatur hoc transuersum latus, quatenus ingreditur intra locum ipsarum; posse tamen esse æquale vel inæquale si sumatur terminatum suis proprijs extremis extra locum ipsarum. Et in corollario nostro 3. ad eandem prop. 21. In Parabola rectum latus esse inæquale cuicumque transuerso. Et in corollario 1. nostro ad prop. 22. ostendimus in Parabola & Hyperbola rectarum linearum ordinatim applicatarum ad quamcumque diametrum ipsarum, viciniorem vertici esse minorem remotiore. Et in coroll. nostro 2. ad eandem prop. 22. diametros ipsarum productas in infinitum ad partes verticibus oppositas nunquam occurrere lineis curuis ipsarum. Et in coroll. nostro 2. ad prop. 23. In ellipsi & circulo rectarum ordinatim applicatarum ad diametrum quamlibet versus vnum verticem & ad easdem centri partes, viciniorem vertici prædicto esse minorem remotiore. Et in coroll. nostro 1. ad prop. 26. probamus Diametrum Parabolæ vel Hyperbolæ in vno tantùm puncto secare lineas earum curuas proprias. Et in corollarijs nostris 2. 3. 4. ad eandem prop. 26. rectas lineas parallelas diametris Paraboles vel Hyperboles, in vno tantùm puncto lineas earum curuas intersecare. Et in corollarijs ad prop. 27. demonstramus quædam de diametris Parabolæ & Hyperbolæ: in 1. quidem diametros Parabolæ se mutuò non intersecare intra ipsam parabolam; sed neque extra ipsam in coroll. 2. & esse parallelas inter se in coroll. 3. At verò diametros Hyperboles se mutuò diuidere extra ipsam in coroll. nostro 4. non autem intra ipsam, in coroll. 5. & non esse parallelas in coroll. vltimo seu 6. In coroll. nostro ad prop. 30. ostendimus in ellipsi orta ex sectione coni, dari posse duas inæquales diametros. Et in coroll. nostro ad prop. 29. rectam lineam ex centro oppositarum sectionum eductam, productamque in infinitum, si non attingat alterutram sectionum, minimè alteri occurrere. Tùm in coroll. nostro 1. ad prop. 31. rectam

rectam omnem lineam ex centro Hyperboles ad aliquod punctum lineæ eius curuæ extensam, productam vltra hoc punctum, progredi intra locum ipsius Hyperboles: vel eductam ab quolibet puncto supra centrum eius ad aliquod punctum lineæ eius curuæ, productámque ingredi locum eius, in coroll. nostro 2. Asserimus etiam in coroll. nostro 1. ad prop. 46. In Parabola rectas omnes lineas æquidistantes cuilibet eius diametro, & secantes eius lineam curuam, esse diametros eiusdem: & in coroll. nostro 2. aliter demonstramus quàm in coroll. nostro 3. ad prop. 27. diametros omnes Parabolæ esse rectas lineas inuicem parallelas: tùm in coroll. nostro 3. rectas omnes lineas in infinitum vtrimque productas in vnico tantum puncto lineam curuam Parabolæ secantes, esse diametros eius: & in coroll. nostro 4. non omnes rectas lineas æquidistantes intra locum Parabolæ, esse diametros eius: & in coroll. nostro 5. rectas omnes æquidistantes inuicem intra locum Parabolæ, & secantes in vnico tantùm puncto lineam eius curuam, si producantur vtrimque in infinitum, esse diametros eius: denique in coroll. nostro 6. nullam rectam lineam secantem duobus in punctis lineam curuam Parabolæ esse diametrum eius. In coroll. nostro 3. ad prop. 48. colligimus ex propositionibus 46. 47. 48. verum esse quod monuimus in explicatione definitionis 12. inter primas; vnam ex lineis rectis cui debent esse parallelæ rectæ lineæ omnes in qualibet sectione coni, bifariàm diuisæ ab diametro sectionis conicæ, esse rectam lineam contingentem in vnico tantùm puncto; quod in citatis propositionibus determinatur esse vertex diametri. Et in coroll. nostro 4. ad cit. prop. 48. In qualibet sectione coni, etiamque in oppositis sectionibus; si multæ rectæ lineæ fuerint accommodatæ parallelæ vni tangenti sectionem ipsam, bifariámque diuisæ, rectam lineam transmissam per hoc punctum contactus, & cuiuslibet accommodatarum punctum medium, transire etiam per reliquarum puncta media, & esse sectionis diametrum: & in coroll. nostro 5. rectam lineam traiectam per puncta media duarum quarumlibet ordinatim applicatarum, transire quoque per reliquarum puncta media, & punctum contactus, & esse sectionis diametrum: tùm in coroll. nostro 6. rectam lineam ex centro sectionis eductam ad punctum vnum medium prædictarum linearum ordinatim applicatarum, incedere etiam per reliquarum puncta media, & punctum prædictum contactus, & esse sectionis diametrum: Denique in coroll. nostro 7. In omni sectione coni, rectas omnes lineas in ipsis accommodatas æquidistantes tangenti; esse ordinatim applicatas diametro incedenti per contactum, & bifariàm sectas ab ipsa diametro.

De rectis lineis secantibus sectiones conicas, hæc noua proponimus. Primum quidem coroll. nostro 1. ad prop. 18. si recta linea sectionem conicam curuam secet in duobus punctis, & sumatur punctum intra sectionem & extra lineam eius curuam, per quod recta linea æquidi-

 stans

ſtans ipſi ſecanti agatur; producta vtrimque eidem ſectioni occurret duobus in punctis: idemque accidet ſi punctum ſumatur in linea curua ſectionis, modò punctum aſſumptum non ſit extremum vnum datæ ſecantis. Et in coroll. noſtro 2. ad eandem prop. 18. ſi recta linea diametrum Parabolæ, ellipſeos, & circuli ſecet intra ipſam ſectionem; producta in vtramque partem conueniet cum linea curua ſectionis ex vtraq; parte. Et in coroll.noſt.3.ad eandem prop.18.ſi recta linea ſectionem coni contingat in vnico tantùm puncto; recta linea ex quolibet puncto lineæ curuæ ſectionis educta parallela illi tangenti, occurret alteri puncto ſectionis; verùm in ellipſi & circulo punctum aſſumptum non debet eſſe extremum diametri aliud ab puncto contactus dati. Et coroll. noſtro ad prop. 23. ſi circulum recta linea ſecet inter duas coniugatas diametros; producta, cum vtraque illarum extra ſectionem conueniet. Et in coroll. noſtro 2. ad prop. 24. ſi Parabolen vel Hyperbolen recta linea in duobus punctis ſecet, quorum vnus ſit vertex diametri,producta vltra illum verticem non conueniet in alio puncto cum diametro extra ſectionem. Et coroll. noſtro 2. ad prop. 28. ſi recta linea vnam oppoſitarum ſectionum ſecet duobus in punctis; ſumatur autem punctum intra alteram ſectionem, & per ipſum recta linea dictæ ſecanti æquidiſtans ducatur; producta ad vtraſque partes cum ſectione conueniet.

Ex occaſione collegimus in corollarijs noſtris ad prop. 42. 43. & 45. nonnulla circa æqualitatem & differentias figurarum nonnullarum rectilinearum, & mixtilinearum ex rectis & curuis ſectionum. Videlicet in corollario noſtro ad prop. 42. ſi Parabolen recta linea contingat conueniens cum diametro eius, & ab tactu recta linea ordinatim applicetur dictæ diametro; Triangulum reſultans erit æquale parallelogrammo ſub dicta recta linea ordinatim applicata, & ſub portione dictæ diametri inter applicatam & verticem dictæ diametri datæ. Et in coroll. noſtro 2. ad eandem prop. 42. ex prima figuratione & demonſtratis, conſtat parallelogrammum CF eſſe æquale ſexilatero EACHFD: tùm in coroll. noſtro 3. ad eandem prop. 42. ex eadem prima figuratione ac demonſtratis, conſtat ICD triangulum mixtilineum eſſe æquale trapezio mixtilineo AEDC: tum in coroll. noſtro 4. eiſdem datis, rectaque FDI ſecante in K rectam AC, triangulum KIC, eſſe æquale trapezio AEDK: tùm coroll. noſtro 5. eiſdem datis, triangulum mixtilineum ABC eſſe æquale triangulo mixtilineo GBC: tùm in coroll. noſtro 6. eiſdem datis & oſtenſis, & ſecante recta BG, rectam AC in L, triangulum ABL eſſe æquale triangulo CGL. Et in coroll. noſtro 1. ad prop. 43. aduertimus differentiam triangulorum CLB, CMK, eſſe trapezium LBKM. tùm triangulum GHK eſſe æquale trapezio LBKM, in coroll. noſtro 2. Tùm in corollario noſtro 3. in primis figurationibus & ſecante recta BL, rectam

GH

G H in I, esse triangulum H B I æquale quadrilatero L I G M. Tum in corollario nostro 5. in circulo triangulum E C D esse æquale triangulo B C L; & simile. Et in corollario nostro 1. ad prop. 45. in Hyperbola triangulum B E F, æquale esse triangulis simul sumptis G H F, C L H: tùm in corollario nostro 2. In ellipsi & circulo triangulum C L H maius esse quàm triangulum B E F, triangulo F G H.

ARGVMENTVM LIBRI SECVNDI.

APollonius hunc librum suum secundum Eudemo eidem Geometræ præstantissimo & Amicissimo per Apollonium filium diligenter perlegendum, & communicandum cum peritis, nominatim verò Philonidæ Geometræ transmisit; vti hac epistola sua ab Eutocio producta constat. Apollonius Eudemo S. D. Si vales bene est; ego quidem satis commodè habeo. *Apollonio filio meo dedi, vt ad te perferret secundum librum conicorum, quæ à nobis conscripta sunt. Tu eum diligenter percurres, & communicabis cum ijs, qui eo tibi digni videbuntur: Philonidæ etiam Geometræ, quò cum tibi Ephesi amicitiam conciliaui, si quando in isthæc Pergami loca venerit, legendum dabis. Et tu cura vt valeas.* Quis autem scopus ei fuerit in hoc libro, aperuit in vniuersum epistola sua prima ad eundem Eudemum, & in nostra ad Lectorem admonitione relata, his verbis. *Secundus liber tractat ea quæ attinent ad diametros & axes sectionum, & ad illas lineas quæ cum sectione non conueniunt*, quæ à Græcis *ἀσύμπτωτοι* appellantur; *tùm de alijs differit, quæ & generalem & necessariam vtilitatem ad determinationes afferunt.* Continentur in hoc libro propositiones Authoris tres suprà quinquaginta; & vnicum eius ad propositionem 14. corollarium seu consectarium. Nos verò lemmata præmisimus trigintaquinque; tria ex Pappo Alexandrino, tria alia ex Eutocio, vnicum ex Federico Commandino; reliqua verò viginti octo, nostra sunt: sed & nostras definitiones numero tredecim adiunximus; & corollaria nostra passim addidimus centum quinquaginta; duodecim videlicet inter lemmata; & centum triginta octo inter propositiones; denique quatuor conclusiones ad propositionem quadragesimam nonam proprias adiecimus.

Quos verò fines Apollonius in hoc libro particulares sibi proposuerit, Accipe. Primum lineas asymptotos in Hyperbola, oppositisque sectionibus, etiamque coniugatis prodere; earumque passiones diuersas inquirere: Quænam autem sint lineæ asymptoti, prima propositione

breuiter indicat sic. *At vero in septimo decimo asserit Apollonius rectam lineam quæ per verticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, extra sectionem cadere. In decimo octauo lineam quæ vtcumque contingenti æquidistans intra sectionem ducitur, ipsam secare. In decimo nono, lineam quæ ducitur ab aliquo puncto diametri, ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conuenire. In vigesimo, & vigesimo primo, lineas in sectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter sese habeant; itemque diametri portiones, quæ ab ipsis fiunt. In vigesimo secũdo, & vigesimo tertio, tractat de linea quæ in duobus punctis sectioni occurrit. In vigesimo quarto, & vigesimo quinto, de ea quæ ipsi occurrit in vno puncto tantùm; hoc est de linea, quæ sectionẽ contingit. In vigesimo sexto de ea quæ diametro Parabolæ & Hyperbolæ æquidistans ducitur. In vigesimo septimo de linea secante Parabolæ diametrum, quippe quæ ex vtraque parte sectioni occurrat. In vigesimo octauo, de ea quæ æquidistans ducitur contingenti vnam oppositarum sectionũ. In vigesimo nono, de ea quæ per centrum oppositarum sectionum transiens producitur. In trigesimo de linea transeunte per centrum ellipsis, & oppositarum sectionum, quæ producta, à centro bifariàm diuiditur. In trigesimo primo, de linea Hyperbolen contingente, quæ quidem diametrum secat inter centrum & verticem sectionis. In trigesimo secundo, trigesimo tertio, trigesimo quarto, trigesimo quinto, trigesimo sexto, de lineis contingentibus agitur. In trigesimo septimo, de contingentibus, & de ijs quæ à tactu applicantur in Hyperbola & ellipsi. In trigesimo octauo, de contingentibus Hyperbolen & ellipsim, quo pacto se habeant ad secundam diametrum. In trigesimo nono & quadragesimo, de ijsdem agit, compositas ex his proportiones inquirens. In quadragesimo primo, de parallelogrammis descriptis ab applicata, & ea quæ ex centro Hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo secundo, asserit triangulum in Parabola ex contingente & applicata factum, æquale esse ei parallelogrammo, quod cùm æqualem altitudinem habeat, in dimidia basi constituitur. In quadragesimo tertio inquirit in Parabola & in ellipsi, quomodo sese habeant triangula, quæ à contingentibus & applicatis fiunt. In quadragesimo quarto, idem inquirit in oppositis sectionibus. In quadragesimo quinto, itidem in secunda diametro Hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo sexto, de alijs Parabolæ diametris, quæ sunt post diametrum principalem. In quadragesimo septimo, de alijs diametris Hyperbolæ & ellipsis. In quadragesimo octauo, de alijs diametris oppositarum sectionum. In quadragesimo nono, de lineis iuxta quas possunt applicatæ ad alias Parabolæ diametros. In quinquagesimo, de ijsdem in Hyperbola & ellipsi. In quinquagesimo primo, de ijsdem, in oppositis sectionibus. Itaque cùm hæc scripsisset, addidissetque epilogum quendam, in quinquagesimo secundo, problema illud ostendit: quomodo Parabole in plano describatur. In quinquagesimo tertio, quomodo describatur Hyperbole. In quinquagesimo quarto, quomodo ellipsis. In quinquagesimo quinto, quomodo oppositæ sectiones. In quinquagesimo sexto, quomodo describantur oppositæ sectiones illæ, quas coniugatas appellamus.* Hæc ex Eutocio locis suprà laudatis.

Age verò ex proprijs depromamus admirabilem Apollonij in primis sexdecim huius libri propositionibus contextum, in quibus ortum & generationem sectionum conicarum; tùm etiam diametrorum

propriarum ipsis; tùm etiam rectarum linearum ordinatim illis diametris applicatarum; tùm rectarum linearum iuxta quas possunt ipsæ ordinatim applicatæ diametris, seu rectorum laterum; deniquesecundarum diametrorum, fœlicissimè manifestat; & necessaria præmittit vel inserit omnia tàm in definitionibus quàm in præuijs propositionibus ad euidenter demonstrandum propositum; videlicet originem trianguli rectilinei in propositione tertia; circuli verò in propositione quarta & quinta; Parabolæ in vndecima; Hyperbolæ in duodecima; Ellipseos in decima tertia; oppositarum sectionum in decima quarta: secto cono beneficio vnius vel duorum planorum distinctorum. Et quia opus habebat quædam demonstrare de lineis rectis tàm in superficie coni, quàm intra ipsam, quin etiam extra eandem; tùm etiam de rectis lineis ordinatim applicatis ad alias rectas, vt indicaret diametros & axes ipsarum conicarum sectionum quæ ipsas admittunt. Et quia trianguli illius rectilinei ortum in cono aduertit esse necessarium ad alias prædictas omnes sectiones coni patefaciendas, & hanc generationem trianguli dependere ab rectis lineis in superficie coni & intra ipsam existentibus; ideò in propositione prima ostendit rectas omnes lineas ab coni vertice ad quodcumque aliud eiusdem superficiei punctum ductas, in ipsamet superficie sustentari: alias verò quascumque ab puncto quolibet superficiei ad quodlibet aliud punctum eius, (modò recta illa linea copulans prædicta duo puncta ad verticem non pertineat producta vel non producta,) intra superficiem ipsius coni extendi, productisque vlterius extra illam procedere, propositione secunda demonstrat. Quare secto cono per verticem eius & interiora acto si concipiatur hoc planum vndequaque productum vltra superficiem & basim dicti coni; secabit etiam superficiem conicam, & basim circularem coni: cumque hæc basis sit superficies plana, sectio communis huius plani circularis & plani secantis erit recta linea terminata duobus punctis circumferentiæ circuli sectæ, iuxta prop. 3. lib. 11. elem. sustentata tàm in plano secante, quàm in circulo secto, prout requirit natura sectionis communis planorum: Cumque in hoc plano secante conum penetrante ipsum per verticem, obtineamus punctum verticis coni imminens desuper prædictæ rectæ lineæ; ab hoc puncto ad extrema duo puncta prædictæ rectæ poterimus concipere transmissas duas rectas lineas, quæ per coroll. post. 2. ad prop. 7. lib. 11. element. sustentabuntur in plano ipso secante in quo existunt tàm punctum verticis coni, quàm alia duo puncta terminantia sectionem linearem communem plano secanti & circulo secto; ideoque triangulum rectilineum efformabunt: sed & istæ duæ rectæ seu duo latera trianguli huius adæquabuntur rectæ lineæ producentis suo motu superficiem conicam, iuxta def. 1. inter primas, alioquin duæ rectæ lineæ superficiem concluderent, contra 14. axiom. lib. 1. element. terminabunturque versus basim coni, in extremis rectæ alterius

rius lineæ quæ est communis sectio plani secantis & plani circularis baseos coni; igitur quandoquidem rectalinea efficiens conicam superficiem in quocumque instanti concepta quiescere sustentatur in ipsa coni superficie, duo latera dicti trianguli existent in eadem superficie conica, basisque trianguli existet in plano circularis baseos coni: Cumque tres rectæ lineæ efficientes dictum triangulum ostensæ sint esse in plano secante conum per verticem, & in superficie curua coni duæ, tertiaque in plano basis eius; ipsum triangulum erit communis sectio plani secantis prædicti, & coni secti, sicuti proposuit Apollonius propositione 3. Huiusmodi autem triangulo vtitur Author ad ostendendam in propositione quarta sectionem coni factam plano parallelo basi eius, esse circulum, centrum obtinentem in axe coni secti; figuram verò solidam conclusam hoc circulo & superficiei coni parte verticem versus, esse alterum conum: & propositione quinta sectionem aliam circulum esse quam vocat subcontrariam, effectam ab plano perpendiculariter posito supra prædictum triangulum, & secante conum, & ab dicto triangulo triangulum aliud auferente ex verticis parte simile quidem prædicto triangulo quod per axem rectoque ad basim coni, subcontrariè verò positum. Hoc idem triangulum adhibet ad sectiones alias coni manifestandas, Parabolam nimirum in propos. 11. Hyperbolam in 12. Ellipsim in 13. sectiones denique oppositas in 14. Verùm prius in propositione 6. docet rectas omnes lineas ab quibuscumque punctis in superficie conica sitis extra trianguli prædicti per axem latera ductas æquidistantes rectæ lineæ alteri otthogoniæ ab circumferentia baseos coni ad eius diametrum, occurrere plano illius trianguli, & vlteriùs extensas ad alteram superficies partem conicæ peruenire, & bifariàm omnes diuidi in punctis proprijs dicti trianguli. Præterea tradit propositione 7. secto cono beneficio plani per axem applicati, vnde triangulum resultat per prop. 3. tùm altero plano secante planum baseos secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis ad basim trianguli non productam vel productam, existentibus hisce duabus rectis angulum rectum efficientibus in eodem plano baseos circularis coni non producto, vel in infinitum circumquaque diducto; lineas omnes rectas ex punctis lineæ sectionis resultantis in superficie coni ab sectione facta per secundum hoc planum, parallelas prædictæ perpendicularis rectæ ad basem trianguli prædicti, incurrere in rectam lineam quæ est communis sectio plani trianguli per axem, & plani prædicti secundi secantis conum, vlteriusque protensas ad alteram eiusdem lineæ sectionis partem peruenire, & bifariàm omnes diuidi ab dicta recta linea in quam incurrunt; & quidem ad angulos rectos ab ea diuidi, si conus diuisus fuerit rectus, vel scalenus modò triangulum per axem sit basi coni orthogonium; ad angulos verò obliquos si scalenus obtineat triangulum per axem ad basim propriam obliquum: Vnde duo colligit; primum, rectam illam lineam secantem

bifa-

bifariàm prædictas omnes rectas, esse iuxta def. 10. diametrum sectionis, quia illas rectas æquidistantes rectæ alteri constitutæ in eodem plano baseos coni, orthogoniæ basi circulari coni productæ vel non productæ bifariàm diuidit; Alterum, fieri posse, vt prædictæ omnes rectæ parallelæ bifariàm quidem diuidantur ab diametro sectionis, non autem ad angulos rectos. Hinc transitus fit ad octauam propositionem quæ fundamentum est ad probandam Parabolen & Hyperbolen sectiones conicas posse in infinitum ad partes vertici contrarias protendi; earumque diametros etiam in infinitum extendi intra ipsarum sectionum locum. Nona verò propositio est circa sectionem coni plano conuenientem cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque basi æquidistet, neque subcontrariè ponatur; illamque sectionem affirmat esse non posse circulum; determinabitque propositione vndecima Ellipsim esse. Et ne quis imposterum dubitaret rectas in sectionibus conicis ductas ab puncto vno ad aliud ipsarum, ad aliud vel aliud earumdem ipsarum punctum pertinere posse; propositione decima tradit, si in omni sectione duo puncta sumantur, rectam lineam huiusmodi puncta duo copulantem, intra sectionem cadere, productam verò extra illa duo puncta, extra sectionem procedere semper; vel in directum ipsi constitutam aliam rectam, extra sectionis limites esse. Iam verò explicata sectione coni triangulari in prop. 3. & circulari in propositionibus 4. & 5. aggreditur in propositione vndecima determinare Parabolam eamque describere per causas & proprietates, secto nimirum cono primùm plano per axem, & altero secundo plano secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; & sit recta linea quæ est sectio communis planorum prædictorum, trianguli, & secundi secantis, hoc est iuxta prop. 7. & eius coroll. 1. diameter sectionis vni laterum trianguli per axem æquidistans; rectaque linea quæ à sectione coni ducitur parallela communi sectioni plani secantis & basis coni vsque ad prædictam sectionis diametrum; possit spatium æquale contento lineâ quæ ex diametro abscissa inter ipsam & verticem sectionis interijcitur, & alia quadam quæ ad lineam inter coni angulum & verticem sectionis interiectam, eam proportionem habeat, quam quadratum basis trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus eius lateribus continetur. In duodecima propositione stabilit causas & nonnullas proprietates definientes Hyperbolen, videlicet si Conus plano secetur per axem; tum altero plano findente basim secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; & sectionis diameter producta cum vno latere trianguli per axem, extra sectionem coni conueniat: & recta linea quæ à sectione ducitur æquidistans communis sectioni plani secantis secundi & basis coni vsque ad sectionis diametrum, possit spatium adiacens lineæ ad quam ea quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangu-

lum, eandem proportionem habeat, quam quadratum lineæ quæ diametro parallela à vertice coni vſque ad baſim trianguli ducitur, ad rectangulum baſis partibus quæ ab ea fiunt contentum, latitudinem habens lineam quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam & verticem ſectionis interiectam; excedenſque figura ſimili & ſimiliter poſita ei quæ continetur linea extra triangulum ſubtenſa, & ea iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum applicantur. Ad hæc in propoſitione decima tertia profert cauſas & quaſdam affectiones ad ellipſim definiendam, vtpote ſi Conus plano ſecetur per axem, & ſecetur altero ſecundo plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque baſi æquidiſtet, neque ſubcontrariè ponatur; planum autem in quo eſt baſis coni, & ſecans planum ſecundum conueniant in recta linea quæ ſit perpendicularis vel ad baſim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur: Rectaque linea quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni planorum vſque ad diametrum ſectionis, poſſit ſpatium adiacens lineæ ad quam ſectionis diameter eam proportionem habeat quam quadratum lineæ diametro æquidiſtantis à vertice coni vſque ad trianguli baſim ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus, quæ inter ipſam & rectas trianguli lineas interijciuntur, latitudinem habens quæ ex diametro ab ipſa abſcinditur vſque ad verticem ſectionis, deficienſque figura ſimili & ſimiliter poſita ei quæ diametro & linea iuxta quam poſſunt, continetur. Itaque definitiones trium coni ſectionum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipſeos includunt duo plana ſecantia conum; Primum, ex cuius ſectione reſultet triangulum per axem: Alterum ſecans conum, & dictum triangulum; ita vt trianguli huius & plani ſecantis ſectio communis linearis, ſit diameter ſectionis reſultantis in cono, factæque ab ſecundo plano ſecante & applicato ſecundum rectam lineam in plano baſeos coni ſecti perpendicularem baſi dicti trianguli per axem; tùm etiam includunt rectam aliam lineam inueniendam ad quam alia recta linea proportionem habeat quam quadratum proprium in ſingulis dictis ſectionibus, ad rectangulum aliud determinatum in eiſdem proprijs ſectionibus: Denique comprehendunt alias rectas à ſectione propria ductas ad diametrum propriam æquidiſtantes prædictæ rectæ lineæ quæ eſt ſectio communis baſeos coni & ſecundi plani ſecantis conum & efficientis ſectionem, quæ poſſint rectangula comprehenſa ſub portione diametri inter ipſas & verticem, & ſub recto latere vel recta linea inuenienda, vel partibus eius, vel producta illa recta linea inuenienda; vnde quadrata prædictarum rectarum applicatarum ad diametrum, vel æqualia erunt dictis rectangulis; vel excedent, vel deficient dicta rectangula figuris ſimilibus rectangulum aliud ſub proprijs lateribus determinatum. Verumtamen in Parabola, diameter parallela erit vni laterum trianguli præmoniti per axem; & in Hyperbola ſecabit ambo latera dicti trianguli, vnum non

produ-

productum, aliud verò vltra verticem extensum; & in ellipsi vtrumque non productum vltra verticem. Suppositis autem ijs quæ propositione duodecima de Hyperbola tradiderat, ortum & generationem sectionum oppositarum aperit propos. 14. sectis plano vno superficiebus duabus conicis ad verticem coaptatis iuxta definitionem primam, sed non per hunc verticem; in vtraque enim superficie resultare ait hyperbolas oppositas duas eandem diametrum sibi vendicantes transuersam, lateraque æqualia recta, communeque figuræ latus transuersum. Positis autem ijs quæ de ellipsi in propos. 13. docuit, tradit in propos. 15. fundamentum reperiendi diametrum coniugatam datæ in ellipsi, ex transuerso & recto latere; tùm etiam datis duabus diametris coniugatis, recta eorum latera reperiendi. Decima verò sexta propositione, assignat methodum inuestigandi secundam diametrum seu coniugatam datæ in oppositis sectionibus. Denique his stabilitis aggreditur definitiones secundas; centri nimirum in Hyperbola & ellipsi, & oppositis sectionibus; tùm linearum rectarum ex centro; tùm secundæ diametri vel coniugatæ in prædictis sectionibus. Atque hæc sint satis de artificiosa Apollonij architectura in primis suis sexdecim propositionibus circa originem sectionum conicarum, diametrorumque propriarum, & rectarum linearum ipsis ordinatim applicatarum: fatemur autem nos in reliquis propositionibus huius libri similem texturam minimè dignoscere, quam fortè alij oculatiores dispicient; verùm adnotamus eum in eisdem reliquis propositionibus vsque ad 51. inclusiuè tradere modum dignoscendi rectas lineas tangentes sectionum conicarum lineas curuas, tùm etiam secantes, tùm etiam diametros transuersas & rectas, tùm etiam rectas lineas ordinatim ipsis applicatas: Prætereà nonnullas prædictarum rectarum linearum affectiones ostendit, tam seorsim sumptarum, quàm cum ordine ad alias. Demùm postremis quinque propositionibus quæ praxim inuoluunt, docet modum describendi in plano, sectionum prædictarum lineas curuas, reuocando seu potius euocando ipsas ab conis in quibus ortum suum habuerunt; & ex principijs datorum Euclidis subtilissimè praxes demonstrat, vti videre est in Commentario Eutocij Græco, vel Latinitate donato ab Federico Commandino.

Circa ea quæ in lemmatibus, & corollarijs, & considerationibus nostris addidimus, hæc accipe.

Imprimis circa ipsas sectiones conicas. Determinamus lemmate secundo sectionem communem quarumcumque superficierum esse lineam: planæ verò & curuæ prout curua est & non angulosa, esse lineam curuam, lemmate tertio; quæ continebit spatium in casu corollarij nostri primi, 3ᵢ. & 4ᵢ. ad illud lemma; vel non comprehendet figuram in casu corollarij nostri secundi; & in casu lemmatis quarti, quando planum secat superficiem curuam prout curua est & non angu-

la, ſimulque aliud planum terminans vnà cum illa curua ſuperficie ſolidum vnum, eſſe lineam curuam & rectam ſpatium planum continentes; & in corollarijs noſtris ad hoc lemma, 2°. & 3°. ſpeciatim hæc ſpatia in ſectione coni per planum, quænam ſint aſsignamus. Lemmata noſtra ab 24. ad 45. incluſiuè ſunt ad breuiorem & faciliorem demonſtrationem originis in cono ſectionum conicarum Paraboles, Hyperbôles, & Ellipſeos; quarum naturam definitionibus particularibus concluſam ex antiquitatis ruderibus non habemus, ſicuti etiam laterum earum tranſuerſi ac recti in genere & ſpecie, ſectionis ſubcontrariæ in cono, ſectionum oppoſitarum, ſectionumque coniugatarum oppoſitarum, tùm etiam circuli generati in cono. Porrò has definitiones ſupplemus in definitionibus ſecundis: Parabolæ quidem per cauſas originarias in cono, & aliquas proprietates, in definitione quinta; Hyperbolæ in definitione ſeptima; Ellipſeos in definitione nona; ſectionum oppoſitarum in definitione ſecunda numeri decimi; circuli in definitione decima ſexta. Quia verò aduertimus ad probandam rectè factam delineationem Paraboles, Hyperboles, Ellipſeos, ſectionum oppoſitarum, earumque coniugatarum, etiamque circuli; nimis prolixum eſſe & operoſum vti prædictis definitionibus, quæ ſupponunt delineationes huiuſmodi reuocandas eſſe ad conos vnde profluxerunt, vti videre eſt in modo demonſtrandi figurationes conicarum ſectionum, quem adhibet ex Apollonio Eutocius in poſtremis huius libri propoſitionibus: nos harum ſectionum definitiones alias inter ſecundas protulimus formales, Parabolæ quidem definitione vigeſima prima, Hyperbolæ vigeſima ſecunda, Ellipſeos 23. ſectionum oppoſitarum vigeſima quarta, circuli vigeſima quinta, ſectionum denique oppoſitarum coniugatarum trigeſima ſecunda; quibus vtimur ad oſtendendam breuiter & facilè praxim deſcriptionis linearum illarum Paraboles, Hyperboles, Ellipſeos, aliarumque laudatarum, in poſtremis huius libri propoſitionibus. Sed & diametros harum ſectionum, tranſuerſaque latera & recta originalia definiuimus ex cauſis proprijs; & peculiari modo formali eadem recta latera ab definitione 26. ad 30. incluſiuè inter ſecundas. ſuper his definitionibus ad finem illarum adiungimus quadraginta quatuor conſiderationes noſtras, in quibus multa proferimus ad clariorem diſtinctioremque prædictarum ſectionum intelligentiam conſequendam; & in vltimis quinque ex dato axe, & latere eius recto proprio, eas in plano deſcribimus; non autem ex data quacumque alia diametro & latere eius recto, quod vniuerſalius eſt, & ad praxim reducimus in propoſitionibus 52. 53. 54. 55. 56. adnotando in corollarijs noſtris nouem ad vltimam propoſitionem 56. & perpendendo conditiones ab Apollonio allatas circa duas datas rectas lineas ad prædictas ſectiones conicas in plano depingendas. Definitionibus noſtris laterum rectorum ſectionum conicarum ex cauſis originarijs non vtimur, ſed forma-

formalibus; propter easdem rationes allatas circa definitiones ipsarummet sectionum causales. In corollario nostro sexto ad propos. 11. dubitationi satisfacimus cur sectio conica Parabolica, ita vocetur; & in corollario nostro decimo ad propos. 12. quare sectio Hyperbolica; & in corollario nostro tertio ad propos. 13. cur sectio alia conica Elliptica, Ellipsis nuncupetur; & in corollario nostro 9. ad propos. 14. cur duæ Hyperbolæ generatæ in duabus superficiebus conicis ad verticem communem consistentibus iuxta def. 1. inter primas, sectiones oppositæ ab Apollonio sint appellatæ.

De sectione coni per plana, docemus corollario nostro 1. ad prop. 3. & 4. si planum secans fuerit applicatum axi eius, semper sectionem communem plani huiusmodi & baseos circularis coni esse diametrum ipsius baseos; alteram verò eius chordam si planum secans conum per verticem non fuerit applicatum axi: & corollario nostro 2. ad propos. 4. ostendimus secto cono per planum parallelum basi eius, resultare conum similem secto: & corollario nostro 1. ad propos. 5. assignamus methodum conum quemcumque secandi plano per axem eius recto ad basim ipsius circularem; & corollario nostro 3. ad eandem propos. 5. Planum datum findendi plano alio orthogonio ipsi: & in corollario nostro 2. ad eandem propos. 5. problema proponimus de triangulo dato scaleno abscindere aliud triangulum simile, verticem habens communem cum dato, sed subcontrariè positum. Et in corollario nostro 1. ad propos. 14. congerimus theorema geometricum de sectione planorum, Duobus planis se mutuò secantibus, puncta omnia communia ipsis existere in recta linea quæ est sectio communis eorum. Denique in corollario nostro 3. ad proposit. 21. demonstramus lineas curuas Parabolæ vel Hyperbolæ in infinitum productas ad partes contrarias vertici iuxta propos. 8. distare posse infinito syncategorematicè interuallo ab diametro quacumque propria, & ab inuicem diuaricari.

Circa rectas lineas contingentes quamlibet coni sectionem curuam, hæc ab corollarijs nostris accipe. Recta linea ducta ab vertice sectionis curuæ conicæ, seu ab extremo diametri eius sito in linea curua sectionis, æquidistans rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad ipsam datam diametrum; sectionem ipsam contingit in vnico tantùm puncto, nimirum verticis; corollario nostro ad prop. 17. Et si contingenti rectæ sectionem, ducatur intra eius locum ab quolibet puncto lineæ eius curuæ parallela recta linea, occurret alteri puncto lineæ curuæ sectionis; sed in ellipsi & circulo punctum assumptum non debet esse extremum diametri aliud ab puncto contactus dati, corollario nostro 3. ad prop. 18. Tùm recta linea contingens Parabolen vel Hyperbolen, non occurret diametro Parabolæ vel Hyperbolæ extra sectionem, si punctum occursus sit vertex diametri, corollario nostro 1. ad prop. 24. & in ellipsi & circulo recta linea contingens sectionem, occurret diametro extra

sectionem si non transeat hæc diameter per dictum punctum contactus, vel non sit parallela rectæ contingenti, corollario nostro 2. ad prop. 25. & si recta linea ex centro sectionum oppositarum quantumcumque producta; non attingere possit alteram sectionum, neque etiam aliam attinget, corollario nostro ad prop. 29. & in omni sectione coni si recta linea contingat lineam eius curuam & non secet, nulla alia introduci poterit ipsammet sectionem contingens & non secans in eodem puncto contactus, corollario nostro 3. ad prop. 32. & nulla recta linea contingens sectionem conicam, duo puncta sectionis contactæ transfigere potest, corollario nostro 2. ad prop. 36. & si vnam oppositarum sectionum recta linea contingat, & ab tactu ducatur recta linea per centrum vsque ad alteram sectionem; quæ ex hoc puncto huius alterius sectionis ducitur parallela rectæ prædictæ contingenti, sectionem ipsam continget in illo eodem puncto, corollario nostro 1. ad propos. 44. & si ab puncto contactus vnius rectæ lineæ contingentis vnam oppositarum sectionum ducatur diameter illarum occurrens oppositæ sectioni in vno puncto, in quo sit altera recta contingens ipsam sectionem; hæ duæ rectæ lineæ contingentes erunt parallelæ & æquales inter se, corollario nostro 2. ad prop. 44. & ex tribus propositionibus 46. 47. 48. colligitur verum esse quod monuimus in explicatione definitionis 12. inter primas; videlicet vnam ex lineis rectis cui debent esse parallelæ rectæ lineæ omnes in qualibet sectione coni, bifariàm diuisæ ab diametro sectionis conicæ, esse rectam lineam contingentem in vnico tantum puncto, quod in citatis propositionibus determinatur esse vertex diametri, corollario nostro 3. ad prop. 48. huius libri primi.

Quod spectat ad axes, diametros, & rectas lineas ordinatim applicatas ipsis; sequentia monemus ex nostris corollarijs. Primum quidem adnotes velim quinque rectas lineas esse, quibus parallelæ esse debent rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ ad sectionum conicarum diametros, ex dictis in expositione ad 12. definit. inter primas. Tùm rectas omnes lineas vtrimque terminatas in lineis curuis sectionum, perpendicularesque axibus proprijs illarum, esse ordinatim applicatas ad illos axes proprios; ex corollario nostro ad definit. 18. inter primas. Tùm si ex centro lineæ curuæ sectionis excitetur in eius diametro quæ sit axis eius, recta linea perpendicularis, esse axem coniugatum eidem, ex corollario nostro ad 19. definit. inter primas. Tùm vnam esse posse ex præmonitis lineis rectis ad 12. definit. inter primas, rectam lineam quibus debent esse parallelæ rectæ omnes lineæ in sectione accommodatæ & bifariàm sectæ, ad determinandam diametrum sectionis iuxta defin. 10. inter primas; sectionem communem plani secundi secantis & efficientis sectionem, & plani baseos circularis coni, ex corollario nostro 2. ad prop. 7. Tùm prædictam rectam, vnamque ex rectis lineis quibus parallelæ esse debent rectæ lineæ accommodatæ in sectionibus, & bifariàm

fariàm sectæ, ad determinandam diametrum sectionis iuxta defin. 10. inter primas, posse esse extra circularem basim coni in plano eius, ipsius circumferentiam contingentem in puncto vno, vel non contingentem, vel intra circulum ipsum, ex corollario nostro 3. ad cit. prop. 7. Præterea diametrum originariam, de qua sermo est in prop. 8. nunquam occurrere etiam productam in infinitum versus partes contrarias vertici, lineæ curuæ ipsius sectionis etiam productæ in infinitum versus partes prædictas; eamque solùm secare in puncto verticis, & ab eo progredi versus partes assignatas intra locum sectionis; ex corollario nostro ad prop. 8. Insuper diametrum Paraboles originariam posse in infinitum augeri versus partes contrarias vertici, & solùm secare ipsius lineam curuam in vnico puncto verticis prædicti, ex corollario nostro 3. ad prop. 11. & rectam omnem lineam ex punctis lineæ curuæ Paraboles, perpendicularem ad diametrum eius, cuius mentio fit in cit. prop. 11. esse mediam proportionalem inter eius latus rectum, & portionem dictæ diametri inter verticem eius & hanc rectam perpendicularem; ex corollario nostro 5. ad prop. cit. 11. Et omnem rectam lineam ex punctis lineæ curuæ Hyperboles ad eius diametrum originariam eductam, & æquidistantem sectioni communi plani secundi secantis & efficientis Hyperbolen, & circularis baseos coni secti, esse mediam proportionalem inter latera rectanguli, de quo agitur in prop. 12. ex corollario nostro 8. ad ipsam prop. 12. & infinitas esse alias diametros in Hyperbola diuersas ab eius originaria, se mutuò secantes in puncto quod est extra eius locum & lineam curuam, admittentes sua propria latera; ex corollario nostro 11. ad cit. prop. 12. Diametrumque originariam Hyperboles extendi posse in infinitum intra eius locum, & nunquam occurrere alteri puncto lineæ eius curuæ, & solum eam secare in puncto verticis; ex corollario nostro 12. ad cit. prop. 12. Ad hæc diametrum originariam Ellipseos productam si opus sit, secare basim trianguli per axem; ex corollario nostro 6. ad prop. 13. tùm esse axem ellipseos si planum secans primum sit perpendiculare basi coni, ex corollario nostro 7. ad cit. prop. 13. & infinitas esse diametros in ellipsi diuersas ab originaria, propria latera sibi vendicantes, ex corollario nostro 9. ad cit. prop. & omnes ellipseos diametros se mutuò secare in centro eius; & bifariàm, ex corollario nostro 10. & si diameter originaria ellipseos secet basim trianguli per axem non productam, circumferentiam ellipseos non esse integram, sed posse perfici, ex corollario nostro 11. quod si diameter eius originaria attigerit extremum baseos trianguli per axem, tunc circumferentiam ellipseos esse integram, ex corollario nostro 12. & rectam lineam quamlibet ordinatim applicatam diametro ellipseos, esse mediam proportionalem inter rectanguli latera, de quo fit mentio in prop. 13. ex corollario nostro 15. ad prop. 13. Denique latus rectum respectu axeos in ellipsi, esse inæquale ipsi axi, ex corollario nostro 16. ad cit. prop. 13.

Tùm infinitas esse diametros sectionum oppositarum diuersas ab originaria, admittentes sua propria latera recta, ex corollario nostro 3. ad prop. 14. & centrum oppositarum sectionum esse extra earum loca, inter vtrasque, ex corollario nostro 4. ad eandem prop. Diametrum verò originariam illarum, esse axem, si planum primum secans fuerit perpendiculare basi coni secti per axem, ex corollario nostro 6. ad eandem prop. cit. 14. Tradimus verò methodum in ellipsi ex data eius diametro & latere eius recto, reperiendi aliam diametrum ordinatim applicatam datæ, in corollario nostro 5. ad prop. 15. & asserimus in corollario nostro 6. ad eandem prop. 15. rectam lineam mediam proportionalem inter diametrum aliquam & eius latus rectum in ellipsi, esse diametrum eiusdem ellipseos ordinatim applicatam datæ initiò diametro. Et in corollario nostro 1. ad prop. 21. rectum latus in ellipsi semper esse inæquale transuerso suo proprio quod sit axis. Et in corollario nostro 2. ad eandem prop. 21. Rectum latus in Hyperbola & oppositis sectionibus esse inæquale transuerso lateri quod sit axis, si sumatur hoc transuersum latus, quatenus ingreditur intra locum ipsarum; posse tamen esse æquale vel inæquale si sumatur terminatum suis proprijs extremis extrà locum ipsarum. Et in corollario nostro 3. ad eandem prop. 21. In Parabola rectum latus esse inæquale cuicumque transuerso. Et in corollario 1. nostro ad prop. 22. ostendimus in Parabola & Hyperbola rectarum linearum ordinatim applicatarum ad quamcumque diametrum ipsarum, viciniorem vertici esse minorem remotiore. Et in coroll. nostro 2. ad eandem prop. 22. diametros ipsarum productas in infinitum ad partes verticibus oppositas nunquam occurrere lineis curuis ipsarum. Et in coroll. nostro 1. ad prop. 23. In ellipsi & circulo rectarum ordinatim applicatarum ad diametrum quamlibet versus vnum verticem & ad easdem centri partes, viciniorem vertici prædicto esse minorem remotiore. Et in coroll. nostro 1. ad prop. 26. probamus Diametrum Parabolæ vel Hyperbolæ in vno tantùm puncto secare lineas earum curuas proprias. Et in corollarijs nostris 2. 3. 4. ad eandem prop. 26. rectas lineas parallelas diametris Paraboles vel Hyperboles, in vno tantùm puncto lineas earum curuas intersecare. Et in corollarijs ad prop. 27. demonstramus quædam de diametris Parabolæ & Hyperbolæ: in 1. quidem diametros Parabolæ se mutuò non intersecare intra ipsam parabolam; sed neque extra ipsam in coroll. 2. & esse parallelas inter se in coroll. 3. At verò diametros Hyperboles se mutuò diuidere extra ipsam in coroll. nostro 4. non autem intra ipsam, in coroll. 5. & non esse parallelas in coroll. vltimo seu 6. In coroll. nostro ad prop. 30. ostendimus in ellipsi orta ex sectione coni, dari posse duas inæquales diametros. Et in coroll. nostro ad prop. 29. rectam lineam ex centro oppositarum sectionum eductam, productamque in infinitum, si non attingat alterutram sectionum, minimè alteri occurrere. Tùm in coroll. nostro 1. ad prop. 31.

rectam

rectam omnem lineam ex centro Hyperboles ad aliquod punctum lineæ eius curuæ extensam, productam vltra hoc punctum, progredi intra locum ipsius Hyperboles: vel eductam ab quolibet puncto supra centrum eius ad aliquod punctum lineæ eius curuæ, productámque ingredi locum eius, in coroll. nostro 2. Asserimus etiam in coroll. nostro 1. ad prop. 46. In Parabola rectas omnes lineas æquidistantes cuilibet eius diametro, & secantes eius lineam curuam, esse diametros eiusdem: & in coroll. nostro 2. aliter demonstramus quàm in coroll. nostro 3. ad prop. 27. diametros omnes Parabolæ esse rectas lineas inuicem parallelas: tùm in coroll. nostro 3. rectas omnes lineas in infinitum vtrimque productas in vnico tantum puncto lineam curuam Parabolæ secantes, esse diametros eius: & in coroll. nostro 4. non omnes rectas lineas æquidistantes intra locum Parabolæ, esse diametros eius: & in coroll. nostro 5. rectas omnes æquidistantes inuicem intra locum Parabolæ, & secantes in vnico tantùm puncto lineam eius curuam, si producantur vtrimque in infinitum, esse diametros eius: denique in coroll. nostro 6. nullam rectam lineam secantem duobus in punctis lineam curuam Parabolæ esse diametrum eius. In coroll. nostro 3. ad prop. 48. colligimus ex propositionibus 46. 47. 48. verum esse quod monuimus in explicatione definitionis 12. inter primas; vnam ex lineis rectis cui debent esse parallelæ rectæ lineæ omnes in qualibet sectione coni, bifariàm diuisæ ab diametro sectionis conicæ, esse rectam lineam contingentem in vnico tantùm puncto; quod in citatis propositionibus determinatur esse vertex diametri. Et in coroll. nostro 4. ad cit. prop. 48. In qualibet sectione coni, etiamque in oppositis sectionibus, si multæ rectæ lineæ fuerint accommodatæ parallelæ vni tangenti sectionem ipsam, bifariàmque diuisæ, rectam lineam transmissam per hoc punctum contactus, & cuiuslibet accommodatarum punctum medium, transire etiam per reliquarum puncta media, & esse sectionis diametrum: & in coroll. nostro 5. rectam lineam traiectam per puncta media duarum quarumlibet ordinatim applicatarum, transire quoque per reliquarum puncta media, & punctum contactus, & esse sectionis diametrum: tùm in coroll. nostro 6. rectam lineam ex centro sectionis eductam ad punctum vnum medium prædictarum linearum ordinatim applicatarum, incedere etiam per reliquarum puncta media, & punctum prædictum contactus, & esse sectionis diametrum: Denique in coroll. nostro 7. In omni sectione coni, rectas omnes lineas in ipsis accommodatas æquidistantes tangenti; esse ordinatim applicatas diametro incedenti per contactum, & bifariàm sectas ab ipsa diametro.

De rectis lineis secantibus sectiones conicas, hæc noua proponimus. Primum quidem coroll. nostro 1. ad prop. 18. si recta linea sectionem conicam curuam secet in duobus punctis, & sumatur punctum intra sectionem & extra lineam eius curuam, per quod recta linea æquidi-

ſtans ipſi ſecanti agatur; producta vtrimque eidem ſectioni occurret duobus in punctis: idemque accidet ſi punctum ſumatur in linea curua ſectionis, modò punctum aſſumptum non ſit extremum vnum datæ ſecantis. Et in coroll. noſtro 2. ad eandem prop. 18. ſi recta linea diametrum Parabolæ, ellipſeos, & circuli ſecet intra ipſam ſectionem; producta in vtramque partem conueniet cum linea curua ſectionis ex vtraq; parte. Et in coroll. noſt. 3. ad eandem prop. 18. ſi recta linea ſectionem coni contingat in vnico tantùm puncto; recta linea ex quolibet puncto lineæ curuæ ſectionis educta parallela illi tangenti, occurret alteri puncto ſectionis; verùm in ellipſi & circulo punctum aſſumptum non debet eſſe extremum diametri aliud ab puncto contactus dati. Et coroll. noſtro ad prop. 23. ſi circulum recta linea ſecet inter duas coniugatas diametros; producta, cum vtraque illarum extra ſectionem conueniet. Et in coroll. noſtro 2. ad prop. 24. ſi Parabolen vel Hyperbolen recta linea in duobus punctis ſecet, quorum vnus ſit vertex diametri, producta vltra illum verticem non conueniet in alio puncto cum diametro extra ſectionem. Et coroll. noſtro 2. ad prop. 28. ſi recta linea vnam oppoſitarum ſectionum ſecet duobus in punctis; ſumatur autem punctum intra alteram ſectionem, & per ipſum recta linea dictæ ſecanti æquidiſtans ducatur; producta ad vtraſque partes cum ſectione conueniet.

Ex occaſione collegimus in corollarijs noſtris ad prop. 42. 43. & 45. nonnulla circa æqualitatem & differentias figurarum nonnullarum rectilinearum, & mixtilinearum ex rectis & curuis ſectionum. Videlicet in corollario noſtro ad prop. 42. ſi Parabolen recta linea contingat conueniens cum diametro eius, & ab tactu recta linea ordinatim applicetur dictæ diametro; Triangulum reſultans erit æquale parallelogrammo ſub dicta recta linea ordinatim applicata, & ſub portione dictæ diametri inter applicatam & verticem dictæ diametri datæ. Et in coroll. noſtro 2. ad eandem prop. 42. ex prima figuratione & demonſtratis, conſtat parallelogrammum CF eſſe æquale ſexilatero EACHFD: tùm in coroll. noſtro 3. ad eandem prop. 42. ex eadem prima figuratione ac demonſtratis, conſtat ICD triangulum mixtilineum eſſe æquale trapezio mixtilineo AEDC: tum in coroll. noſtro 4. eiſdem datis, rectaque FDI ſecante in K rectam AC, triangulum KIC, eſſe æquale trapezio AEDK: tùm coroll: noſtro 5. eiſdem datis, triangulum mixtilineum ABC eſſe æquale triangulo mixtilineo GBC: tùm in coroll. noſtro 6. eiſdem datis & oſtenſis, & ſecante recta BG, rectam AC in L, triangulum ABL eſſe æquale triangulo CGL. Et in coroll. noſtro 1. ad prop. 43. aduertimus differentiam triangulorum CLB, CMK, eſſe trapezium LBKM. tùm triangulum GHK eſſe æquale trapezio LBKM, in coroll. noſtro 2. Tùm in corollario noſtro 3. in primis figurationibus & ſecante recta BL, rectam

GH

GH in I, esse triangulum HBI æquale quadrilatero LIGM. Tum in corollario nostro 5. in circulo triangulum ECD esse æquale triangulo BCL; & simile. Et in corollario nostro 1. ad prop. 45. in Hyperbola triangulum BEF, æquale esse triangulis simul sumptis GHF, CLH: tùm in corollario nostro 2. In ellipsi & circulo triangulum CLH maius esse quàm triangulum BEF, triangulo FGH.

ARGVMENTVM LIBRI SECVNDI.

Apollonius hunc librum suum secundum Eudemo eidem Geometræ præstantissimo & Amicissimo per Apollonium filium diligenter perlegendum, & communicandum cum peritis, nominatim verò Philonidæ Geometræ transmisit; vti hac epistola sua ab Eutocio producta constat. Apollonius Eudemo S. D. Si vales bene est, ego quidem satis commodè habeo. *Apollonio filio meo dedi, vt ad te perferret secundum librum conicorum, quæ à nobis conscripta sunt. Tu eum diligenter percurres, & communicabis cum ijs, qui eo tibi digni videbuntur: Philonidæ etiam Geometræ, quo cum tibi Ephesi amicitiam conciliaui, si quando in isthæc Pergami loca venerit, legendum dabis. Et tu cura vt valeas.* Quis autem scopus ei fuerit in hoc libro, aperuit in vniuersum epistola sua prima ad eundem Eudemum, & in nostra ad Lectorem admonitione relata, his verbis: *Secundus liber tractat ea quæ attinent ad diametros & axes sectionum, & ad illas lineas quæ cum sectione non conueniunt*, quæ à Græcis ἀσύμπτωτοι appellantur; *tùm de alijs differit, quæ & generalem & necessariam vtilitatem ad determinationes afferunt.* Continentur in hoc libro propositiones Authoris tres suprà quinquaginta; & vnicum eius ad propositionem 14. corollarium seu consectarium. Nos verò lemmata præmisimus trigintaquinque; tria ex Pappo Alexandrino; tria alia ex Eutocio, vnicum ex Federico Commandino; reliqua verò viginti octo, nostra sunt: sed & nostras definitiones numero tredecim adiunximus; & corollaria nostra sparsim addidimus centum quinquaginta; duodecim videlicet inter lemmata; & centum triginta octo inter propositiones; denique quatuor conclusiones ad propositionem quadragesimam nonam proprias adiecimus.

Quos verò fines Apollonius in hoc libro particulares sibi proposuerit, Accipe. Primum lineas asymptotos in Hyperbola, oppositisque sectionibus, etiamque coniugatis prodere, earumque passiones diuersas inquirere: Quænam autem sint lineæ asymptoti, prima propositione

tione docet in Hyperbola, duæ nimirùm rectæ lineæ ex centro eius exeuntes versus ipsam Hyperbolen, vna ad vnam eius partem, altera ad aliam, ac transeuntes per extrema rectæ lineæ tangentis ipsam Hyperbolen in vnico tantùm puncto & productæ ex vtraque parte, ita vt quælibet portio huius rectæ tangentis ab puncto illo contactus seu diametro transeuntis per istud punctum contactus, possit figuræ applicatæ dictæ diametro quartam partem: & in secunda propositione ostendit non esse alias huiusmodi asymptotos lineas, quæ angulum ab prædictis contentum diuidant. Tum in propositione decimaquinta affirmat huiusmodi asymptotos communes esse sectionibus oppositis; & in decima septima, communes esse sectionibus coniugatis oppositis. Præterea docet propositione tertia, quamlibet rectam lineam tangentem Hyperbolen productamque vtrimque cum eius asymptotis conuenire, & ad punctum contactus bifariàm diuidi, semissemque eius posse quartam partem figuræ quæ ad diametrum per prædictum punctum contactus incedentem constituitur: & propositione octaua rectam lineam secantem: Hyperbolam duasque eius asymptotos, habere segmenta propria, duo sita inter ipsas asymptotos & lineam curuam Hyperboles, æqualia: & propositione nona ait rectam omnem lineam ab Hyperbola bifariàm sectam, occurrentemque vtrimque asymptotis eius, in vnico solùm puncto ipsam Hyperbolen contingere: secantem verò Hyperbolam, & conuenientem vtrimque cum eius asymptotis, hoc habere, ex propositione decima vt rectangulum contentum segmentis eius inter asymptotos & Hyperbolam, sit æquale quartæ parti figuræ factæ ad diametrum quæ æquidistantes prædictæ secanti rectæ bifariàm diuidit: secantem insuper rectam asymptotos Hyperboles quæ continent angulum deinceps angulo continenti ipsam Hyperbolam, conuenire solùm in vnico puncto cum linea curua Hyperboles, ex propositione vndecima, & rectangulum constans ex huius rectæ segmentis positis inter ipsas asymptotos comprehendentes angulum prædictum deinceps, & inter lineam curuam Hyperboles, æquale esse quartæ parti quadrati ex diametro quæ secanti prædictæ rectæ parallela ducitur: Quod si in oppositis sectionibus daretur recta linea secans earum asymptotos continentes angulum prædictum deinceps, affirmat proposit. 16. dictam rectam productam vtrimque cum vtraque sectionum in vno tantùm puncto occurrere, & huius portiones inter asymptotos & sectiones æquales esse. Ad hæc, propositione 21. tradit si vni oppositarum sectionum coniugatarum occurrat recta linea eam contingens, productam vtrimque occurrere asymptotis earum; rectamque aliam lineam contingentem alterutram deinceps sectionem conuenire etiam cum asymptoto in eodem prædicti occursus puncto. Denique propositione 14. demonstrat asymptotos & Hyperbolam in infinitum extensas, ad se ipsas propiùs accedere, & ad interuallum peruenire minus quolibet interuallo; (quod

sanè

sanè stupendum est.) Quid multa? propositione duodecima concludit, si ab aliquo puncto eorum quæ sunt in sectione Hyperboles ad asymptotos eius, duæ rectæ lineæ in quibuslibet angulis ducantur, & ab altero puncto in eadem sectione ducantur aliæ duæ rectæ lineæ, illis ipsis æquidistantes; rectangulum ex parallelis constans, esse æquale ei quod fit ex ijs quibus illæ parallelæ ductæ fuerant: & propositione decima tertia insinuat rectam lineam ex loco asymptotis & Hyperbola propria terminato, rectam lineam æquidistantem alterutræ asymptoto, in vno tantùm puncto cum ipsa Hyperbola conuenire.

De tangentibus rectis in hoc libro, has propositiones habet. Quintam, si Parabolæ vel Hyperbolæ diameter lineam quandam bifariàm secet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem; æquidistans est lineæ bifariàm sectæ. Sextam, si ellipsis vel circuli circumferentiam diameter lineam quandam non per centrum transeuntem bifariàm secet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem, æquidistans erit illi bifariàm sectæ lineæ. Septimam, si coni sectionem vel circuli circumferentiam recta linea contingat, & huic æquidistans ducatur in sectione, & bifariàm secetur: quæ à tactu ad punctum lineam bifariàm diuidens iungitur; sectionis diameter erit. Decimam octauam, si vnam oppositarum sectionum coniugatarum contingat recta linea; producta vtrimque, cum vtraque sectionum deinceps occurret in vnico tantùm puncto: & ad tactum bifariàm diuidetur iuxta propositionem decimam nonam, si in oppositis sectionibus quæ coniugatæ appellantur, ducatur recta linea quamuis ipsarum contingens; cum sectionibus quæ deinceps sunt conueniet; & ad tactum bifariàm secabitur. Vigesimam, si vnam oppositarum sectionum quæ coniugatæ appellantur, recta linea contingat, & per tactum & centrum ducantur duæ rectæ lineæ, vna quidem per tactum, altera verò contingenti æquidistans, quousque occurrat vni sectionum quæ deinceps sunt: Recta linea quæ in occursu sectionem contingit, æquidistans erit lineæ per tactum & centrum ductæ; quæ verò per tactus & centrum ducentur, oppositarum sectionum coniugatæ diametri erunt. Vigesimam primam, iisdem positis, punctum in contingentes lineæ conueniunt, ad vnam asymptotum erit. Vigesimam septimam, si ellipsim vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant; & si quidem ea quæ tactus coniungit per centrum transeat sectionis: contingentes lineæ erunt parallelæ; sin minus conuenient inter se ad partes centri. Vigesimam nonam, si coni sectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in idem punctum conueniant; & ab eo ad punctum quod lineam tactus coniungentem bifariàm diuidit, alia linea ducatur: erit sectionis diameter. Trigesimam, si coni sectionem vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in vnum punctum conueniant; diameter quæ ab eo puncto ducitur, lineam tactus coniungentem bifariàm diuidit. Trigesimam

simam primam, si vtramque oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingant, & si quidem ea quæ tactus coniungit per centrum transeat; contingentes erunt parallelæ; sin minus, conuenient ad partes centri. Trigesimam secundam, si vtrique oppositarum sectionum rectæ lineæ occurrant, ipsas vel in vno puncto contingenres, vel in duobus secantes, & productæ inter se conueniant; punctum concursus erit in angulo qui deinceps est angulo continenti sectionem. Trigesimam tertiam, Vnam oppositarum sectionum recta linea contingens, producta vtrimque, non occurret sectioni oppositæ, sed per tres locos inceder, sub angulo continente sectionem, & sub duobus angulis qui deinceps sunt. Trigesimam quartam, si vnam oppositarum sectionum recta linea contingat, & huic æquidistans ducatur in altera sectione; quæ à tactu ad medium lineæ æquidistantis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit. Trigesimam quintam, si diameter in vna oppositarum sectionum rectam lineam bifariàm secet; quæ in termino diametri contingit alteram sectionem, lineæ bifariàm sectæ erit æquidistans. Trigesimam octauam, si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingant, in vnum punctum conuenientes; quæ ab eo puncto ad medium lineæ tactus coniungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit recta; & transuersa ipsi coniugata, quæ per centrum ducitur lineæ tactus coniungenti æquidistans. Trigesimam nonam, si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ in vnum punctum conuenientes; quæ per punctum illud & per centrum ducitur, lineam tactus coniungentem bifariàm secabit. Quadragesimam, si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes in vnum conueniant, & per punctum concursus linea ducatur coniungenti tactus parallela & sectionibus occurrens; quæ ab occursibus ad medium lineæ tactus coniungentis ducuntur, sectiones ipsas contingunt. Quadragesimam nonam, Data coni sectione, & puncto non intra sectionem dato; ab eo rectam lineam ducere quæ sectionem contingat. Quinquagesimam, Data coni sectione, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes sectionis angulum faciat dato angulo acuto æqualem. Quinquagesimam primam, Data sectione coni, Lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Quinquagesimam secundam, si ellipsim recta linea contingat: angulus quem facit cum diametro per tactum ducta, non est minor angulo deinceps ei qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur. Quinquagesimam tertiam, Data ellipsi, contingentem rectam lineam ducere quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem: oportet autem acutum angulum datum non esse minorem angulo deinceps qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

Quoad sectionum conicarum diametros attinet, dat fundamenta theo-

theoretica inueniendi ipsas, multis propositionibus: septimâ ex recta linea contingente sectionem, & alia accommodata in ipsa sectione parallela ipsi tangenti. Vigesimâ in oppositis sectionibus coniugatis, ex recta contingente vnam ipsarum, & rectis alijs lineis per tactum & centrum ductis, vna quidem per tactum, altera verò contingenti æquidistante. Vigesimâ octauâ, ex duabus rectis parallelis intra sectionem accommodatis & bifariàm sectis. Vigesimâ nonâ, ex duabus rectis contingentibus sectionem & confluentibus in vnum punctum, tùm aliâ rectâ vniente puncta contactuum bifariàmque diuisâ. Trigesimâ quartâ in oppositis sectionibus, ex vna recta contingente alterutram, & alterâ rectâ parallelâ contingenti accommodata in alia sectione, bifariàmque sectâ. Trigesimâ sextâ, in oppositis sectionibus, ex duabus rectis lineis æquidistantibus accommodatis intra illas, & bifariàm sectis, vnâ in vna sectionum, alterâ in alia. Trigesimâ septimâ, in oppositis sectionibus ait, si oppositas sectiones recta linea non transiens per centrum secet; quæ à medio ipsius per centrum ducitur, esse diametrum quæ recta appellatur; transuersam verò & huic coniugata, ea quæ à centro ducitur æquidistans prædictæ bifariàm sectæ. Trigesimâ octauâ tradit, si oppositas sectiones duæ rectæ contingant in vnum punctum conuenientes: quæ ab eo puncto ad medium lineæ tactus vnientis ducitur, esse ipsarum diametrum rectam, transuersam verò eam coniugatamque ipsi rectæ, quæ per centrum parallela agitur lineæ vnienti puncta contactuum. Quadragesimâ tertiâ docet, si vnam oppositarum sectionum coniugatarum recta linea in duobus punctis secet; & à centro duæ rectæ ducantur, vna quidem ad medium secantis, altera verò ipsi æquidistans, ambas esse diametros earum sectionum oppositarum coniugatas. Insuper ad praxes descendit, videlicet propos.44. Data coni sectione, diametrum inuenire; & 46. in Parabola inuenire axem; & 47. in Hyperbola & ellipsi etiam axem; & in quadragesima octaua proponit ostendendum non esse allos axes sectionum. Sed notandum est Apollonium non vti rectarum tangentium ductu in prædictis praxibus, quia solùm propositione sequente quadragesima nona methodum præbet illas exarandi tangentes. Denique nonnullas affectiones demonstrat diametrorum in prop. 5. 6. 30. 35.

De lineis secantibus sectiones, vel asymptotos Hyperboles aut sectionum oppositarum, etiam coniugatarum; has exhibet propositiones. Vigesimam quartam, si Parabolæ duę rectę lineæ occurrant, vtraque in duobus punctis, & nullius ipsarum occursus, alterius occursibus contineatur; conuenient inter se extra sectionem. Vigesimam quintam, si Hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, vtraque duobus in punctis, nullius autem ipsarum occursibus occursus alterius contineantur; conuenient quidem inter se extra sectionem, sed tamen intra angulum qui Hyperbolen contineat. Vigesimam sextam, si in ellipsi vel circuli cir-

***** cum-

cumferentia duæ rectæ lineæ non transeuntes per centrum se inuicem secent; bifariàm sese mutuò non secabunt. Trigesimam secundam, si vtramque oppositarum sectionum rectæ lineæ secent duobus in punctis, conuenientes in vnum punctum; hoc punctum erit in angulo deinceps ad angulum continentem sectionem. Quadragesimam primam, si in oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum; sese bifariàm non secabunt. Hoc idem demonstrat in oppositis sectionibus coniugatis, propositione quadragesima secunda. Alias habet Author propositiones de secantibus rectis sectiones, etiam oppositas & coniugatas, cum respectu ad alias tangentes rectas; videlicet 5. 6. 7. Alias etiam de ijsdem secantibus cum relatione ad diametros nimirum 5. 6. 7. 28. 29. 30. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 43. Insuper alias exhibet propositiones de secantibus eisdem rectis comparatis ad asymptotos Hyperboles vel oppositarum sectionum; vtpote 8. 10. 11. 12. 13. 16. 22. 23. 32.

Denique propositione quadragesima quinta centrum in ellipsi & Hyperbola proponit inuestigandum: & propositione quarta traditur methodus describendi in plano Hyperbolam cuius linea curua incedat per punctum datum intra angulum quemlibet rectilineum factum ab duabus rectis quæ sint asymptoti descriptæ ipsius Hyperboles.

Quod attinet ad ea quæ ex proprijs addidimus, Hæc occurrunt prodere. Primum nos præmisisse definitiones tredecim ad explicandos terminos quibus vtitur in suis propositionibus. Alterum nos determinare in corollarijs nostris ad propositionem secundam, quænam sint propriè dictæ asymptoti Hyperboles, & quæ impropriè; & quod non possint esse plures quàm duæ propriè vocatæ, innumeræ verò impropriè nuncupatæ. Tertium nos designare rectas lineas in vno vel duobus punctis secantes Hyperbolam in corollarijs nostris ad propos. 13. Quartum nos demonstrare in corollarijs nostris 1. & 2. ad prop. 16. & corollarijs nostris ad prop. 10. & corollario nostro ad prop. 11. & corollario nostro ad prop. 23. innumera rectangula sub portionibus diuersis rectarum secantium asymptotos & Hyperbolam vel oppositas sectiones, esse æqualia. Quintum, nos in vniuersum probare in corollario nostro 2. ad prop. 6. rectam lineam in quauis coni sectione accommodatam extra centrum & bifariàm diuisam ab diametro sectionis, esse vnà cum omnibus alijs rectis parallelis ipsi bifariàm diuisæ accommodatis intra eandem sectionem, ordinatim applicatam dictæ diametro: tùm in corollario nostro 2. ad prop. 5. rectas omnes lineas parallelas tangenti sectionem & accommodatas intra illam, bifariàm diuidi ab diametro sectionis incedente per punctum contactus, & esse ordinatim applicatas ad illam diametrum. Sextum, nos determinare punctum concursus duarum rectarum tangentium Hyperbolam vnam; vel vnius tangentis ipsam, & alterius secantis ipsam duobus in punctis, modò contactus punctum non sit in

arcu

arcu secantis; esse intra locum anguli continentis Hyperbolam. Septimum, nos assignare quando recta linea vniens puncta contactuum duarum rectarum tangentium ellipsim vel circulum incedat per centrum, vel extra centrum, in corollarijs nostris ad prop.27. hoc idem assignamus in oppositis sectionibus, in corollarijs nostris 2. & 3. ad prop 32. Octauum, nos probare in corollario 2. nostro ad prop. 45. vnicum esse centrum in ellipsi; & vnicum in Hyperbola, corollario nostro 5. Nullum verò esse centrum in Parabola in quo sediametri eius decussent, corollario nostro 3. Nonum, nos ostendere in Parabola vnicum esse axem, nullumque ei coniugatum, corollario nostro 1. ad prop.48. vnicumque esse axem transuersum propriè in Hyperbola, nullumque ei coniugatum, corollario nostro 2. In ellipsi vnicum esse transuersum, & vnicum ei coniugatum, corollario nostro 3. Infinitos verò esse coniugatos axes in circulo, corollario nostro 4. ad cit. prop.48. Decimum, in conclusionibus nostris quatuor ad prop. 49. nos determinare in sectionibus oppositis, ex quibus punctis, quot lineæ tangentes emitti possint contingentes ipsas. Vndecimum, nos in corollarijs nostris ad prop. 49. ab primo ad 10. determinare quot lineæ educi possint ad sectiones, ipsas tangentes ex punctis datis extra earum aream. Duodecimum, nos tradere methodos reperiendi diametros, axes, & ordinatim applicandi ad ipsas diametros rectas lineas in sectionibus; tùm innumera alia prodere circa ipsas diametros, centra, & ordinatim applicatas rectas diametris, in reliquis nostris ad prop.49. citatam corollarijs. Decimum tertium, nos monere in corollarijs nostris 1. & 2. ad propos.51. nullam rectam lineam contingentem sectionem conicam, posse duci, per verticem sui axeos, facientem cum axe angulum æqualem dato angulo acuto rectilineo; vel in circulo efficientem cum diametro per tactum ducta, angulum æqualem dato acuto angulo rectilineo; Verùm in corollario nostro ad prop. 50. docemus modum ducendi rectam lineam tangentem circuli circumferentiam, quæ cum diametro eius producta, efficiat angulum cum ipsa æqualem dato angulo acuto, ad partes ipsius circuli. Decimum quartum, nos assignare modum ducendi asymptotos Hyperboles, ex dato centro eius & axe proprio, in corollario nostro 6. ad prop. 2. Vltimum, nos inire viam centrum Hyperboles reperiendi, ex datis duobus segmentis asymptotorum eius, vno vnius, altero alterius, non concurrentibus in vnum punctum. Atque hæc sufficiant circa ea quæ ad hunc librum secundum superaddidimus.

ARGVMENTVM LIBRI TERTII.

Liber tertius Apollonij complectitur propositiones sex supra quinquaginta, & Corollarium vnicum ipsius Authoris. Præmisimus autem definitiones sex nostras ad intelligentiam terminorum: tum lemmata triginta & vnum, quorum duodecim ex Pappo Alexandrino; ex Eutocio vnum; ex Federico Commandino duo. Corollaria adiunximus quinquaginta quatuor, quorum nostra sunt quinquaginta, sex nimirum ad lemmata, & quadraginta quatuor ad propositiones: Sed & Apollonij vnicum est ad prop. 5. Eutocij duo, vnum videlicet ad prop. 16. alterum ad prop. 17. Denique vnum Federici Commandini ad prop. 15.

Apollonius ipse epistola sua ad Eudemum citata in admonitione ad Lectorem sibi ipse placuisse videtur in huius libri propositionibus, dum ait his verbis, *Tertius liber continet multa & admirabilia theoremata, quæ vtilia erunt & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima & noua sunt.* Eutocius verò in commentario suo ad hunc librum, ait ab Antiquis Geometris magno in pretio fuisse, dignumque accurato studio, & in eo esse multa contemplatione dignissima; & mirari vehementer nullam ab Apollonio ei præmissam epistolam, nulliusque docti viri commentarios in eum posteritati traditos. Sic autem loquitur Eutocius Anthemo amicissimo & in Geometricis exercitatissimo. *Tertius conicorum liber amicissime Anthemi, dignus ab Antiquis existimatus est, in quem multum studij ac diligentiæ conferretur; id quod variæ ipsius editiones ostendunt: sed neque epistolam habet, quemadmodum alij libri, neque commentarios in ipsum docti alicuius viri ex ijs qui ante nos fuerunt; quamquam in eo sint multa contemplatione dignissima, vt ipse Apollonius in proœmio totius libri asserit.* Sed ex epistola Apollonij ad Attalum Geometram, proferenda in argumento sequentis libri quarti, constabit ipsum Apollonium hunc librum tertium simul cum alijs duobus primis Eudemo Pergameno dedicasse.

Apollonium & Eutocium huius libri opinione sibi ipsis placuisse, & admiratione dignum existimasse, constabit ex ordine constanti finium particularium numero viginti, quos sibi proposuit diuersos Author in suis propositionibus sine vlla admixtione vel confusione non solita eorumdem in alijs libris, demonstrandos.

Primum quidem ab prima propositione ad quintam decimam, ostendit

dit vel æqualitatem, vel differentiam, intra triangula, vel quadrilatera, vel inter triangula & quadrilatera, resultantia ab duabus rectis lineis in vnum concurrentibus punctum, contingentibus quamlibet sectionem coni vel circuli circumferentiam, vel sectiones oppositas, & ab diametris earum sectionum, tùm etiam ab rectis parallelis ipsis contingentibus per vnum vel duo puncta sectionum traiectis.

Alterum, ab propositione decima sexta ad vigesimam nonam, proportiones designat, iisdem positis, quam habent rectangula & quadrata ex dictis determinatis lineis.

Tertium, ab prop. trigesima ad trigesimam tertiam, probat in Hyperbola & oppositis sectionibus, si duæ rectæ lineæ Hyperbolen vel oppositas sectiones contingant, & occurrant sibi inuicem in vnum punctum, lineaque ducatur vniens puncta contactuum prædictorum, & ex occursus puncto agatur recta parallela vni asymptotorum, secansque sectionem vel sectiones & simul rectam puncta contactuum coniungentem; vel ab occursus puncto recta ponatur æquidistans copulanti tactus, & per medium huius copulantis recta emittatur æquidistans alteri asymptotorum: Rectam lineam quæ sita est inter occursus punctum & lineam tactus vnientem, vel lineam ipsi æquidistantem; à sectionis linea curua bifariàm diuidi.

Quartum, si in vna asymptoto Hyperbolæ aliquod punctum sumatur, ab eoque recta linea sectionem contingat, & per tactum ducatur parallela asymptoto: demonstrat in propositione trigesima quarta rectam ab dicto puncto effluentem alteri asymptoto parallela; ab sectionis linea curua bifariam diuidi.

Quintum, iisdem positis in Hyperbola & oppositis sectionibus, quæ in prop. 34. si à sumpto puncto recta ducatur sectionem in duobus punctis secans, vel cum opposita sectione conueniens; ait in propositionibus trigesima quinta vel trigesima sexta, esse totam rectam ad eam quæ extra sumitur, vt inter se portiones illius quæ intra sectionem continetur: vel esse totam lineam ad eam quæ inter sectionem & æquidistantem per tactum, vt quæ est inter oppositam sectionem & asymptotum, ad eam quæ inter asymptotum & alteram oppositam sectionem constituta est.

Sextum, ab prop. 37. ad quadragesimam, In omni sectione coni vel circuli circumferentia vel sectionibus oppositis, probat, si duæ rectæ lineæ contingentes ducantur in vnum coeuntes punctum, & linea vniens tactus immittatur recta, vel ei parallela; & à puncto concursus prædicti vel medio coniungentis puncta contactuum, linea recta producatur secans sectionem vel oppositas sectiones duobus in punctis: Probat, inquam, proportionem totius vnius rectæ ex assignatis ad eius partem exteriorem, esse eandem quæ est inter partes eius quæ ab linea tactus copulante, vel quæ sunt inter sectiones, & contingentium occursum interijciuntur. ***** 3 Septi-

Septimum, demonstrat in propositione quadragesima prima, tres rectas lineas Parabolen contingentes & conuenientes inter se, secari in eandem rationem.

Octauum, in propositione quadragesima secunda ait, si in Hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremis diametri ducantur lineæ æquidistantes ei quæ ordinatim applicata est; & alia quædam quomodocumque contingens ducatur: abscindere ex ipsis lineas continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ quæ ad eandem diametrum constituitur.

Nonum, in propositione quadragesima tertia ostendit, si Hyperbolen recta linea contingat; abscindere ab asymptotis ad sectionis centrum lineas continentes rectangulum æquale ei quod continetur lineis ab altera contingente abscisis ad verticem sectionis qui est ad axem.

Decimum, in propositione quadragesima quarta affirmat, si Hyperbolen vel oppositas sectiones contingentes duæ rectæ lineæ asymptotis occurrant; lineas rectas ad occursus ductas, lineæ tactus coniungenti æquidistantes esse.

Vndecimum, in propositione 45. docet in Hyperbola & ellipsi, positis ad extrema puncta axeos rectis lineis ad angulos ipsi axi rectos, & tangente recta sectionem & occurrente dictis perpendicularibus; rectas lineas ductas ab his occursibus ad puncta comparationum, angulos rectos efficere.

Duodecimum, in propositione 46. ait ijsdem positis quæ in prop. 45. lineas coniunctas æquales efficere angulos ad contingentes.

Decimum tertium, Ijsdem positis quæ in prop. 45. asserit in prop. 47. lineas ab occursu coniunctarum ad tactum ductas esse contingentibus orthogonias.

Decimum quartum, Ijsdem positis quæ in prop. 45. tradit in prop. 48. lineas ab tactu ad puncta comparationum, æquales ad contingentem comprehendere angulos.

Decimum quintum, Ijsdem positis quæ in prop. 45. ostendit rectam ab aliquo puncto comparationum ductam perpendicularem ipsi contingenti; ab facto puncto rectas ad axis extrema ductas, continere angulos rectos, in prop. 49.

Decimum sextum, Ijsdem positis quæ in propos. 45. demonstrat in prop. 50. si ab centro sectionis ducatur recta linea contingenti occurrens & parallela lineæ rectæ per tactum & vnum punctorum comparationum transmissæ, rectos efficere angulos.

Decimum septimum, in prop. 51. probat rectas inclinatas ab punctis comparationum Hyperboles vel oppositarum sectionum ad quamlibet sectionem; maiorem superare minorem quantitate axis.

Decimum octauum, in propos. 52. asserit in ellipsi rectas ab punctis comparationum ad sectionem inclinatas, ipsi axi æquales esse.

Deci-

Decimum nonum, in prop.53. ait in Hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel sectionibus oppositis, si ab extremis diametri ducantur lineæ ordinatim applicatis æquidistantes; & à dictis terminis ad idem sectionis punctum lineæ ductæ secent æquidistantes: Rectangulum ex abscissis factum, æquale esse figuræ ad eandem diametrum constitutæ.

Vigesimum & vltimum, ab propos.54. ad vltimam 56. designat proportionem compositam rectanguli cuiusdam facti ad quadratum alterius rectæ in omnibus coni sectionibus, ductis duabus rectis contingentibus sectiones, & alijs quibusdam rectis parallelis & secantibus.

Hæc circa mentem & fines Apollonij. Pauca dicamus de nostris superadditis huic libro. In definitionibus nostris sex, explicamus nouis definitionibus, quid intelligat Apollonius, Comparare bis quartæ parti figuræ æquale rectangulum excedens figura quadrata ad axem Hyperboles vel oppositarum sectionum; vel deficiens figura quadrata ad axem maiorem ellipseos; vel ad axem circuli sine vllo respectu excessus vel defectus prædicti. Tùm quidnam intelligat Author per puncta comparationum in dictis sectionibus. Monemus autem nos applicare circulo comparationem prædictam neglectam ab Apollonio. Præterea in lemmatibus reducimus ad praxim comparationes huiusmodi & inuentiones punctorum comparationum. Insuper multorum triangulorum rectilineorum demonstramus æqualitatem, in corollarijs nostris 2. 4. 5. 7. ad prop. 1. & corollario nostro vnico ad propos.2. & corollarijs nostris 1. & 4. ad propos.8. & corollario nostro 2. ad prop. 11. & in corollarijs nostris 5. & 5. ad prop.34. Triangulorum verò mixtilineorum æqualitatem in corollarijs nostris 3. & 6. ad prop. 1. Et quadrilaterorum rectilineorum æqualitatem in corollario nostro ad prop.7. & in corollarijs 2. 3. & 4. ad prop.8. & in corollario nostro 1. ad prop. 12. & ex Commandino in corollario ad propos.15. & in corollario nostro ad propos.44. Et quadrilaterorum mixtilineorum æqualitatem in corollario nostro ad prop.3. Tum etiam æqualitatem triangulorum & quadrilaterorum, in corollario nostro ad prop.5. & in corollario nostro ad prop.8. Et multilaterorum æqualitatem cum quadrilateris, in corollario nostro 2. ad prop. 12. Et multilaterorum æqualitatem in corollario nostro ad prop. 8. Sed & in corollario nostro ad prop.44. probamus, si Hyperbolen vel sectiones oppositas duæ rectæ lineæ contingentes asymptotis occurrant vtrimque; rectangula duo sub asymptotorum partibus inter tangentes & centrum, æqualia esse. Quin etiam demonstramus in corollario nostro 1. ad prop.42. In ellipsi & circulo & oppositis sectionibus, quadratum vnius è coniugatis diametris esse æquale figuræ quæ constituitur ad aliam diametrum coniugatam: & in corollario nostro 2. in eisdem sectionibus, quadratum semisis diametri vnius è coniugatis duabus, esse æquale quartæ parti figuræ quæ constituitur ad alteram coniugatam

diametrum. Tùm in ellipsi, circulo, Hyperbola & sectionibus oppositis, data transuersa diametro, assignamus latus rectum in corollarijs nostris 4. 6. ad prop. 42. & in corollario nostro ad prop. 52. aliter quàm in corollarijs nostris ad propositionem 51. libri 1. Et in corollario nostro 5. ad prop. 42. docemus in eisdem sectionibus citatis, methodum reperiendi ex diametro transuersa, quadratum æquale quartæ parti figuræ constitutæ ad ipsam diametrum datam transuersam. Præterea in corollario nostro 1. ad prop. 1. & in corollario nostro vnico ad prop. 33. & in corollario nostro 2. ad prop. 34. probamus rectas quasdam accommodatas in sectionibus, bifariam diuidi ab nonnullis diametris ductis; probatioque est diuersa ab traditis in superioribus libris. Quid multa? docemus in corollario nostro 1. ad prop. 50. Rectam lineam ab centro circuli ductam parallelam per punctum contactus rectæ tangentis circulum ab vno comparationum axeos circuli; esse eandem quæ dicta linea vniens tactum & punctum comparationum: In ellipsi verò & Hyperbola esse diuersam. Et in corollario nostro 2. ad cit. prop. In ellipsi datis duobus eius axibus, si ab extremo cuiusuis recta linea parallela alteri ponatur, contingere ipsam ellipsim in dicto illo extremo, & secare alias duas rectas perpendiculares axi cui est parallela posita; quæ perpendiculares etiam contingent ellipsim, si sint perpendiculares in extremis ipsius axeos. Et in corollario nostro 3. ad eandem prop. cit. In ellipsi datis eius duobus axibus se mutuò ad angulos rectos secantibus bifariàm in centro ellipseos; si ab extremo quouis axeos minoris circulus decircinetur vt centro, interuallo semissis axeos maioris, secare axem maiorem duobus in punctis ex intermedijs, quæ erunt puncta comparationum: Quare in corollario nostro 4. ad eandem propos. assignamus aliam methodum puncta comparationum reperiendi in ellipsi, quàm per lemma 25. & in corollario nostro sequente 5. demonstramus aliter quàm per lemma 28. quod puncta comparationum in ellipsi sunt æqualiter remota ab centro eius; tùm æqualiter remota ab verticibus vicinioribus; & æqualiter remota ab verticibus remotioribus. & in coroll. nostro vltimo ad cit. prop. 50. tradimus modum accuratiùs reperiendi puncta comparationum in ellipsi. Denique corollaria nostra duo ad prop. 52. planè sunt admirabilia, sicuti propositio ipsa Apollonij: in primo enim demonstramus triangula omnia rectilinea basim habentia portionem axeos maioris ellipseos sitam inter duo comparationum puncta, verticemque in linea curua ellipseos, esse isoperimetra: & in secundo praxim commodissimam assignamus, datis duobus axibus ellipseos se mutuò bifariàm ad angulos rectos intersecantibus, reperiendi innumera puncta per circumferentiam ellipseos describendæ in plano transitura sit.

ARGVMENTVM LIBRI QVARTI.



HAbemus ab Apollonio huius libri sui quarti conicorum propositiones quinque supra quinquaginta: hisque præmisimus definitiones nostras quinque circa terminorum intelligentiam; vnicumque lemma nostrum quod supponit ipse Apollonius, videlicet si duæ rectæ lineæ curuæ sectionum conicarum comprehendendo etiam circuli circumferentiam, se mutuò tetigerint in vno puncto, siue conuexa habeant ad easdem partes illius puncti, siue è regione: recta linea tangens vnam ex dictis lineis in dicto puncto contactus, tanget & aliam in eodem puncto contactus. Propositionibus verò solùm quinque inseruimus corollaria nostra, licet longè plura vt in alijs præcedentibus occurrerent nobis superaddenda; quæ consultò in alios supplendos libros remisimus, de quibus commodiùs agemus.

Quis Apollonio scopus fuerit præcipuus in hoc libro quarto, disces ab eius præfixa epistola ad Attalum. *Apollonius Attalo S. D. Priùs quidem ex octo libris, quos de conicis composuimus, tres primos edidi ad Eudemum Pergamenum scriptos. Eo autem mortuo cùm reliquos ad te mittere decreuerimus, quòd meorum scriptorum lectionem ambitiosè desideras, in præsentia quartum librum mittimus. In eo hæc continentur: ad quot puncta plurima conorum sectiones inter se, & circuli circumferentiæ occurrere possint, nisi totæ totis congruant; præterea coni sectio & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad quot puncta plurima occurrant; ad hæc alia non pauca his similia. Ex his quod primo loco dictum est, Conon Samius ad Trasideum scribens explicauit, non rectè in demonstrationibus versatus: Itaque Nicoteles Cyrenæus eum leniter reprehendit. De secundo Nicoteles in libro contra Cononem mentionem sic fecit; tanquam quod demonstrari facilè posset: Sed tamen nos neque ab ipso, neque ab alio quopiam demonstratum inuenimus. Tertium verò & eiusdem generis alia, ne in mentem quidem alicui vnquam venisse comperimus. At quæ diximus ab alijs demonstrata non fuisse, omnia multis ac varijs, nouisque theorematibus indigent; quorum plurima in tribus primis libris, reliqua in hoc exposuimus. Horum igitur contemplatio non paruam vtilitatem affert, & ad compositiones problematum, & ad determinationes. Nicoteles quidem ob dissensionem quæ illi cum Conone erat, scribit nihil eorum quæ à Conone inuenta sunt, ad determinationes pertinere: quod ille falsò affirmat, nam & si omninò absque his determinationes reddere possimus, tamen ex his ipsis nonnulla faciliùs percipiuntur; velut hoc, quod aliquid multipliciter fiat, vel quotupliciter, vel rursus quod nullo modo fiat: quæ quidem cognitio si antecesserit, ad quæstiones*

magnam præstat facultatem. Præterea ad diffinitionum resolutiones, theoremata hæc valde vtilia sunt: quæ etiam si absit vtilitas, propter ipsas demonstrationes digna sunt vt recipiantur: multa enim alia in mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, & non ob aliquod aliud recipere consueuimus. Sed etiam ex Eutocij epistola ad Anthemum sodalem charissimum accipies eosdem fines Apollonij & nonnulla alia scitu digna. *Quartus liber Anthemi sodalis charissime quæstionem quidem habet, quot modis Conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ, itemque oppositæ sectiones oppositis sectionibus occurrant. Sed est tamen elegans, & legentibus perspicuus, præsertim ex editione nostra; ac ne commentarijs quidem vllis indiget: quod enim deest, ipsæ explent adscriptiones. In eo autem omnia demonstrantur argumentatione ducente ad id quod fieri non potest; sicut & Euclides fecit in ijs quæ de sectionibus, circulo, & tactionibus conscripsit: quæ sanè ratio & ad vsum accommodata, & necessaria Aristoteli, ac Geometris, præcipuè verò Archimedi visa est. Itaque tibi quatuor libros perlegenti licebit ex conicorum tractatione resoluere & componere quodcunque propositum fuerit: quocirca & ipse Apollonius in principio Libri dixit quatuor libros ad huius disciplinæ elementa sufficere; reliquos autem quatuor ad abundantiorem scientiam pertinere. Perlege igitur eos diligenter; & si tibi placuerit reliquos ad eandem formam à nobis edi, id quoque Deo duce fiet. Vale.*

Quænam sint tria quæ Apollonius in epistola sua ad Attalum commemorat sibi proposita in hoc libro, dubitare quis posset, propter indistinctam & confusam eorum enumerationem. Ea sic distinguo, vt primum sit, ad quot puncta conorum sectiones videlicet Parabola, Hyperbola, ellipsis, & sectiones oppositæ, inter se occurrere possint, excludendo circuli circumferentiam quæ propriè ex mente Apollonij sectio conica non appellatur, etiamque excludendo quot modis sectiones oppositæ alijs oppositis occurrant: Atque de hoc primo Cononem ad Trasideum infœliciter scripsisse quædam. Secundum verò sit, ad quot puncta circuli circumferentia occurrere possit sectionibus prædictis; quod Nicoteli in libro contra Cononem visum fuerat facile demonstratu, sed ab eo neque ab alijs demonstratum reperisse testatur Apollonius. Tertium denique sit, quot modis sectiones oppositæ alijs oppositis sectionibus occurrere possint: quod à nemine propositum antea fuerat confidenter asseuerat Apollonius. Fundamentum huius distinctionis desumimus ab Eutocij verbis primis epistolæ suæ ad Anthemum; dum ait, *Quartus liber quæstionem quidem habet, quot modis Conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentia, itemque oppositæ sectiones oppositis sectionibus occurrant.*

Sed antequam ad propositiones tria illa continentes descendat Apollonius, priùs viginti tres alias præmittit, de cõtingẽtibus rectis lineis ipsas sectiones ductis ab puncto extra ipsas assumpto, & occurrentibus alijs rectis ipsis sectionibus ab eodem puncto emissis, necessarias ad ea quæ de occursu sectionum inter se sibi proposuerat demonstranda. Has autem propositiones viginti tres, & vigesimam quartam huius libri refero ad eius

eius verba huiusmodi (*ad hæc alia non pauca his similia*) in epistola sua ad Attalum.

Quodnam verò fuerit particulare Authoris intentum in suis propositionibus, declarabimus. In prima tradit si in coni sectione vel circuli circumferentia aliquod punctum extra sumatur, atque ab eo ad sectionem duæ rectæ lineæ, vna quidem contingens, altera verò in duobus punctis secans; & quam proportionem habet tota recta linea secans ad partem sui ipsius quæ extrà sumitur inter punctum & sectionem interiecta, in eandem diuidatur quæ est intrà, ita vt rectæ lineæ eiusdem rationis ad vnum punctum conueniant: rectam lineam quæ à tactu ad diuisionem ducitur, sectioni occurrere; & aliam quæ ab occursu ducitur ad punctum extrà sumptum, sectionem contingere. In secunda propositione idem ostendit in Hyperbola speciatim, in casu quo duo puncta lineæ curuæ sectæ ab recta secante, habeant in eodem arcu lineæ curuæ punctum tactus intermedium, & punctum assumptum sit intra angulum asymptotis contentum. In tertia propositione idem probat in Hyperbola, etiam si punctum contactus minimè sit intermedium modo prędicto. In quarta demonstrat idem in Hyperbola positis eisdem quæ in secunda; deturque punctum assumptum in angulo deinceps asymptotis contento. Et in quinta asserit idem euenire eisdem positis. Si punctum assumptum sit in vna asymptotorum. In sexta mutat suppositionem & loco rectæ secantis prædictæ assumit ex dicto puncto externo rectam parallelam vni asymptoto, ita vt portio huius æquidistantis inter sectionem & punctum exterius assumptum sit æqualis ei quæ intra sectionem continetur; reliquis assumptis, in Hyperbola probat eadem quæ supra euenire: Quod si punctum assumptum sit in angulo deinceps ei qui asymptotis continetur, eadem proponit in septima: & in octaua, si punctum assumptum sit in vna asymptotorum. Præterea ab prop. 9. ad 14. assumendo duas rectas ab puncto externo ductas secantes sectionem coni vel circuli circumferentiam; & quam proportionem habent totæ lineæ ad portiones quæ extrà sumuntur, in eam diuidantur quæ sunt intra, ita vt partes eiusdem rationis ad idem punctum terminentur; ostendit rectam per factas diuisiones transmissam, occurrere duobus in punctis sectioni; & rectam quæ ab occursu ad punctum extra sumptum interponuntur, sectionem contingere vel circuli circumferentiam: sed in sola Hyperbola, si eadem ponantur quæ in secunda propositione, exceptis tangentibus, idem concludit quod in secunda ipsa propositione, in decima: & in vndecima idem quod tertia, positisque ijsdem quæ in tertia, si excipias tangentem rectam: In 12. 13. & 14. variat etiam aliquo modo suppositionem, & conclusionem. In reliquis propositionibus vsque ad 23. agit supponendo modò eadem, modò diuersa quædam, de lineis occurrentibus & contingentibus sectiones oppositas in varijs casibus. Denique in propositione vigesima quarta stabilit nullam coni sectionem vel circuli

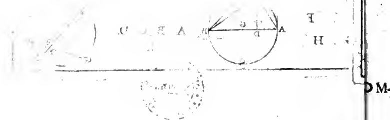
&,
is
n,
m

red-
neæ
nem
um.
cir-
nem

ara-
n ca-

rcu-
nue-
æ ab

mni
tria
ter-
lum



M.

COMENTARIVS
IN DEFINITIONES PRIMAS,
LIBRI PRIMI
CONICORVM
APOLLONII PERGÆI.

I.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: superficiem à recta linea descriptam, constantemq; ex duabus superficiebus ad verticem inter se aptatis; quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea quæ eam describit in infinitum producta, voco conicam superficiem.



TRADIT Apollonius definitionem conicæ superficiei vniuersalem, per causam efficientem, quam sic diagrammate explicamus. Si ab aliquo D puncto, extra circuli planum AGBH, in sublimi sito, recta linea DB, ad circumferentiæ circuli prædicti punctum B, ducta sit, & producta in vtramque partem; vltra D in E, & vltra B in F: tum circa punctum D immobile, conuertatur circuli prædicti circumferentiam radendo, quousque ad eum locum redeat seu punctum B, circumferentiæ circuli, à quo cœpit moueri. Superficies duas efficiet ex dictis in definitione 5. lib. 1. elem. coaptatas in puncto D communi, quod verticem appellat. Has verò duas superficies, superficiem conicam vocat, in hac definitione; licet alijs in locis exponendis, easdem duas dicat superficiem ad verticem, puta D; & vnamquamque illarum, superficiem conicam esse velit: superficiem quidem conicam ambas, quia ab vnica recta EDB modo explicato efficiuntur; & illarũ quamlibet etiam superficiem conicã, eo quod ab recta linea DB non producta vltra D punctum immotum seu verticem, circumferentiam circuli subiecti perfecto suo motu attingendo continuò, producatur. Quod si recta linea EDB in infinitum vtrimque extendatur, vel sola DB vltra B; tam ambæ superficies conicæ in puncto D communi compositæ, quàm vnica versus circulum AGBH, etiam in infinitum excrescere ait, crescente nimirum causa efficiente ipsas, recta linea cum adnotatis circumstantijs seu conditionibus; quarum prima est directiua motus illius rectæ, videlicet circuli subiecti circumferentia, quam perpetuò circumradere debet dicta recta; Altera est vt ad idem circumferentiæ circuli punctum redire debeat, è quo moueri cœperat; Tertia est, vt circa vnum punctum immobile feratur; Vltima, vt hoc punctum immanens situm sit in sublimi plani illius circularis.

An sint omnes istæ conditiones seu circumstantiæ necessariæ ad efficiendam conicam superficiem, quærere aliquis posset. Et respondemus omnes esse necessarias, excepta prima commemorata, nimirum circuli subiecti circumferentia directiua motus rectę lineę ipsam corradentis; nam suo loco probabimus aliam subiectam figuram planam, vtpote ellipsim dirigere illum motum posse, licet ex principijs Apollonij ortum suum habeat ex sectione conicæ superficiei factæ, & ex principijs fereni etiam producatur in superficie cylindri: Verùm quia superficies conica simul cum circulo designato in hac definitione includit spatium solidum, quod vocabit Author def. 4. conum, cuius proprietates, & superficiei definitæ inuestigantur; ideoque quia superficiea conica refertur ad conum, cuius terminus vnus est, & circulus alter terminus; necessariã iudicata est circuli circumferentia directiua motus lineæ rectæ efficientis superficiem conicam partialiter comprehendentem conum, qui est obiectum adæquatum horum Apollonij librorum. Quod reliquæ conditiones omnino sint necessariæ, sic explicatur, Punctum imprimis immobile rectæ lineæ in sublimi situm respectu plani prædicti circularis; si enim constitutum esset in eodem plano circuli prædicti, reuoluta illa recta supra planũ circuli, circa il-

A lud

, &
circuli

no-
e so-
per-
rima
um-
ecta
im-
di-
tice
cir-

Pri-
one,
lter-
tum,
e de-
icam
B pun-
I inter
erum,
, ter-
conica
super-
inclu-
icis sui,
nemus
us cau-
inden-
mul et-
uperfi-
um spa-
ncipie-

A
I
B
C *i conica*

D no-
E ADB,
arta; &
am coni-
mposita-
efinitio-

d circuli

lineam
ADB ad
a est. Quę
Authore,

VII.

VII.

Basim; circulum ipsum.

HOc est, basim coni appellat, circulum ipsum AGBH; supra quem innititur conus, quique simul cum superficie conica curua effecta iuxta definitionem primam ab recta linea DBF, conum ipsum circumambiendo, concludit.

VIII.

Conorum; rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

DIuisionem coni in hac & sequenti definitione tradit Apollonius; ita vt sit alius conus rectus, alius scalenus. Rectumque conum ait esse, cuius axis DC est perpendicularis basi propriæ circulari AGBH, in ipsius C centro. Vide primam figuram huius coni recti in prima definitione.

IX.

Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

SCalenum Conum, seu minimè rectum proposui in secunda figura definitionis primæ: cuius axis DC non est orthogonius plano baseos eius circularis AGBH, in eius centro C, sed inclinatus.

Præcedentes definitiones sunt maximè vniuersales ad Conos, eorumque species. Alias definitiones consule minus vniuersales apud Euclidem lib. 11. elem. ac diuisionem coni in rectangulum, amblygonium, & oxygonium; quas commentati sumus, & ibidem polliciti eramus nos istas Apollonij explicaturos.

X.

Omnis curuæ lineæ in vno plano existentis diametrum voco, rectam lineam, quæ quidem ducta à linea curua, omnes lineas quæ in ipsa ducuntur cuidam lineæ æquidistantes, bifariàm diuidit.

DEfinit Apollonius diametrum cuiuscumque curuæ lineæ in plano existentis: vnde excluditur linea helica seu spiralis curua, in superficie curua cylindri, vel coni, vel sphæræ, vel sphæroidis descripta. Intelligit autem præcipuè lineas curuas de quibus in hisce libris agit, in plano receptas, videlicet parabolam, hyperbolam, ellipsim, & circulum; quarum duæ primæ spatium concludere seipsis nequeunt, aliæ verò duæ postremæ claudunt vel claudere ex natura sua possunt: de quibus aget hoc libro, earumque originem aperiet: nos verò in definitionibus secundis earum naturam tum per causam efficientem, tum per causam formalem declarabimus. Quod si hæc definitio diametri curuæ lineæ in plano existentis, etiam conueniat alijs lineis curuis in plano receptis, ac differentibus ab parabolica, hyperbolica, elliptica, & cyclica; nihil refert, etiamsi de illis nullam affectionem in hisce libris Author demonstret.

Age declaremus in figuris præsentem definitionem. Sint exempli gratiâ curuæ lineæ in plano existentes, ABCD, circularis, & elliptica seu defectus ab circulo, cùm longior sit quàm latior, spatium ambæ claudentes, aut aptæ concludere; tùm ABC etiam curuæ lineæ in plano receptæ, sed minimè seipsis figuram comprehendentes, qualis est parabolica & hyperbolica. In huiusmodi curuis lineis, Recta quæcumque linea, puta BD in illis curuis lineis spatium continentibus planum, accommodata in ipsis iuxta sensum definitionis 7. lib. 4. elem. at vero BI in alijs figuram non continentibus, verùm terminata vno suo extremo veluti B in ipsa curua linea: si rectas omnes lineas in ipsis curuis lineis accômodatas, ita vt totæ sint intra locum ipsius lineę curuæ, exceptis suis duobus extremis proprijs, quales sunt DE, AC, FG, cuidam rectæ lineæ æquidistantes, bifariàm diuiserit, veluti DE in H, AC in I, I G in K, & sic de reliquis omnibus: ipsa recta BD, vel BI, erit diameter lineæ curuæ in plano existentis. Et si fuerit data diameter huiusmodi curuarum linearum, bifariàm diuidet rectas omnes lineas in ipsis accommodatas, parallelasque cuidam rectæ lineæ. Quod si recta alia quæuis linea bifariàm non partiatur huiusmodi rectas omnes lineas in eisdem prædictis curuis lineis accommodatas, earum diameter dici non poterit. Nota infinitas esse posse diametros in qualibet ex dictis curuis Apollonij & omnes debere totas aut partes earum procedere intra locum seu capacitatem linearum suarum curuarum in plano existentium: debent enim ex definitione præsenti bifariàm diuidere rectas omnes lineas intra ipsas accommodatas, cuidam rectæ æquidistantes; quæ bifariàm diuisæ cùm procedant per planam capacitatem curuarum suarum linearum, diameter illas diuidens, etiam per internam capacitatem eandem curuarum linearum extendetur tota, vel earum pars aliqua.

Ad finem explicationis definitionis 12. indicabimus rectam lineam cui debent esse parallelæ rectæ lineæ omnes & accommodatæ in dictis curuis lineis, & per medium sectæ ab diametro definita.

XI.

Verticem lineæ, terminum rectæ qui est in ipsa linea.

DEterminat Author, quisnam sit vertex lineæ curuæ definitæ in præcedente definitione.



recta posita ex puncto F, parallela ordinatim applicatæ DHE, diametro BI, non congruat cum concepta recta FKG ordinatim applicata eidem diametro. Congruet igitur cum illa: atque ita erit bifariàm diuisa in K, & ordinatim applicata diametro BI.

Notandum est 3. Apollonium in propositionibus horum suorum librorum, tres lineas curuas, parabolam, hyperbolam, & ellipsim, vt plurimùm vocare antonomasticè, sectiones; & nonnunquam circulum sub nomine sectionis intelligere; quia huiusmodi curuas lineas docet in primis libri primi propositionibus oriri ab sectione conicæ superficiei per planum. Et quia conica superficies composita ex duabus coaptatis ad vnum punctum seu verticem, iuxta primæ definitionis sensum, secari potest plano, ita vt duæ sectiones huiusmodi seu duæ lineæ curuæ producantur oppositæ, vna quidem in vna superficierum prædictarum conicarum, altera in alia, quas vocabit hyperbolas; ideo etiam in sequentibus definitionibus, harum duarum curuarum linearum in vno plano existentium diametros, & vertices, & axes, & rectas lineas ad earum diametros ordinatim applicatas definiet.

XIII.

Similiter, & duarum curuarum linearum in vno plano existentium, diametrum quidem transuersam voco; rectam lineam, quæ omnes in vtraque ipsarum ductas, recta cuidam æquidistantes bifariàm diuidit.

HOc est, sint duæ quæcumque lineæ curuæ in vno eodemque plano existentes, verbi gratia CAD, XBO; & inter illas sit recta linea AB, productaque vtrimque, diuidens bifariàm rectas omnes lineas accommodatas in vtraque ipsarum, veluti sunt CD, EF, GH, in curuarum vna CAD, & XO, MN, KL, in altera curuarum XBO; & cuidam rectæ lineæ æquidistantes, (quam indicauimus in explicatione præcedentis def.) Illa recta linea AB producta vtrimque, vocanda est ex mente Apollonij, Diameter transuersa illarum duarum curuarum linearum.

Hæc definitio licet sit vniuersalis ad transuersam diametrum duarum curuarum linearum in eodem plano existentium; tamen Author exemplum solum præbet in suis libris, duarum huiusmodi curuarum, quas oppositas sectiones appellabit, suntque singulæ hyperbolicæ. Debet etiam hæc transuersa diameter ingredi per aream planam ambarum curuarum linearum, sicuti diameter in def. 10. sed præterea extra illas egredi eas secando, quia debet etiam incedere per locum inter vtrasque ipsas lineas curuas comprehensum.

XIV.

Vertices linearum; diametri terminos, qui sunt in ipsis lineis.

ID est extrema seu termini A, B, diametri AB transuersæ duarum curuarum linearum CAD, XBO, qui existunt in ipsis curuis lineis; sunt iuxta hanc definitionem, vertices ipsarum curuarum linearum in eodem plano existentium.

XV.

Rectam verò diametrum voco, quæ inter duas lineas posita, lineas omnes ductas recta cuidam æquidistantes, & inter ipsas interiectas, bifariàm secat.

EXempli gratiâ in figuris definitionis 13. Recta linea PR, erit recta diameter duarum curuarum linearum CAD, XBO, in eodem plano sustentatarum adæquatè; si rectas omnes lineas cuidam rectæ parallelas, & inter dictas curuas lineas interiectas, quales sunt CX, EM, GL, AB, HK, FN, DO, bifariàm diuidat. & si fuerit recta diameter, dictarum duarum curuarum linearum, per medium partietur rectas omnes lineas inter ipsas ductas cuidam rectæ parallelas.

Aduerte hanc rectam diametrum solùm incedere per locum inter vtrasque lineas situm; & nunquam occurrere ipsis lineis curuis: quia debet diuidere bifariàm rectas omnes lineas cuidam parallelas, & inter prædictas lineas curuas interiectas.

Collige Apollonium definire duo genera diametrorum in duabus lineis curuis sustentatis adæquatè in eodem plano; ac propterea vni nomen tribuere transuersæ, alteri verò rectæ: transuersæ quidem in def. 13. quia transuersim ingreditur intra locum ambarum curuarum illarum linearum, vt diuidat bifariàm rectas in illis accõmodatas cuidam rectæ æquidistantes; Rectæ verò, quia rectè procedit inter duas datas curuas huiusmodi lineas, eas nec attingendo, neque intra earum locum penetrando; si enim alterutram illarum curuarum attingeret, non diuideret bifariàm rectam lineam ab hoc puncto occursus ductam æquidistantem illi rectæ cui debent esse parallelæ aliæ omnes bifariàm diuisę & accõmodatæ inter illas duas lineas; contra def. præsentem 15. Duæ huiusmodi diametri commune quid habent, vt bifariàm diuidant rectas omnes lineas cuidam rectæ æquidistantes: Verùm differt transuersa ab recta, & vicissim recta ab transuersa: nam transuersa per medium partitur rectas omnes illas lineas accommodatas in vtraque curuarum linearum: Recta verò alias omnes rectas illas cuidam parallelas sitas inter vtramque curuam, & communia cum illis puncta obtinentes. Collige ex dictis rectam diametrum

i-
æ.

re-
nee,
ctos

mas
eter
s ac-
d re-
æ li-
curuæ
ogo-

epe-
qua
re-
ua-
ra,
mē

M



angulos rectos per iſtam def.18. & ſuis extremis F, G, terminabitur in linea curua: ergo ſi ex eodem puncto F poſſet duci recta linea FB perpendicularis axi prędicto in eius vertice B, vel in alio puncto L in productione axeos vltra B, reſultaret triangulum rectilineum FBK, vel FLK, habens duos angulos rectos, contra prop. 17. lib. 1. elem. hoc abſurdum conſequens ad poſitionem contradicentem primæ parti huius coroll. indicat ipſam poſitionem falſam eſſe, & primam partem ipſam veram. Cùm igitur omnes huiuſmodi rectæ lineæ perpendiculares axi eductæ ad illam ex quibuſcunque punctis lineæ curuæ applicentur ſuis duobus extremis ad lineam curuam & ſecentur ab dicto axe ad angulos rectos in punctis diuerſis ab earum extremis, ſint parallelæ inter ſe, erunt per def. 12. & hanc 18. ordinatim applicatæ axi prædicto, ſicuti propoſuimus in ſecunda parte huius coroll. noſtri 1.

COROLLARIVM NOSTRVM

II.

Rectæ omnes lineæ terminatæ vtrimque in lineis curuis conicis particularibus ſeorſim ſumptis, perpendicularesque axibus proprijs illarum; ſunt ordinatim applicatæ ad illos axes proprios.

SI enim non ſint ordinatim applicatæ ad axes illos; concipere poterimus per illa puncta communia axi, & illis rectis perpendicularibus, alias rectas ordinatim applicatas ad illos axes, quæ vel congruent cum datis proprijs perpendicularibus, vel non congruent & ſe mutuò interſecabunt in dictis proprijs punctis axeos. Si primum, tàm erunt illæ ordinatim applicatæ, quàm iſtæ. Si ſecundum, conceptæ lineæ erunt æquidiſtantes per defin. 12. ergo per iſtam def.18. ſecabuntur ab axe ad rectos angulos. Atque ita vnus angulus rectus factus ab axe & datis, erit pars vel totum reſpectu anguli recti facti ab axe & conceptis rectis: contra 12. ax. lib. 1. elem. quo conſtat rectos omnes angulos rectilineos eſſe æquales.

XIX.

Axes coniugatos curuæ lineæ, & duarum curuarum, rectas lineas, quæ cùm ſint diametri coniugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

SIcut omnis axis curuæ lineæ vel duarum curuarum debet eſſe diameter curuæ lineæ, vel duarum curuarum, per definitionem præcedentem 18. ita etiam axes coniugati curuæ lineæ, vel duarum curuarum, debent eſſe iuxta hanc definitionem diametri coniugatæ: ſed inſuper hæ diametri coniugatæ vt ſint axes debent æquidiſtantes ſuas proprias lineas diuidere ad angulos rectos, quemadmodum axis ſimplex curuæ lineæ vel duarum curuarum ſecabat ſuas proprias æquidiſtantes rectas lineas perpendiculariter.

Pro axibus coniugatis curuæ lineæ recognoſce proprias primas figuras definitionis decimæ, & pro axibus coniugatis duarum curuarum figuram primam definitionis 13.

Notandum autem eſt parabolam vnicum axem ſibi ſolummodo vendicare; tùm etiam hyperbolam ſolam præſcindendo ab oppoſita ſibi alia. Ellipſim verò & circulum poſſe obtinere duos axes coniugatos; tùm etiam hyperbolas duas oppoſitas: quæ omnia ſuis proprijs locis demonſtrabuntur.

Aduerte, ſufficere ad probandas duas coniugatas diametros eſſe axes curuarum linearum, vel lineæ curuæ, ſi vna earum demonſtretur axis: hoc eſt oſtendatur diuidere bifariàm, & ad angulos rectos, chordas omnes curuæ dictæ lineæ, vel duarum curuarum, parallelas alteri diametro: ſequetur enim alteram hanc diametrum eſſe axem; licet probari poſſit etiam hanc alteram diametrum diuidere bifariàm & ad angulos rectos chordas omnes parallelas prædictæ diametro. Hoc verò demonſtrabimus ad finem demonſtrationis 47. lib. 2. & illud corollarij 7. noſtri loro, reponemus. Si enim non eſt axis coniugatus, huiuſmodi recta linea perpendicularis alteri axi in centro lineæ curuæ; poterit concipi axis huiuſmodi coniugatus, cui parallelæ chordæ eſſe debent, & ſectæ bifariàm & ad angulos rectos ab altero axe; & ſic hic axis coniugatus erit etiam ad angulos rectos alteri axi, per coroll. noſt. 2. ad prop. 29. lib. 1. elem. igitur in eodem puncto centri, duæ diuerſæ rectæ lineæ perpendiculares erunt eidem rectæ, quæ eſt axis; vnde ſequetur duos angulos rectos eſſe inæquales qui debent eſſe æquales per ax. 12. lib. 1. elem. Quare ex his deducemus hoc corollarium, quod erit demonſtratum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si ex centro lineæ curuæ excitetur vni eius diametro, quæ ſit axis eius, recta linea perpendicularis; erit axis coniugatus eidem.

STudioſi plurimi Tyroneſque in hiſce ſpeculationibus conicis, mirari ſolent, & celeritate ingenij præuenire quædam dubia. Primum cur Apollonius ſectiones diuerſas conicas, de quibus agit tàm in hoc primo libro, quàm in ſequentibus, non definiat; quandoquidem definitio naturam ſubiecti explicans, baſis eſt ac ſedimentum paſſionum omnium de ſubiecto definito demonſtrandarum. Alterum cur definitiones diametrorum linearum curuarum proponens, eas explicet per diuiſionem rectarũ linearũ cuidam rectæ lineæ parallelarum in ipſis curuis lineis accõmodatarum, in partes æquales factam ab diametris; non autem per transfixionem centri ipſarum curua-

ibus
vſ-
ofi-
quâ
cat;
na-
uam
onis
na-
deci-
ctio-
ctio-
ab
m ad
m ac
ver-
ſmo-
nclu-
i cir-
yper-
etros
ncto
iame-
aliæ
idem
t in-
rbo-
mu-
extra
culus
i ſeu
atur:
tmo-
uius
acere
di li-
nem
r ali-
rum
defi-

e me
s &
dam
, or-
rio-
ntel-

M-

LEMMATA
AD
LIBRVM I. CONICORVM
APOLLONII PERGÆI.

LEMMA I.

Recta linea deducta è sublimi in planum; illud attingit, seu pungit, in vnico solùm puncto. Est nostrum.



SVppositio. Ex sublimi puncto A, respectu plani CD, deducta sit recta linea AB, ad ipsum planum CD. Dico rectam lineam AB, attingere seu pungere planum CD, in vnico tantum puncto B.

Demonstratio. Esto, si fieri possit, recta AB, perforet seu pungat subiectum planum CD, in duobus punctis B, E; vel habeat lineam rectam EB communem cum dicto plano: nihil enim aliud recta linea obtinere potest commune cum plano aliquo, quàm quod exigit natura sua, videlicet partes lineares & puncta, iuxta def. 2. & 3. lib. 1. elem. non autem latitudinem, quæ licet propria sit superficiei, excluditur tamen à linea, def. 2. nemo verò illis communem profunditatem attribuet, quæ solummodò corpori seu solido, tanquam forma ipsum determinans vltimò, propria est, vti explicauimus in def. 1. lib. 11. elem. quæque etiam excluditur ab ratione superficiei, def. 5. lib. 1. elem. Examinemus ergo primum, videlicet quod recta AB, cum plano CD, habeat communia duo puncta B, & E, ex suppositione aduersarij: quæ nectere poterimus recta linea BE, existente in ipso plano, iuxta nost. coroll. 2. ad prop. 7. lib. 11. elem. Quia verò per def. 3. lib. 1. elem. recta linea ex æquo sua interiacet puncta, tota linea ABE, erit vna recta linea; quandoquidem debeat ex æquo sua interiacere puncta A & E; ita vt B punctum sit vnum ex eius intermedijs: sed pars huius rectæ lineæ, nimirum EB, est in subiecto plano probata existere; pars verò altera BA in sublimi data & recepta est: igitur rectæ lineæ ABE, pars erit in subiecto plano, & pars in sublimi, contra prop. 1. lib. 11. elem. hoc absurdum deductum ex positione aduersarij, manifestam facit falsitatem illius, quòd recta linea ex sublimi puncto adueniens plano, pungat illud in duobus punctis: vnde multò minùs illud perforabit in pluribus. Positio autem secunda etiam ruit; tunc enim rectæ lineæ ABE, pars BE sustentaretur in plano CD, & pars altera AB, in sublimi versaretur. Relinquitur igitur, vt in vnico tantùm puncto perforet seu pungat subiectum planum, recta linea è sublimi deducta ad illud.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Curua linea è sublimi adueniens plano, nullam rectam lineam plani potest habere communem.

CVm enim curua linea nullam obtineat ex natura sua rectitudinem, nullam etiam sibi vendicare poterit rectam lineam plani ad quod aduenire datur è sublimi, tanquam sibi & illi communem.

LEMMA II.

Superficies se mutuò secantes, habent pro sectione communi lineam tantummodò. Est nostrum.

ADuerte nos ad prop. 3. lib. 11. elem. demonstrasse in planis se mutuò secantibus, sectionem communem esse rectam lineam vnicam tantummodò. Nunc verò in vniuersum abstrahendo à planis, & reliquis superficiebus, demonstrabimus superficies quascumque se mutuò intersecantes, habere pro sectione communi, lineam tantummodò.

Pro demonstratione, intelligenda est natura sectionis quantitatum, quæ distinguitur ab superpositione requirente vt quantitas superposita quantitati, partes aliquas, aut tota ipsa, sibi inuicem adæquantia obtineant, verbi gratiâ, linea lineæ superposita exigit vt partes lineares vnius partibus linearibus adæquentur, aut tota toti: superficies verò superposita alteri, partes superficiales vnius, partibus superficialibus alterius adæquentur, aut tota toti:



cans habebit vt sic partem superficiei huiusmodi imminentem & insistentē sibi vndequaque, penetrando intra corpus sphæricum vel sphæroideum, & egrediendo extra illud; ita vt pars plani intra cauitatem huiusmodi existentis, & pars superficiei prædictæ, corpus comprehendant: quare per coroll. nostrum 1. sectio communis plani & superficiei sphæricæ vel sphæroideæ, erit linea curua spatium planum continens.

COROLLARIVM NOSTRVM IV.

Sectio communis plani & superficiei conicæ; quando planum non applicatur vertici, & pars superficiei conicæ versus verticem tota imminet plano secanti, vnáque cum plano ipso penetrante intra spatium inclusum ab dicta superficie conica, solidum constituit: est linea curua spatium planum circumambiens.

Cvm enim superficies dicta conica sit curua, & secetur plano secundum quod curua est & minimè angularis, id est plano non applicato vertici illius curuæ superficiei conicæ; solidúmque constituant ex datis superficies conica secta & planum secans: erit per coroll. nost. 1. sectio communis dicti plani & conicæ superficiei, linea curua spatium planum circumambiens.

LEMMA IV.

Planum secans superficiem curuam, prout curua est, & minimè angularis, spatium solidum comprehendentem cum plana alia superficie; & planum secans secuerit etiam dictam planam superficiem non productam: habet pro sectione communi duas lineas spatium planum includentes, vnam curuam, aliam rectam. Est nostrum.

Datur planum secare superficiem curuam, prout curua est, & minimè angularis; ergo per præcedens Lemma, sectio communis huius plani & curuæ superficiei, erit linea curua: Sed datur etiam planum idem secare planam superficiem suppositam dictæ curuæ; ergo per prop. 3. lib. 11. elem. sectio communis horum duorum planorum erit recta linea. Verùm datur superficies curua & plana simul concludentes spatium solidum; & planum secans datur ambas has superficies secare, quin etiam coniunctionem ambarum, igitur sectio communis erit composita ex linea curua & recta, tam recepta in superficie plana secante, quàm in superficiebus plana & curua sectis; Quod verò recipitur & adæquatur plano, plana superficies est; igitur sectio communis prædicta erit aliquid plani secantis; vbique definit linea curua, ibi incipit recta ex vtraque parte. Igitur sectio communis prædicta erit plana superficies vndequaque conclusa, partim curua linea, partim recta. quod erat probandum.

COROLLARIVM NOSTRVM I.

Si hemisphærium vel hemisphæroides conclusum inter planam superficiem & curuam, plano secetur secante curuam & planam superficiei prædictas: sectio communis est figura plana comprehensa inter rectam lineam & curuam.

Nam per hoc lemma, cùm hemisphærium vel hemisphæroides sit corpus solidum conclusum inter planum & conuexum seu concauum curuum, quod secari datur ab plano secante ambas superficies prædictas; sectio communis erit figura plana contenta sub linea curua & recta.

COROLLARIVM NOSTRVM II.

Si conus plano secetur minimè per verticem eius acto, secante etiam basim eius circularem non productam: sectio communis erit figura plana sub linea curua & recta contenta.

Qvandoquidem datur planum secare conum qui continetur sub superficie curua & plana, per def 4. illumque minimè secat ex datis per verticem, vbi curua coni superficies angulum solidum constituit; secabitur curua coni superficies plano, prout curua est & minimè angularis; daturque etiam idem planum secare planum circulare minimè productum, quod est basis coni, in termino circulari curuæ conicæ superficiei: erunt simul extrema puncta sectionis communis conicæ curuæ superficiei, & circularis dicti plani, tam in plano secante, quàm in superficiebus coni curua & circulari: Ergo per præsens lemma, sectio communis proposita, erit plana superficies comprehensa & ab recta linea & ab curua. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM NOSTRVM III.

Si conus plano secetur minimè per verticem eius acto, & secante basim eius circularem productam: sectio communis erit plana figura conclusa solummodò linea curua.

Cvm detur planum secans minimè actum per verticem coni, datur secare curuam coni superficiem, prout est curua & minimè angu-

missa
æ est
media
oll. 1.
o. eius-
ub DF,
x datis:
ectarum
oque per
n. vel per
unt æqua-
ce princi-
perdendi-
rtibus suis;
erit positio
cumferentia
que ID vel
ABC: Quo
nea ABC
pars eius,
quod erat

e potest.
ur nihil
cuius
uando
n tan-
rectæ
BC.
bent
latæ
li-
nea
&
cta
tio
il-
in-

uo-
cta
um
que
ad
Eu-
ius

tran-
ctan-
ne re-
a HI
ngu-

n, ad
cetur
to A;
,DG,
D de-
inceps



inceps rectos, rectanguli dati & facti. Præterea per prop. 12. lib. 6. elem. datis tribus rectis DG prima, DE secunda, HI tertia, reperiatur quarta proportionalis IK. Affirmo rectam IK esse quæsitam, ad quam data HI, habeat rationem quadrati A ad rectangulum BCDE.

Demonstratio. Quandoquidem quadratum A, & rectangulum DF sunt per apparatum æqualia, habebunt per prop. 7. lib. 5. elem. eandem rationem ad rectangulum BD; sed per prop. 1. lib. 6. elem. rectangulum DF habet ad rectangulum BD, rationem rectæ DG ad rectam ED: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. quadratum A ad rectangulum BD, habebit rationem rectæ DG ad rectam ED; habet autem per apparatum recta HI ad rectam IK, rationem rectæ DG ad rectam ED: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. recta HI data ad rectam IK inuentam, rationem habebit quadrati A dati ad rectangulum BD datum. Fecimus ergo imperatum iuxta primam lemmatis partem, & rectè factum esse demonstrauimus.

Suppositio pro secunda parte demonstranda. Datum sit quadratum A, & rectangulum BCDE, & recta HI, oporteatque inuenire aliam rectam, quæ ad datam HI obtineat rationem quam habet quadratum A ad rectangulum BCDE.

Apparatus. Per prop. 45. lib. 1. elem. ad latus CD rectanguli BCDE applicetur rectangulum DF æquale quadrato A; erunt per prop. 14. lib. 1. eit. duæ rectæ ED, DG, indirectum, propter angulos deinceps ad D rectos rectangulorum dati & facti. Tùm per prop. 12. lib. 6. elem. datis tribus rectis ED prima, DG secunda, HI tertia, quæratur quarta IK proportionalis. Dico rectam IK inuentam, ad datam HI habere rationem quadrati A ad rectangulum BD.

Demonstratio. Cùm quadratum A & rectangulum DF sint æqualia, per apparatum, ipsa eandem habebunt rationem ad rectangulum BD, per prop. 7. lib. 5. elem. Sed per prop. 1. lib. 6. elem. rectangulum BD habet ad rectangulum DF, rationem rectæ ED ad rectam GD; & per apparatum recta HI habet ad rectam IK, rationem rectæ ED ad rectam DG: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. recta HI ad rectam IK habebit rationem rectanguli BD ad rectangulum DF, vel quadratum A: quare per coroll. prop. 4. lib. 5. cit. inuertendo, recta IK inuenta ad rectam datam HI, obtinebit rationem quam habet quadratum datum A ad rectangulum datum BCDE, atque ita impleuerimus propositum, & rectè factum esse probauerimus.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Datis duobus quadratis, vel duobus rectangulis, vel rectangulo pro primo dato, & quadrato pro secundo, & recta data: inuenire aliam rectam, quæ ad datam habeat rationem primæ datarum quantitatum ad secundam; vel ad quam data recta habeat rationem primæ datarum quantitatum ad secundam.

Per prop. 45. lib. 1. elem. ad vnum latus altitudinis primi rectanguli dati, siue quadrati siue non quadrati, applicetur rectangulum æquale secundo dato rectangulo, quadrato siue non quadrato; & reliqua fiant quæ præcepimus in præcedentibus apparatibus: demonstratio allata inseruiet ad probationem propositi in hoc corollario nostro.

LEMMA VII.

Rationes composita ex eisdem rationibus, sunt eadem rationes. Et quatuor quantitates, quæ referuntur sub rationibus compositis ex eisdem rationibus, sunt proportionales; prima ad secundam, vt tertia ad quartam. Et eadem rationes componuntur ex eisdem rationibus. Est nostrum.

Suppositio. Sit ratio A, ad C, quæ E ad G; & sit ratio C ad D, quæ G ad H; & ratio D ad B, quæ H ad F: tùm ratio A ad B componatur ex rationibus A ad C, & C ad D, & D ad B; tùm ratio E ad F componatur ex rationibus E ad G, & G ad H, & H ad F; quæ sunt eædem rationes cum prædictis. Dico primò rationem A ad B compositam ex prædictis suis rationibus, esse eandem cum ratione E ad F composita ex prædictis suis rationibus: & secundo dico esse A ad B vt E ad F. Tùm sit A ad B, vt E ad F; & ratio A ad B, componatur ex dictis rationibus A ad C, & C ad D, & D ad B: dico rationem E ad F, ex illis eisdem rationibus componi.

Demonstratio primæ assertionis. Eisdem rationibus A ad C, & E ad G, addantur eædem rationes C ad D, & G ad H; fient per ax. nostrum 2. ad lib. 5. elem. eædem rationes A ad D, & E ad H: tùm his eisdem iam compositis seu factis rationibus addantur rationes eædem D ad B, & H ad F; fient etiam eædem rationes per idem ax. cit. A ad B, & E ad F.

Demonstratio secundæ assertionis. Cùm per primam assertionem, sint eædem rationes A ad B, & E ad F; erit A ad B, vt E ad F; hoc est prima A ad secundam B, erit vt E tertia ad quartam F quantitatem: illæ enim sunt proportionales quantitates, inter quas mediant eædem rationes; sed inter A & B, & inter E & F, intercedunt eædem rationes compositæ ex eisdem: ergo erit A ad B vt E ad F. quod erat demonstrandum.

Demonstratio tertiæ assertionis. Per. ax. 10. lib. 1. elem. rationes simul sumptæ componentes adæquatè vnam rationem sunt ipsamet

recta-
per co-
a pro-
p.17.
ED
cùm
AD,
FD,
erat

M.

llela
num
i la-

gulo
cta
qua-
hem
on-
bus
b.1.

eri-
am
ad
io-



elem. quadratum rectæ I æquale rectangulo sub XH, HA, ergo etiam quadratum rectæ KH, erit æquale eidem rectangulo sub XH, HA, per 1. ax. lib. 1. elem. ergo per cit. prop. 17. recta KH erit media proportionalis inter rectas XH, HA, quod volumus: Si verò fuerint inæquales rectæ I, KH, alterum rectilineum simile similiterque positum, vnum super recta I, alterum super recta KH, erit inæquale alteri, per coroll. nost. 1. ad prop. 22. lib. 6. elem. contra id quod demonstrauimus. Absurdum hoc indicat positionem contradicentem assertioni huius lemmatis, esse falsam, & ipsam assertionem esse veram.

LEMMA X.

Si fuerint quatuor rectæ lineæ proportionales: erit quadratum primæ & rectangulum sub prima & secunda; sicut quadratum tertiæ ad rectangulum sub tertia & quarta. Et contrà, vt rectangulum sub prima & secunda, ad quadratum sub primæ; sic rectangulum sub tertia & quarta, ad quadratum tertiæ. Est nostrum.

Svppositio. Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A prima, B secunda, C tertia, D quarta; hoc est sit A ad B, sicut C ad D. Dico quadratum rectæ A, ad rectangulum sub A & B, ita esse, sicut quadratum C ad rectangulum sub C & D: Tùm rectangulum sub A & B, ita esse ad quadratum A, sicut rectangulum sub C & D ad quadratum C.

Demonstratio primæ partis. Sumendo pro altitudine communi rectam A, tàm quadrato rectæ A, quàm rectangulo sub A & B: erit per prop. 1. lib. 6. elem. quadratum rectæ A ad rectangulum sub A & B, sicut est recta A ad rectam B; & quia ex datis est C ad D vt A & B, erit per prop. 11. lib. 5. elem. quadratum rectæ A ad rectangulum sub A & B, sicut est recta C ad rectam D. Præterea assumendo pro altitudine communi rectam C, tam quadrato rectæ C, quàm rectangulo sub C & D: erit per cit. prop. 1. lib. 6. elem. quadratum rectæ C ad rectangulum sub C & D, vt est recta C ad rectam D. Cùm igitur ostenderimus quadratum rectæ A ad rectangulum sub A & B, esse vt est recta C ad rectam D; & quadratum rectæ C ad rectangulum sub C & D, esse sicut est ipsa recta C ad rectam D: erit per prop. 11. lib. 5. elem. quadratum rectæ A ad rectangulum sub A & B, vt quadratum rectæ C ad rectangulum sub C & D; hoc est quadratum sub prima recta ad rectangulum sub prima & secunda, sicut quadratum sub tertia ad rectangulum sub tertia & quarta, quomodo fuit propositum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Quia in prima parte ostendimus esse quadratum A ad rectangulum sub A & B, sicuti est quadratum C ad rectangulum sub C & D: erit per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. inuertendo, rectangulum sub A & B prima & secunda ad quadratum A primæ, sicuti est rectangulum sub C & D tertia & quarta ad quadratum C tertiæ. quod erat demonstrandum.

LEMMA XI.

Dato vno rectangulo sub duabus rectis lineis comprehenso: exhibere aliud rectangulum æquale illi, sub data recta; inueniendo aliam sub qua & data comprehendatur rectangulum exhibendum. Est nostrum.

Svppositio. Dato rectangulo ABCD contento sub AB & BC, exhibendum sit rectangulum aliud æquale illi, comprehensum sub data recta FE, & alia inuenienda.

Apparatus. Tribus datis rectis lineis EF prima, secunda verò AB, vel BC, tertia verò BC reliqua quæ cum assumpto latere rectanguli dati, ipsum efficit, quæratur per prop. 12. lib. 6. elem. quarta proportionalis FG. Dico rectangulum sub data EF, & inuenta FG, esse æquale dato rectangulo ABCD.

Demonstratio. Quandoquidem prima recta è quatuor proportionalibus EF, AB, BC, FG, est EF data, & quarta FG inuenta: erit per prop. 16. lib. 6. elem. rectangulum sub EF, FG, æquale rectangulo sub AB, BC. atque ita fecerimus imperatum.

Alius apparatus. Per prop. 3. lib. 1. elem. de recta longissima sumantur duæ consequentes partes AB, BC, æquales lateribus duobus AB, BC, dati rectanguli illud efficientibus; & ad quemcumque angulum ex puncto B ponatur recta FE æqualis datæ EF: tùm per prop. 5. lib. 4. elem. circa tria puncta A, E, C, veluti tres angulos trianguli AEC, circulus describatur, & vltra B vel F, producatur recta EF, vsque ad circuli circumferentiam in G: eruntque sic in circulo facto duæ chordæ AC, EG, se mutuò intersecantes in puncto communi B vel F. Dico autem rectam BG vel FG, esse quæsitam, quæ cum data EF, rectangulum contineat æquale rectangulo dato ABCD.

Demonstratio. Quandoquidem duæ chordæ AC, EG, in circulo AECG se mutuò in B vel F intersecant: erit rectangulum sub AB, BC, æquale rectangulo sub EF, FG, per prop. 35. lib. 3. elem.

LEMMA XII.

Si sint duo parallelogramma non rectangula æquiangula: erit parallelogrammum ad parallelogrammum, vt rectangulum sub eisdem lateribus ad rectangulum sub eisdem lateribus ipsorum parallelogrammorum. Est Pappi Alexandrini lemma 6. ad hunc lib. 1. conicorum Apollonij.

Svppositio. Parallelogramma non rectangula ABCH, DEFK, sint æquiangula. Dico

d
n
fit
m
FK
fim
im-
FK,
lum
erat

m a-
Et fi
vnum
habe-

gram-
equa-
. Di-
gula.
p.34.
gulus
tum
s G
o per
nt æ-
lib.
obus
funt
funt
ax.
ma-
re-
C,
ales
nfis
pa-
vni
m in
rs.
late-
num
gulū.
non-



Demonstratio secundæ partis. Per prop. 34. lib. 1. elem. angulus C, oppositus angulo A dato recto, erit æqualis illi, ideoque etiam rectus. Cumque sint per prop. 29. lib. cit. anguli in A & B simul æquales duobus rectis, tùm etiam anguli in C & D, anguliique omnes recti sint æquales inter se per 12. ax. lib. cit. si ex A & B duobus rectis simul, tùm ex C & D duobus rectis simul, subtrahamus æquales angulos A & C rectos, relinquentur alij duo anguli æquales recti B & D, per 3. ax. lib. cit. Atque ita probauerimus quatuor angulos parallelogrammi quadrilateri habentis vnum angulum rectum, esse rectos; seu quod idem est ipsum datum parallelogrammum esse rectangulum.

LEMMA XIV.

Si trapezium duo latera parallela habuerit; & parallelogrammum, vnum angulum æqualem vni angulo trapezij, latusque vnum æquale duobus simul lateribus parallelis trapezij, alterum vero latus æquale lateri trapezij circa dictum angulum: erit parallelogrammum hoc duplum trapezij prædicti. Est deductio seu consequens Pappi Alex. ad lemma suum 8. ad hunc librum. 1. conic. Apoll. Pergæi.

Suppositio. Trapezium ABCD, habeat duo latera AB, DC, parallela; & parallelogrammum AFED, habeat angulum D æqualem angulo D, trapezij, latusque AD æquale lateri AD, trapezij, circa dictum angulum D; alterum verò latus AF vel DE, æquale duobus simul datis lateribus parallelis AB, DC, dicti trapezij. Dico parallelogrammum AFED esse duplum dicti trapezij ABCD.

Apparatus. Cùm sint per prop. 34. lib. 1. elem. æquales rectæ AF, DE, si per prop. 3. lib. eiusdem detrahantur ex illis, æquales DC, FB, remanebunt æquales AB, CE, per 3. ax. lib. cit. Ductis verò rectis AC, BE, sic erit instituenda

Demonstratio. Quia per cit. prop. 34. anguli in D & F sunt æquales, & latera AD, FE, æqualia, tùm per apparatum sunt facta æqualia latera FB, DC; erunt per 4. prop. lib. 1. elem. duo triangula ADC, EFB æqualia. Præterea per prop. 29. lib. eiusdem anguli alterni ABC, ECB, sunt æquales, & latera AB, CE, æqualia per apparatum, latusque est commune BC; erunt per cit. prop. 4. triangula ABC, ECB, æqualia. His igitur postremis triangulis æqualibus, si addantur priora ostensa æqualia triangula ADC, EFB, fient per 2. ax. lib. cit. trapezia ABCD, ECBF, æqualia. Totum verò parallelogrammum AFED est per 19. ax. lib. cit. æquale dictis duobus trapezijs ABCD, ECBF: ergo duplum erit trapezij dati ABCD. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si loco trapezij concipiatur rectangulum datum: erit parallelogrammum sub datis conditionibus, duplum rectanguli.

Apparatus ac demonstratio allata, erunt applicanda huic corollario.

LEMMA XV.

Si triangulum rectilineum habuerit vnum angulum æqualem vni angulo trapezij: erit rectangulum sub duobus lateribus trianguli continentibus angulum prædictum, ad rectangulum comprehensum sub vno latere trapezij circa prædictum angulum, & composita recta ex duobus eiusdem trapezij lateribus conterminis prædicto lateri; vt triangulum ipsum ad trapezium ipsum. oportet autem vt trapezij duo latera simul sumpta pro vno latere rectanguli, sint parallela inuicem. Est Pappi Alex. 8. lemma ad hunc lib. 1. conicorum Apollonij.

Suppositio. Triangulum ABC rectilineum habeat angulum B æqualem angulo FGH trapezij FIHG habentis duo latera FI, GH, parallela. Dico esse rectangulum sub AB, BC, lateribus trianguli ABC continentibus prædictum angulum B, ad rectangulum sub FG, & sub recta composita ex FI, GH, lateribus duobus parallelis in dicto trapezio dato, conterminisque lateri FG; vt triangulum ABC ad trapezium FIHG, data.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto A anguli trianguli BAC dati, emittatur recta linea AE parallela ipsi BC; sumaturque per 3. prop. lib. eiusdem, ipsa AE æqualis ipsi BC: transmissa recta EC erit parallela & æqualis ipsi AB, per prop. 33. lib. cit. resultabitque parallelogrammum ABCE, duplum trianguli dati ABC, per prop 41. lib. cit. In trapezio verò dato, producta recta FI vltra I, sumatur per 3. prop. cit. recta IO æqualis ipsi GH: similiter producendo rectam GH, vltra I, sumatur recta HN æqualis ipsi FI: eruntque per ax. 2. lib. 1. cit. æquales duæ rectæ FO, GN, tùm parallelæ ex datis. Quod si puncta O & N, reiunciantur rectâ ON, ipsa erit æqualis & parallela ipsi FG, per prop. 33. lib. cit. resultabitque parallelogrammum FONG, duplum trapezij dati, per lem. præcedens 14. Et quia dantur anguli ABC, FGN, æquales, in duobus parallelogrammis ABCE, FONG, erunt per lemma 13. duo dicta parallelogramma æquiangula.

Demonstratio. Quia sunt æquiangula parallelogramma ABCE, FONG, erit per lem. 12. parallelogrammum ABCE ad parallelogrammum FONG, vt rectangulum sub AB, BC,

ad rectangulum sub FG, GN, hoc est sub FG & duobus simul FI, GH, lateribus trapezij dati. Est verò per prop. 15. lib. 5. elem. triangulum ABC ad trapezium FIHG, vt parallelogrammum ABCE ad parallelogrammum FONG; videlicet semissis ad semissem, vt totum ad totum: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit triangulum ABC, ad trapezium FIHG, vt rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub FG, & sub FI, GH, simul sumptis. quod erat demonstrandum.

LEMMA XVI.

Si recta linea diuisa bifariàm, addatur aliqua recta; & sumatur pro vna recta, hæc composita ex diuisa & adiecta, eique iterum adijciatur prædicta recta addita: totalis huius vltimæ rectæ compositæ dimidium, erit compositum ex semisse datæ primæ, & adiecta prima recta. Est nostrum.

SVppositio. Sit data recta AB diuisa bifariàm in F; illique addita recta BE in directum; tùm toti AFBE compositæ, adiecta sit iterum in directum ipsa eadem addita EB. Dico quod totalis huius vltimæ compositæ AFBEB, dimidium, erit FBE compositum ex FB dimidio datæ primæ AB, & ex BE adiecta prima.

Demonstratio. Ex ipsis datis, tota recta composita vltima AFBEB, componitur ex data AB diuisa bifariàm in F, tùm ex BEB bifariàm secta in E; nam bis additur in directum ipsa BE, ipsi AB datæ. Itaque totalis AFBEB componitur ex duabus partibus AB, BB, diuisis bifariam singulis, illa in F, ista in E. ergo si æqualibus AF, FB, rectis, addantur æquales rectæ EB, BE; EB quidem ipsi AF, BE verò ipsi FB, fient per 2. ax. lib. 1. elem. æquales rectæ AF, EB, simul, & FBE; adæquantes simul sumptæ totam rectam vltimam prædictam compositam AFBEB: per 19. ax. lib. eit. Igitur per 7. ax. lib. eiusdem, recta FBE composita ex FB dimidio datæ rectæ AB, & ex addita BE primo loco, erit semissis totius rectæ AFBEB compositæ vltimæ. quod erat explicandum.

LEMMA XVII.

Si datæ recta linea bifariàm diuisa, addatur aliqua recta linea bis: erit tota composita dupla compositæ ex semisse data, & semel addita recta. Est nostrum.

SVppositio. Data sit recta CD, bifariàm diuisa in G, eique adiecta DF bis. Dico totam rectam compositam ex CD data, & bis DF, esse duplam rectæ GF, compositæ ex GD semisse datæ CD, & ex DF semel addita recta.

Demonstratio. Si æqualibus datis dF, FD, addantur æquales datæ GC, DG; prima primæ, secunda secundæ; fient per 2. ax. lib. 1. elem. æquales rectæ dF, GC, simul sumptæ, & GF: Ergo si isti postremæ GF, addantur dF, GC, simul accepte, hoc est altera pars æqualis ipsi GF; fiet tota CF, Fd, hoc est data CD, & bis addita DF, dupla rctæ GF compositæ ex GD dimidio datæ rctæ CD, & ex FD addita semel. quod erat declarandum.

LEMMA XVIII.

Datis duabus rectis, prima & secunda: inuenire rectangulum & quadratum; ita vt rectangulum ad quadratum eam habeat rationem, quam prima è datis rectis lineis ad secundam. Est nostrum.

SVppositio. Sit data recta AB prima, & secunda BC: & oporteat reperire rectangulum & quadratum; ita vt rectangulum ad quadratum habeat rationem quam prima recta AB habet ad secundam BC.

Apparatus. Assumatur quælibet alia recta AD; tribusque datis hoc ordine AB, BC, AD, reperiatur per prop. 12. lib. 6. elem. quarta linea proportionalis DE. Tùm sumpta communi altitudine DE, fiant iuxta lem. 1. ad lib. 2. elem. rectangulum sub AD, DE, & rectangulum sub DE, DE, (istud postremum erit quadratum.) Dico autem esse rectangulum sub AD, DE, ad quadratum DE, vt est recta AB ad rectam BC datam.

Demonstratio. Per constructionem est AD ad DE, vt AB ad BC; & per 1. prop. lib. 6. elem. est rectangulum sub AD, DE, ad quadratum DE, vt recta AD ad rectam DE; eo quod sint parallelogramma sub eadem altitudine: Ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub AD, DE, ad quadratum DE, sicut prima recta linea AB data, ad secundam BC. atque ita fecerimus imperatum.

LEMMA XIX.

Datis duabus rectis, CD prima, DE secunda, & quadrato rectæ DEF composita ex recta DE secunda, & altera EF: inuenire quadratum aliud, ad quod quadratum rectæ DEF, habeat rationem recta CD data ad rectam DE datam. Est nostrum.

APparatus. Per prop. 12. lib. 6. elem. datis tribus rectis hoc ordine, CD, DE, DEF, reperiatur quarta proportionalis FG: Tùm per prop. 13. lib. eit. inueniatur media proportionalis recta HI, inter rectas DEF, FG. Dico quadratum rctæ DEF ad quadratum rectæ HI, se habere, vt se habet recta CD ad rectam DE.

Demonstratio. Per coroll. prop. 20. lib. 6. elem. quadratum rectæ DEF ad quadratum rectæ HI, est vt recta DEF ad rectam FG: est autem per apparatum recta DEF ad rectam FG, vt recta CD ad rectam DE; ergo per prop.

prop. 11. lib. 5. elem. erit quadratum rectæ DEF ad quadratum rectæ HI, vt est recta CD ad rectam DE. igitur ad praxim reduximus propositum.

LEMMA XX.

In dato triangulo isosceli accommodare rectam lineam minorem quolibet latere æqualium dicti trianguli, parallelam vni lateri ex æqualibus; ita vt eius extrema attingant basim & aliud latus æqualium, vnum basim, alterum vero aliud latus ex æqualibus, cui non est parallela recta accommodata linea. Est nostrum.

SVppositio. Datum sit triangulum isosceles ECD, & recta linea AB data minor quàm CD vel CE, latera æqualia ipsius trianguli isoscelis dati: oporteatque hanc rectam AB accommodare in dato triangulo isoscele, ita vt sit parallela lateri vni æqualium, verbi gratia ipsi CD, attingatque vno suo extremo A, aliud latus CE ex æqualibus, & alio suo extremo B, basim ED dicti trianguli.

Apparatus. Quandoquidem recta AB minor est quàm recta CD, vel CE. poterimus per prop. 3. lib. 1. elem. resecare rectam DI ex maiore DC, æqualem ipsi AB; tùm per prop. 31. lib. eiusdem 1. elem. ex puncto I transmittere rectam parallelam IA ipsi basi DE, secantemque in A, latus aliud CE; & ex puncto A, agere aliam rectam AB parallelam ipsi CD, secantemque in B, basim ED. Dico hanc rectam AB esse æqualem datæ AB; & iuxta hunc apparatum esse secundum data in dato triangulo I:CD isosceli accommodatam, parallelam lateri CD ex æqualibus, & attingere suis extremis A & B, latus CE, & basim ED.

Demonstratio. Per apparatum ipsum recta AB est parallela lateri CD vni ex æqualibus, & recta IA parallela basi ED: quare parallelogrammmum erit AIDB; ideoque per prop. 34. lib. 1. ele. recta AB accommodata intra triangulum datum isosceles, erit æqualis ipsi DI, positæ æquali ipsi datæ AB separatæ: igitur per 1. ax. lib. 1. elem. erit recta AB accommodata per apparatum in triangulo dato isosceli, æqualis ipsi datæ AB, conditiones obtinens datas in lemmate.

LEMMA XXI.

Dato quadrato, & recta linea: inuenire aliam rectam, quæ cum data rectangulum efficiat æquale dato quadrato. Est nostrum.

SVppositio. Datum sit quadratum super recta AB, dataque sit recta BC: & oporteat inuenire aliam rectam lineam quæ cum data BC, efficiat rectangulum æquale quadrato super recta AB.

Apparatus. Ex puncto extremo B, datæ rectæ BC, erigatur per prop. 11. lib. 1. elem. recta linea BA perpendicularis ipsi BC, & per prop. 3. lib. cit. ponatur hæc perpendicularis BA æqualis lateri AB quadrati dati, nectanturque puncta A, C, extrema sibi inuicem perpendicularium BC, BA, recta linea AC; & per cit. prop. 11. ex A erigatur alia recta perpendicularis ipsi AC, quæ secabit in D, rectam CB producendam vltra B: nam angulus BAD minor est recto DAC, & angulus in B rectus; ergo per 13. ax. lib. 1. elem. duæ rectæ AD, CBD, concurrent in D. Dico autem rectam BD esse quæsitam, quæ cum data BC efficiat rectangulum æquale dato quadrato super recta AB.

Demonstratio. Cùm enim ex angulo recto DAC, demissa sit recta linea AB perpendicularis ipsi DC basi trianguli rectanguli DAC; erit per coroll. 1. prop. 8. lib. 6. elem proportionalis inter DB, BC, segmenta baseos DC: ac proinde per prop. 17. lib. 6. cit. erit rectangulum sub DB, BC, æquale quadrato super recta AB dato. atque ita proposito satisfecerimus.

LEMMA XXII.

Ex angulo semicirculi dati ducta aliqua recta linea quæ sit chorda arcus partialis dicti semicirculi: Ex aliquo puncto huius arcus emittere rectam lineam parallelam dictæ chordæ secantemque productam diametrum ipsius dati semicirculi; facientem proportionem quadrati sui ad rectangulum sub recta sita inter extremum aliud dictæ diametri & punctum sectionis eius cum prædicta parallela, & sub alia recta sita inter prædictum punctum & angulum assumptum semicirculi; quam habet recta data ad aliam datam. Est Eutocij ad propos. 53. lib. 1. Apollonij.

SVppositio. Sit semicirculus ABC circa diametrum AC, centrumque eius L: sitque data proportio rectæ EF ad rectam FG. Et oporteat ad praxim reducere propositum, ducta chorda CB ex angulo C semicirculi, ita vt angulus ACB sit æqualis dato angulo acuto, qui fiet per prop. 23. lib. 1. elem.

Apparatus. De recta EFG composita ex duabus datis EF, FG, ex puncto F communi detrahatur per 3. prop. lib. 1. elem. recta FH æqualis ipsi EF; & per prop. 10. lib. eiusdem diuidatur bifariàm in K, reliqua HG: tùm per prop. 12. lib. cit. ex centro L semicirculi demittatur recta linea LQN semidiametralis ad chordam CB perpendicularis: Præterea ex puncto N circumferentiæ semicirculi excitetur vtrimque perpendicularis ipsi LN, recta linea ONM, per prop. 11. lib. cit. hæc recta ONM continget semicirculum in N, per prop. 16. lib. 3. elem. & erunt per prop. 29. lib. 1. elem. parallelæ rectæ lineæ ONM, BQC, eo quod anguli LNM, & LQC, sint recti; secabi-

 que

que in M, recta N M rectam A L C producendam vltra C, idque per 13.ax. lib.1. elem. nam angulus NLC est acutus in triangulo QLC rectangulo, per coroll.1. ad prop. 17. lib.elem. & angulus in N est rectus. Per proposit.10. lib.6. elem. diuidatur recta MN in X, vt est recta FK in H diuisa, ita vt sit MX ad XN, sicut FH ad HK: tùm per prop. 3. lib. 1. elem. de producta MN vltra N, sumatur recta NO æqualis ipsi NX. Denique ducantur rectæ LO, LX, quarum prima secet in P, altera in R, semicirculi circumferentiam; & recta PR transmittatur, quam probo esse parallelam ipsi ONXM, & secare rectam ALN in D. In triangulis ONL, XNL, cùm sint anguli in N ostensi recti, ideoque æquales per 12. ax. lib. 1. elem. comprehensi ab æqualibus relatiuè lateribus ON, NL, XN, NL, erunt per 4. prop. lib. 1. cit. anguli in L æquales; sed & per 5. prop. lib. eiusdem, anguli LPR, LRP, sunt æquales in triangulo isoscele PLR: Cùmque recta PR secet obuiam rectam LN in S; & in triangulis PSL, RSL, sint duo anguli æquales ostensi relatiuè, erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. cit. t. reliqui anguli ad S deinceps æquales, ideoque recti per 10. def. lib. cit. ergo per prop. 28. lib. eiusdem, cùm recta LSN, incidens in rectas ONM, PSR, efficiat angulos in N & S, æquales, ipsæ rectæ ONM, PSR, erunt parallelæ & per prop. 30. lib. eiusdem recta PSR erit parallela chordæ datæ CB: cumque vnam OM illarum secet recta AM, etiam aliam secabit PSR productam in D, per prop. 11. Procli. His positis assero quadratum rectæ DR emissæ ex puncto R, arcus CB ad diametrum AC, dati semicirculi productam vltra C, parallelæ ipsi CB chordæ, esse ad rectangulum sub AD, DC; hoc est sub recta posita inter aliud extremum A diametri prædictæ diuersum ab assumpti anguli semicirculi puncto C, & inter punctum D sectionis communis dictæ rectæ DR, & diametri productæ, & sub alia recta DC posita inter idem punctum D, idemque punctum C, anguli semicirculi assumpti prædicti; vt est recta EF data, ad rectam aliam datam FG.

Demonstratio. Quandoquidem recta PRD parallela est rectæ OM, easque secat recta LRX, erit per coroll. nost. ad prop. 4. lib. 6. elem. & per prop. 18. lib. 5. elem. vt OM ad MX, sic PD ad DR: Et quia per apparatum est vt FH ad HK, sic MX ad XN; estque in tatione sub dupli etiam per apparatum vt HK ad HG, ita XN ad XO: erit per prop. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate, vt FH ad HG, ita MX ad XO; quare per coroll. prop. 4. lib. 5. cit. erit inuertendo vt HG ad FH, sic XO ad MX; & componendo iuxta prop. 18. lib. eiusdem erit vt GF ad FH seu ad FE æqualem, ita OM ad MX; & per prop. 11. lib. cit. ita PD ad DR. Quod si communem assumpserimus altitudinem DR, erit per prop. 1. lib. 6. elem. vt PD ad DR, ita rectangulum sub PD, RD, ad quadratum super recta DR. Verùm per prop. 36. lib. 3. elem. rectangulum sub PD, DR, est æquale rectangulo sub AD, DC; ergo erit per prop. 7. & 11. lib. 5. elem. vt PD ad DR, sic rectangulum sub AD, DC, ad quadratum rectæ DR. Cùmque probauerimus esse PD ad DR vt GF ad FE; erit per cit. prop. lib. 5. elem. 11. vt GF ad FE, sic rectangulum sub AD, DC, ad quadratum super recta DR: igitur per coroll. prop. 4. lib. 5. cit. erit inuertendo, vt recta EF ad rectam FG, sic quadratum super recta DR, ad rectangulum sub AD, DC. ergo fecerimus ac demonstrauerimus propositum.

LEMMA XXIII.

Dato semicirculo, & angulo acuto rectilineo facto ad extremum diametri eius: educere ab aliquo puncto circumferentiæ rectam aliquam lineam parallelam lateri dicti anguli, quod non sit diameter, ad ipsam diametrum, ita vt quadratum recta ducta sit ad rectangulum sub partibus diametri, sicut recta aliqua data ad aliam rectam datam in æqualem ipsi alteri data. Est Eutocij ad prop. 54. lib. 1. Apoll.

Suppositio. datus sit semicirculus ABC, cuius diameter sit recta AC; ad cuius extremum A sit angulus CAB acutus. Et oporteat ab aliquo puncto puta O, circumferentiæ dicti semicirculi, educere rectam OR ad diametrum AC, parallelam lateri BA quod cum AC diametro angulum datum CAB efficit; ita vt quadratum rectæ OR sit ad rectangulum sub AR, RC, dictæ diametri AC partibus, sicut recta DE ad rectam EF datam inæqualem ipsi DE alteri datæ.

Apparatus. ad extremum E maioris rectæ EF è datis, ponatur per prop. 11. lib. elem. recta alia data ED minor, perpendicularis ipsi EF: & de producta EF vltra F, sumatur per prop. 3. lib. 1. cit. recta FG æqualis ipsi DE; totaque EG bifariàm in H diuidatur per prop. 10. lib. eiusdem. tùm etiam diameter AC bifariàm secetur in puncto K, quo vt centro perficiatur circulus ABCP: & per prop. 12. lib. t. elem. cit. ex puncto K emittatur recta KS perpendicularis chordæ AB, producaturque vltra S, donec occurrat in L circumferentiæ circuli. Tùm per prop. 11. lib. cit. ad punctum L semidiametri KL excitetur vtrimque perpendicularis recta NLX, ipsi KL, quæ circulum continget in L, per prop. 16. lib. 3. elem. Porrò rectæ NLX & AB, erunt parallelæ per prop. 28. lib. t. elem. propter angulos in L & S rectos æqualesque, factos ab recta KSL. Quod si producatur recta CA, conueniet in M cum recta NLX, per prop. 11. Procli, eo quod aliam parallelam AB, ipsi NLX, intersecet. Præterea per prop. 12. lib. 6. elem. tribus rectis datis hoc ordine HF, FG, LM. reperiatur MN quarta proportionalis; & per prop. 3. lib. 1. elem. de produ-

producta LM vltra M, sumatur recta MN æqualis ipsi inuentæ MN: Insuper per cit. prop. 3. de recta ML producta vltra L, sumatur recta LX æqualis ipsi LN. Ad hæc ducatur recta NK producenda vltra centrum K, quousque occurrat in O circumferentiæ circuli; & altera transmittatur recta XK, donec producta vltra K, occurrat in P puncto circumferentiæ circuli. Denique puncta P,O, vniantur recta PO secante in R diametrum AC circuli. Dico autem rectam OR esse parallelam rectæ BA, & quadratum super recta OR esse ad rectangulum sub AR, RC, sicut est recta DE ad rectam EF.

Demonstratio. Quia est per apparatum vt HF ad FG, sic LM ad MN; erit per prop. 18. lib. 5. elem. componendo, vt HG ad GF, sic LN ad NM, & per coroll. prop. 4. lib. eiusdem, inuertendo erit vt GF ad HG, sic NM ad LN; vt autem per prop. 55. & 56. lib. eiusdem, GH ad GE, sic NL ad NX; ergo per prop. 22. lib. cit. ex æqualitate erit vt FG ad GE, sic NM ad NX: igitur iuxta coroll. 2. prop. 17. lib. cit. 5. erit diuidendo, vt FG ad FE, sic NM ad MX. Et cùm in triangulis NLK, XLK, duo latera NL, LK, sint respectiuè æqualia duobus lateribus XL, LK, comprehendantque angulos rectos æquales in L; erunt per 4. prop. lib. 1. elem. bases eorum KN, KX, æquales: quare per prop. 5. lib. 1. eiusdem cit. anguli in X, & N, erunt æquales tùm etiam in P & O. Sed & per prop. 15. lib. eiusdem 1. anguli NKX, PKO, sunt æquales; ergo in triangulis NKX, PKO, isoscelibus, quorum tres anguli proprij sunt æquales duobus rectis, per prop. 32. lib. 1. elem. si auferantur dicti anguli ad verticem K, relinquentur alij duo anguli simul ad basim vnam æquales alijs duobus angulis simul ad basim alteram; quorum semisses, verbi gratiâ anguli in N & O, vel in X & P, erunt æquales inter se, per 7. ax. lib. 1. elem. quare cùm dicti anguli in N & O, vel in X & P, sint alterni, erunt per prop. 27. lib. eiusdem 1. elem. parallelæ rectæ lineæ NX, PO. Quia verò probauimus in apparatu rectam AB esse parallelam ipsi NX, erit per prop. 30. lib. cit. 1. elem. recta PO parallela ipsi AB. Sed & per prop. 29. lib. eiusdem, anguli KMN, KRO, sunt æquales; & per prop. 15. lib. cit. anguli MKN, OKR, sunt æquales: ergo cùm sint ostensi anguli in N & O æquales, erunt triangula MKN, RKO, æquiangula. Ex eisdem etiatis principijs demonstrabuntur æquiangula triangula KMX, KRP: igitur per 4. prop. lib. 6. elem. & 16. prop. lib. 5. elem. erit vt KM ad KR, ita MN ad RO; tùm etiam vt KM ad KR, sic MX ad PR; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. vt MN ad RO, sic MX ad PR; igitur vicissim erit per prop. 16. lib. cit. 5. vt MN ad MX, sic RO ad PR: ostendimus autem esse MN ad MX, vt GF ad FE, hoc est vt DE ad EF; et si sumamus pro communi altitudine rectam OR, erit per prop. 1. lib. 6. elem. vt OR ad RP, sic quadratum super recta OR ad rectangulum sub OR, RP: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt DE ad EF, ita quadratum super recta OR ad rectangulum sub OR, RP. Verùm per prop. 35. lib. 3. elem. rectangulum sub OR, RP, æquale est rectangulo sub AR, RC; ergo per prop. 7. lib. 5. elem. & 11. lib. eiusdem, erit vt DE ad EF, sic quadratum super recta OR ad rectangulum sub AR, RC. fecimus igitur & probauimus propositum.

LEMMA XXIV.

In quocumque triangulo, puta ABC, si vni laterum eius AC, ducta sit recta FG linea parallela, secans aliud latus AB in F, & basim BC in G; & ad ipsam FG, in puncto eius extremo F, ducta sit recta FH perpendicularis, quæ FH ad rectam FA, iuxta lemma 6. habeat rationem quam obtinet quadratum rectæ BC ad rectangulum sub AC, AB, lateribus trianguli; tùm ex quolibet punctorum intermediorum rectæ FG, verbi gratiâ L, transmissa fuerit recta linea MLN, parallela basi BC, secansque in M & N, latera AB, AC. Dico rectam HF, ad rectam FA, habere rationem compositam ex ratione ML ad LF, & ex ratione NL ad FA. Est nostrum.

Demonstratio. Quandoquidem ex datis recta HF ad rectam FA, habet rationem quadrati rectæ BC ad rectangulum sub AC, AB; & per prop. 23. lib. 6. elem. quadratum rectæ BC ad rectangulum sub AC, AB, habet rationem compositam lateris BC ad latus AC, & lateris BC ad latus AB; per lemma 7. recta HF ad rectam FA, obtinebit rationem compositam rectæ BC ad rectam AC, & rectæ BC ad rectam AB. Quoniam verò recta FG data est parallela ipsi AC in triangulo BAC; & recta MLN etiam parallela ipsi BC, in eodem triangulo BAC; & recta ML est parallela lateri BG, in triangulo BFG; erunt per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. similia ista triangula BAC, BFG, MFL: quare per def. 1. lib. eiusdem 6. & prop. 11. lib. 5. elem. sic licebit argumentari, vt BC ad CA, sic BG ad GF, & sic ML ad LF; tùm etiam vt CB ad BA, sic MN ad MA, & sic LM ad MF. Et quia etiam in triangulo NMA, data est parallela LF, ipsi AN, erit per 2. prop. lib. 6. elem. vt LN ad LM, sic AF ad FM; ideoque vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. erit vt NL ad FA, sic LM ad FM: ostendimus autem esse LM ad MF, vt CB ad BA; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit NL ad FA, vt CB ad BA. Igitur cùm demonstrauerimus esse NL ad FA, vt CB ad BA; & esse ML ad LF, vt BC ad CA; & rationem HF ad FA, componi ex rationibus BC ad CA, & CB ad BA: etiam per lemma

ma 7. eadem ratio HF ad FA, componetur ex rationibus ML ad LF, & NL ad FA. quod erat demonstrandum.

LEMMA XXV.

Iisdem positis, ac demonstratis, quæ in superiore lemmate 24. Dico rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, esse vt recta HF ad rectam FA. Est nostrum.

Demonstratio. Per prop. 23. lib. 6. elem. rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, habebit rationem compositam ex ratione ML ad LF, & ex ratione LN ad FA; sed hanc rationem compositam habet recta HF ad rectam FA. per lem. 24. præcedens: igitur per lemma 7. rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, erit vt recta HF ad rectam FA. quod erat concludendum.

LEMMA XXVI.

Iisdem positis, ac demonstratis, quæ in lemmatibus 24. & 25. Dico rectangulum sub HF, FL, esse ad rectangulum sub LF, FA, sicut est recta HF ad rectam FA. Est nostrum.

Demonstratio. Assumamus pro basibus datorum rectangulorum rectas HF, FA, & pro altitudine communi illorum rectam FL: erit per 1. prop. lib. 6. elem. rectangulum sub HF, FL, ad rectangulum sub LF, FA, sicut recta HF, ad rectam FA. quomodo fuit propositum.

LEMMA XXVII.

Iisdem positis, ac demonstratis, quæ in lemmatibus 24. 25. 26. Dico esse rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, sicut est rectangulum sub HF, FL, ad rectangulum sub LF, FA. Est nostrum.

Demonstratio. Cùm enim sit per lemma 25. rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, sicut recta HF ad rectam FA; & per lemma 26. sit rectangulum sub HF, FL, ad rectangulum sub LF, FA, sicut recta HF ad rectam FA: erit per prop. 11. lib. 5. elem. rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, sicut est rectangulum sub HF, FL, ad rectangulum sub LF, FA: quod erat ostendendum.

LEMMA XXVIII.

Iisdem positis, ac demonstratis, quæ in præcedente lemmate 27. Dico rectangulum sub ML, LN, esse æquale rectangulo sub HF, FL. Est nostrum.

Demonstratio. Per lemma 27. est rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub FL, FA, sicut est rectangulum sub HF, FL, ad rectangulum sub LF, FA: ergo per 9. prop. lib. 5. elem. erit rectangulum sub ML, LN, æquale rectangulo sub HF, FL. quomodo fuit propositum.

LEMMA XXIX.

In quocumque triangulo, puta ABC, si ex quolibet puncto G, ex intermedijs baseos eius BC, recta linea GFH emittatur, secans latus vnum non productum AB in F, & aliud CA productum vltra A verticem oppositum basi BC, in puncto H; & ex puncto N quouis ex intermedijs rectæ FG, agatur recta linea RNS parallela ipsi basi BC, secansque in R & S, latera AB, AC, dicti trianguli; & ex puncto A transmittatur alia recta linea AK parallela ipsi HFG, secans basim BC in K; & ex puncto F extremo rectæ FG, ad ipsam ponatur recta linea FL perpendicularis; ad quam rectam FL, recta FH quæ est extra triangulum, habeat rationem iuxta lemma 6. quam obtinet quadratum rectæ AK ad rectangulum sub BK, KC. Dico quod recta HF, habeat ad rectam FL, rationem compositam ex ratione HN ad NS, & ex ratione FN ad NR. Est nostrum.

Demonstratio. Ex datis recta HF ad rectam FL, habet rationem quadrati rectæ AK ad rectangulum sub BK, KC; & per prop. 23. lib. 6. elem. quadratum rectæ AK ad rectangulum sub BK, KC, habet rationem compositam ex ratione rectæ AK ad rectam BK, & ex ratione rectæ AK ad rectam KC: ergo per lemma 7. ratio rectæ HF ad rectam FL, componetur ex ratione rectæ AK ad rectam BK, & ex ratione rectæ AK ad rectam KC. Quia verò in triangulo HGC, recta AK datur parallela ipsi lateri HG; erunt per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. triangula HGC, AKC, similia: ex eisdem principijs, quia in triangulo GHC, est recta NS parallela lateri GC, erunt triangula GHC, NHS, similia: ex eisdem etiam principijs, quia in triangulo BAK, est recta FG parallela lateri AK, erunt triangula BAK, BFG, similia: Denique ob eandem rationem, quia in triangulo BFG, est recta RN parallela lateri BG, erunt triangula BFG, RFN, similia. Itaque in prædictis triangulis similibus licebit per def. 1. lib. 6. & per prop. 11. lib. 5. elem. argumentari, vt AK ad KC, sic HG ad GC, & sic HN ad NS; tùm vt AK ad KB, sic FG ad GB, & sic FN ad NR: igitur cùm sit AK ad KC, vt HN ad NS; sitque vt AK ad KB, sit FN ad NR; & ostenderimus rationem rectæ HF ad rectam FL, componi ex ratione AK ad KC, & ex ratione AK ad KB; componetur etiam per lemma 7. ratio rectæ HF ad rectam FL, ex rationibus HN ad NS, & FN ad

ad NR. ſicuti fuit propoſitum.

LEMMA XXX.

Iiſdem poſitis, ac demonſtratis, quæ in præcedente lemmate 29. Dico rectangulum ſub HN, NF, eſſe ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut eſt recta HF ad rectam FL. Eſt noſtrum.

Demonſtratio. Per prop. 23. lib. 6. elem. rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, habet rationem compoſitam ex ratione HN ad SN, & ex ratione NF ad NR; hæ duæ rationes componunt per lemma præcedens 29. rationem rectæ HF ad FL rectam: ergo per lem. 7. rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, eſt ſicut recta HF ad rectam FL. quod erat oſtendendum.

LEMMA XXXI.

Iiſdem poſitis, quæ in lemmate 29. Si ex puncto N, ponatur ad eaſdem partes recta FL, recta NX parallela ipſi LF; & ex puncto H agatur recta linea per L, LH producenda vltra L. Dico quod ſecabit in X, rectam NX; & quod recta NX, erit maior quàm recta LF; & quod ſit HN ad NX, ſicut eſt recta HF ad FL. Eſt noſtrum.

Demonſtratio. Imprimis quia duæ rectæ FL, NX, ſunt parallelæ poſitæ ad eaſdem partes; recta HLX ſecabit in X rectam NX, per 11. prop. Procli. Præterea cùm in triangulo HNX, recta LF ſit parallela baſi NX; erunt per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. duo triangula HNX, HFL, ſimilia: quare per def. 1. lib. 6. elem. erit vt HN ad NX, ſic HF ad FL; eſt autem prima HN maior quàm tertia HF, per ax. 8. lib. 1. elem. ergo per prop. 14. lib. 5. elem. ſecunda NX maior erit quàm quarta FL. & ſic demonſtrauerimus propoſita.

LEMMA XXXII.

Iiſdem poſitis, ac demonſtratis, quæ in lemmatibus 29. 30. 31. Dico rectangulum ſub HN, NF, eſſe ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut eſt recta NH ad rectam NX. Eſt noſtrum.

Demonſtratio. Per lemma 31. Eſt HN ad NX, vt recta HF ad rectam FL; & per lemma 30. eſt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut eſt HF ad FL: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut eſt recta HN ad rectam NX. quod erat concludendum.

LEMMA XXXIII.

Iiſdem poſitis, ac demonſtratis, quæ in lemmatibus 29. 30. 31. Dico eſſe rectangulum ſub NH, NF, ad rectangulum ſub XN, NF, ſicut eſt recta HN ad rectam NX. Eſt noſtrum.

Demonſtratio. ſumptis rectis XN, HN, pro baſibus datorum rectangulorum, & recta FN pro altitudine communi; erit per prop. 1. lib. 6. elem. rectangulum ſub XN, NF, ad rectangulum ſub HN, NF; ſicut eſt recta HN ad rectam NX. quomodo fuit propoſitum.

LEMMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, ac demonſtratis, quæ in lemmatibus 29. 30. 31. 32. 33. Dico quod erit rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut eſt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub XN, NF. Eſt noſtrum.

Demonſtratio. Per lemma 32. eſt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut recta HN ad rectam NX; & per lemma 33. eſt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub XN, NF, ſicut recta HN, ad rectam NX: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut eſt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub XN, NF. quomodo propoſuimus.

LEMMA XXXV.

Iiſdem poſitis, ac demonſtratis, quæ in lemmate præcedente 34. Dico quod rectangulum ſub SN, NR, ſit æquale rectangulo ſub XN, NF. Eſt noſtrum.

Demonſtratio. Eſt per lemma 34. rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, ſicut eſt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub XN, NF: ergo per prop. 9. lib. 5. elem. erit rectangulum ſub SN, NR, æquale rectangulo ſub XN, NF. quod erat concludendum.

LEMMA XXXVI.

Iiſdem poſitis, ac demonſtratis, quæ in lemmate 29. & 31. Si iuxta lemma noſtrum 1. ad lib. 2 elem. perficiatur rectangulum XTHN, ſub rectis HN, XN, & ducatur recta linea per L punctum extremum rectæ FL, parallela ipſi XT, vel HN; abſcindet ex rectis HT, NX, æqualibus per prop. 34. lib. 1. elem. rectas HI, NO, æquales: Et producto latere FL vltra L quouſque ſecet in P, latus XT, reſultabit rectangulum PLOX, ſimile rectangulo IHFL, ſub recta FL & recta FH, applicato ad rectam FL; & rectangulum NFPX erit applicatum ad rectam FL, excedens figura PLOX, ſimili figuræ IHFL. Eſt noſtrum.

Demonſtratio. Imprimis quia poſita eſt in lemmate 29. recta LF perpendicularis rectæ HFG; & in lemmate 31 poſita eſt recta NX paral-

parallela ipsi LF; erunt per prop. 29. lib. 1. ele. anguli HFL, HNK, recti singuli: quare per lemma 15. parallelogrammum THNX erit rectangulum, & parallelogrammum PLOX etiam rectangulum. Sed & quia in lemmate 31. ostendimus rectam LF minorem esse quàm recta NX; recta ILO ducta parallela ipsi XT, vel HN, parallelis inuicem, efficiet cum parallelis FLP, HIT, parallelogrammum IHFL, cuius latus FL cùm sit minus latere FLP æquali lateri NX probato maiori. idque iuxta prop. 34. lib. 1. elem. ob parallelogrammum PFNX; etiam latus HI æquale ipsi FL per cit. prop. 34. erit minus latere HT per 1. ax. lib. 1. elem. Ex eisdem principijs probabitur latus NO æquale lateri FL, esse minus latere NX. Quare cùm angulus HNX sit ostensus rectus, erit per cit. lemma 15. parallelogrammum MFPX, rectangulum: & similiter parallelogrammum PLOX, rectangulum erit, ob angulos in P vel X rectos. Quia verò rectanguli THNX, diameter est HLX, circa quam sunt rectangula IHFL, PLOX; ipsa erunt per prop. 24. lib. 6. elem. similia, primum sub HF, LF, alterum sub FN, LP. Denique iuxta def. 6. lib. 6. elem. rectangulum sub FN, NX, erit applicatum rectæ FL, excedensque figura PLOX simili figuræ IHFL, sub recta HF, LF. Atque ita demonstratum erit propositum in hoc lemmate.

LEMMA XXXVII.

In triangulo quocumque, puta BAC: si recta EDG secuerit ambo latera AB, AC, illud in E, hoc in D, & basim BC productam vltra C, in puncto G; & ex angulo A ducta fuerit recta AK parallela ipsi EDG, secansque in K basim BC productam; & ex quocumque puncto ex intermedijs recta ED, puta M, acta fuerit recta linea PMR parallela basi BC, secansque latera AB, AC, in P & R; tùm ad punctum E, recta ED, posita fuerit recta EH perpendicularis ipsi ED; ad quam rectam EH, recta ED habeat rationem quadrati rectæ AK ad rectangulum sub BK, KC, iuxta lemma 6. Dico rationem DE ad EH, esse compositam ex ratione EM ad MP, & ex ratione DM, ad MR. Est nostrum.

DEmonstratio. Datur DE ad EH, sicut quadratum rectæ AK ad rectangulum sub AK, KC; & per prop. 23. lib. 6. elem. illud quadratum AK, ad rectangulum sub BK, KC, obtinet rationem compositam ex ratione lateris AK ad latus KB, & ex ratione lateris AK ad latus KC: ergo per lemma 7. recta DE ad rectam EH, habebit rationem compositam ex ratione AK ad KB, & ex ratione AK ad KC. Verùm cùm in triangulo ABK sit recta EG parallela lateri AK; erit per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. triangulum EBG simile triangulo ABK: cùmque etiam in eodem triangulo EBG, sit recta PM parallela lateri BG; erit per cit. coroll. prop. 4. lib. 6. elem. triangulum EPM simile triangulo EBG: quare per prop. 21. lib. cit. 6. elem. triangula EPM, ABK, similia ostensa eidem triangulo EBG, erunt inter se similia: ideoque per 1. def. lib. eiusdem 6. erit vt AK ad KB, sic EM ad MP. Præterea cùm in triangulo ACK sit recta DG parallela lateri AK, erit per coroll. cit. prop. 4. lib. 6. elem. triangulum DCG simile triangulo ACK: cùmque recta MR sit parallela ipsi CB, erunt anguli MRD, GCD, æquales per prop. 29. lib. 1. elem. tum etiam anguli RMD, CGD; sunt verò per prop. 15. lib. eiusdem 1. elem. anguli RDM, CDG, æquales, ergo triangula RDM, CDG, erunt æquiangula: ideoque per 4. prop. lib. 6. elem. latera obtinebunt proportionalia circum æquales angulos; & proinde erunt similia dicta triangula RDM, CDG, per def. 1. lib. cit. 6. Igitur cùm duo triangula RDM, CDG sint similia; & priùs ostenderimus triangulum ACK esse simile triangulo CDG; erunt per prop. 21. lib. 6. elem. triangula RDM, ACK, similia: ergo iuxta def. 1. cit. lib. 6. elem. erit vt AK ad KC, sic DM ad MR. Quandoquidem igitur probauimus vt AK ad KB, & AK ad KC, sic esse respectiuè EM ad MP, & DM ad MR; quemadmodum ex duabus primis assignatis ratio DE ad EH componebatur; sic etiam ex his duabus postremis ratio DE ad EH, componetur per lemma 7. quod erat propositum, ac demonstrandum.

LEMMA XXXVIII.

Eisdem positis, ac demonstratis, quæ in lemmate præcedente 37. Dico rectangulum sub EM, MD, esse ad rectangulum sub PM, MR, sicut est recta DE ad rectam EH. Est nostrum.

DEmonstratio. Per prop. 23. lib. 6. elem. rectangulum sub EM, MD. ad rectangulum sub PM, MR, habet rationem compositam ex ratione EM ad MP, & ex ratione DM ad MR; & per lemma 37. superius, ratio DE ad EH, componitur ex ratione EM ad MP, & ex ratione DM ad MR: ergo per lemma 7. erit rectangulum sub EM ad MD, ad rectangulum sub PM, MR, sicut recta DE ad rectam EH, sicuti fuit propositum.

LEMMA XXXIX.

Eisdem positis, ac demonstratis, quæ in lemmatibus 37. & 38. Si recta HD transmittatur, & ponatur ex puncto M recta linea MX parallela ipsi EH. Dico quod rectangulum sub EM, MD, sit ad rectangulum sub PM, MR, & DM ad MX. Est nostrum.

DEmonstratio. In triangulo DEH, quia est recta MX parallela ipsi EH, erit per coroll.

roll. prop. 4. lib. 6. elem. triangulum DMX simile triangulo DEH: ergo per def. 1. lib. eiusdem, erit vt DE ad EH, sic DM ad MX; est autem per præcedens lemma 38. rectangulum sub EM, MD, ad rectangulum sub PM, MR, sicut DE ad EH: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub EM, MD, ad rectangulum sub PM, MR, sicut DM, ad MX. quod erat ostendendum.

LEMMA XL.

Eisdem positis, ac demonstratis, quæ in lemmatibus 37. & 39. Dico quod rectangulum sub DM, ME, sit ad rectangulum sub XM, ME, vt DM ad MX. Est nostrum.

DEmonstratio. Assumamus rectas DM, MX, pro basibus dictorum rectangulorum, & pro communi altitudine illorum, rectam ME: erit per prop. 1. lib. 6. elem. rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub XM, ME, sicut DM ad MX. quod erat concludendum.

LEMMA XLI.

Eisdem positis, ac demonstratis, quæ in lemmatibus 37. 39. 40. Dico quod rectangulum sub DM, ME, sit ad rectangulum sub PM, MR, sicut rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub XM, ME. Est nostrum.

DEmonstratio. Per lemma 39. est rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub PM, MR, sicut DM ad MX; estque per lemma 40. rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub XM, ME, sicut DM ad MX: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub PM, MR, sicut rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub XM, ME. Sicuti fuit propositum, & erat demonstrandum.

LEMMA XLII.

Eisdem positis, ac demonstratis, quæ in lemmate 41. Dico quod rectangulum sub PM, MR, sit æquale rectangulo sub XM, ME. Est nostrum.

DEmonstratio. Per lemma 41. superius, idem rectangulum sub DM, ME, habet eandem rationem ad duo rectangula, vnum sub PM, MR, alterum sub OM, ME: ergo per prop. 9. lib. 5. rectangulum sub PM, MR, & rectangulum sub XM, ME, erunt æqualia. quomodo proposuimus.

LEMMA XLIII.

In omni triangulo, exempli gratia ABC, si ducatur recta linea DE parallela cuicumque lateri illius, puta AB, secansque alia duo latera BC, AC, illud in D, hoc in E: semper erit ipsa DE minor, quàm latus ipsum AB cui est parallela. Est nostrum.

DEmonstratio. Quia datur recta DE in triangulo ABC parallela lateri AB, secansque alia in D & E; erit per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. triangulum DCE simile triangulo BCA: quare per def. 1. lib. cit. erit vt CB ad BA, sic CD ad DE; prima autem CB maior est quàm tertia CD, ergo secunda BA maior est quàm quarta DE, per prop. 14. lib. 5. elem. ideoque minor DE quàm AB. sicuti proposuimus.

LEMMA XLIV.

In quocumque triangulo, puta BCA, si ducta fuerit recta DE parallela vni laterum eius verbi gratiâ BC, secansque reliqua latera, AB quidem in D, AC verò in E; ductaque fuerit recta ex E versus BC parallela lateri ADB: secabit hæc recta vltima parallela lateri ADB, latus BC in F puncto ex eius intermedijs; & si perficiatur parallelogrammum ABCG sub AB & BC: erit applicatum ad rectam BC, parallelogrammum DEFB deficiens figura parallelogramma simili parallelogrammo sub AB, BC. Est nostrum.

DEmonstratio. Quandoquidem rectæ DE, BC, dantur parallelæ, tùm etiam parallelæ rectæ DB, FE; resultabit parallelogrammum DEFB: quare recta EF parallela ipsi DB, non poterit secare BC in C puncto; alioqui resultaret parallelogrammum DECB, cuius duo latera opposita DE, BC, debent esse æqualia per prop. 34. lib. 1. elem. hoc vero consequens, est contra lemma præcedens 43. videlicet quod in triangulo ABC, recta DE parallela lateri BC, sit æqualis ipsi BC; igitur recta EF non secabit in C, rectam BC: sed neque secabit rectam BC productam vltra C, in K; nam simili discursu facto, resultaret parallelogrammum DEKB, eiusque latera opposita DE, BCK æqualia forent; porrò probauimus BC maius esse quàm DE, ergo multo magis erit BCK maius quàm DE. Sed neque dici poterit quod eadem recta EF, secet rectam CB productam vltra B in puncto L, vel alio, ad quod perueniret vel infringendo AB parallelam ipsi, contra naturam parallelarum; vel infringendo aliquod aliud latus puta AG, parallelogrammi AGCB, in puncto O, sicuti repræsentatur in recta EONML: verùm cùm hæc recta includat spatium finitum simul cum rectis EC, LBC diuersis, poterit recta BA produci vltra illud spatium finitum; & sic recta BA parallela ipsi EML, occurreret ipsi in N, contra naturam parallelarum. Hæc pugnantia cùm deducantur ex positione quod recta per E posita parallela lateri ADB, secet rectam BC in alio puncto

C

cto diuerso ab intermedijs, falsa erit; ideoque secabit rectam BC in F aliquo puncto ex eius intermedijs, sicuti fuit primò propositum. Consimili discursu probabimus rectam DE parallelam ipsi BC, productam vltra E, secare in I puncto ex intermedijs latus CG; tùm rectam FE productam vltra E, secare latus AG in aliquo puncto H, ex eius intermedijs. Porrò resultabunt diuersa parallelogrammata, DF, FI, DH, EG, componentia adæquatè totale AGCB habens pro diametro rectam AC, circa quam erunt parallelogrammata DH, FI: ergo per prop. 24. lib. 6. elem. parallelogrammum FI simile erit parallelogrammo totali AGCB, sub rectis AB, BC. Quare parallelogrammum DEFB, erit iuxta def. 5. lib. 6. elem. applicatum ad rectam BC, deficiens parallelogrammo FI simili parallelogrammo AGCB sub AB, BC. quomodo fuit à nobis secundo loco propositum.

LEMMA XLV.

In quocumque triangulo rectilineo, puta BCA, si ducta fuerit recta linea DE parallela vni laterum eius, verbi gratiâ BC, secansque in D & E, reliqua eius latera, AB quidem in D, AC verò in E; ductaque fuerit recta per E versus BC, parallela lateri ADB. secabit ipsum latus BC in F puncto ex eius intermedijs; & si perficiatur parallelogrammum ABCG, sub AB, BC, & producatur recta DE vltra E, vsque ad I punctum ex intermedijs lateris GC: erit parallelogrammum DICB, applicatum ad rectam DE, excedens figura EICF parallelogramma similique parallelogrammo DEHA, quod continetur sub DE, AD. Est nostrum.

Demonstratio. Imprimis consulendo figuram lemmatis superioris 44. demonstrabitur eodem artificio quo in cit. lem. quod recta EF per E ducta parallela ipsi ADB, secet in F, rectam BC in vno puncto ex eius intermedijs; vnde resultabit parallelogrammum DEFB, cuius latus DE erit æquale lateri BF, per prop. 34. lib. 1. elem. quare cùm BF sit minus quàm BC, erit per 1. ax. lib. 1. elem. latus DE minus quàm BC. Producendo igitur DE vltra E, attinget in I latus GC, parallelogrammi ABCG: cumque etiam AG latus sit æquale lateri BC, per cit. prop. 34. lib. 1. elem. & latus BF minus quàm BC, etiam latus BF vel DE quæ æqualia sunt per cit. prop. 34. minus erit quàm AG per 1. cit. ax. lib. 1. elem. igitur si producatur latus FE, vltra E, secabit latus AG in H puncto ex ipsius intermedijs, cùm sint parallela latera ADB, EF. Et quia recta AC est diameter parallelogrammi BG totalis resoluti in parallelogramma diuersa quatuor, AHED, FEIC, DEFB, HGIE, quorum duo prima sunt circa eius dictam diametrum AC; erunt per prop. 24. lib. 6. elem. duo prædicta circa diametrum AC parallelogramma AHED, FEIC, similia inter se. Sed per def. 6. lib. 6. elem. parallelogrammum DICB est applicatum ad rectam DE, excedens parallelogrammum DEFB, figura parallelogramma EICF, simili parallelogrammo DEHA, contento sub DE, AD. quomodo fuit propositum & erat demonstrandum.

LEMMA XLVI.

Ex multis punctis diuersis rectæ lineæ datæ, tùm etiam ab eius extremis; si educantur ad easdem partes parallelæ rectæ lineæ & æquales: rectæ lineæ coniungentes extrema istarum quæ sunt extra datam rectam, component vnam rectam lineam; resultabitque parallelogrammum totale vnum, & multa illud adæquatè componentia parallelogramma. Est nostrum.

Suppositio. Ab extremis A & C, datæ AC rectæ lineæ, tùm etiam ab alijs eius punctis intermedijs infinitis, exempli gratiâ I, B, diuersis, sint ad easdem partes verbi gratiâ dexteras, eductæ rectæ lineæ æquales & parallelæ, AD, IG, BE, CF. Dico primò rectas omnes lineas DG, GE, EF; vel DF, DG, GE, EF, vnam componere rectam lineam DF: tùm resultare diuersa parallelogramma ID, BG, CE, adæquatè componentia vnum totale CD parallelogrammum.

Demonstratio. Dantur AD, BE, æquales & parallelæ; ergo per prop. 33. lib. 1. elem. eas nectent rectæ AB, DE, æquales & parallelæ; resultabit verò parallelogrammum BD. Iam quæro an recta DE incidat per G punctum extremum rectæ IG æqualis cuilibet datarum AD, BE, ex datis; vel eam secet productam vltra G in puncto H, vel non productam in H puncto ex eius intermedijs: si primum, duæ rectæ DG, GE, erunt in directum, quod volumus: si secundum, vel tertium, nihilominus erit resultans BH parallelogrammum ex IH, BE parallelis datis, tùm alijs parallelis AB, DE ostensis, quarum postremarum sunt BI, EH, partes etiam parallelæ; quare in parallelogrammo BH, erunt per prop. 34. lib. 1. ele. duo latera opposita IH, BE, æqualia; dantur autem BE, IG, æquales rectæ; ergo per 1. axioma lib. 1. cit. elem. recta IH erit æqualis rectæ IG, totum parti, contra 8. ax. lib. eiusdem. absurdum hoc indicat secundam ac tertiam positionum aduersarij esse falsam; vnde relinquitur prima vera & prætensa in hoc lemmate. Hoc artificio ac discursu facto demonstrabimus rectam lineam DF nectentem extrema duo D & F, extremarum duarum AD, CF, æqualium & parallelarum incedere per omnia extrema, E, G, reliquarum datarum parallelarum & æqualium. Et sic probauetimus intentum.

Sed age, abundantioris demonstrationis gratiâ ostendamus rectas duas, verbi gratiâ DG,

DG, EG, componere vnam rectam lineam. Per cit. prop. 33. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ AI, DG erunt æquales & parallelæ; vnde resultabit parallelogrammum ID: similiter duæ rectæ IB, GE, erunt æquales & parallelæ, & parallelogrammum BG. Sunt porrò per prop. 34. lib. 1. cit. elem. anguli IGD, & A, æquales; tum etiam anguli IGE & B, æquales in dictis parallelogrammis ID, BG; & per prop. 29. lib. eiusdem, anguli A, & ABE, sunt æquales duobus rectis; ergo per ax. 1. lib. eiusdem duo anguli IGD, IGE, erunt æquales duobus rectis; igitur per prop. 14. lib. eiusdem 1. elem. duæ rectæ lineæ DG, EG, vnicam rectam component lineam DGE, seu in directum erunt. quod erat demonstrandum.

LEMMA XLVII.

In semicirculo qualibet recta linea demissa perpendicularis ad eius diametrum, ab quolibet puncto ex intermedijs datæ semicircumferentiæ, ipsam diametrum secabit in aliquo puncto ex intermedijs; eritque media proportionalis inter ipsius diametri segmenta; eiusque quadratum erit æquale rectangulo sub dictis segmentis. Quod si ex aliquo puncto ex intermedijs diametri semicirculi dati recta linea excitetur ad angulos rectos ipsi diametro, secansque producta semicircumferentiam, duo postrema designata deducentur. Est nostrum.

SVppositio pro prima parte. Ex puncto C ex intermedijs semicircumferentiæ ACB circuli, demissa sit recta linea CD perpendicularis ad diametrum AB subtensam ipsi datæ semicircumferentiæ ACB. Dico quod hæc perpendicularis CD, secet diametrum AB in puncto D ex intermedijs, non autem in extremorum altero, puta A; vel in E productam ipsam diametrum.

Apparatus, in casu quo velit aduersarius rectam CD, secare in A, vel E, dictam diametrum AB; ducantur rectæ CE, CA, CB.

Demonstratio. In triangulo ACB, erit angulus ACB rectus per prop. 31. lib. 3. elem. sed etiam per aduersarium cùm CA sit perpendicularis diametro AB in eius A extremo, erit angulus CAB rectus: igitur in triangulo ACB, erunt duo anguli recti, contra prop. 17. lib. 1. elem. hoc absurdum indicat rectam demissam ex puncto C ad diametrum AB, cadere non posse in eius extremum A. Esto verò si fieri possit cadat in E punctum productæ diametri BA vltra A: tunc erit angulus CEB rectus, tùm etiam ECB angulus maior recto ACB ostenso, quia continet illum; ergo etiam in triangulo ECB, duo anguli erunt maiores duobus rectis, contra cit. prop. 17. lib. 1. elem. hoc absurdum indicat rectam demissam ex C puncto ad diametrum AB perpendiculariter, nulla ratione incidere in ipsam productam: relinquitur ergo vt in ipsam incidendo, eam secet in puncto D aliquo ex eius intermedijs, quomodo fuit propositum.

Apparatus pro demonstratione quod sit recta CD media proportionalis inter AD, DB; & quod eius quadratum sit æquale rectangulo sub AD, DB. ducantur duæ rectæ CA, CB; resultabitque triangulum rectangulum ACB, habens angulum rectum ACB, per prop. 31. lib. 3. elem. ex quo demissa erit recta CD perpendicularis ad latus AB subtensum illi angulo recto.

Demonstratio. Per coroll. 1. prop. 8. lib. 6. elem. recta CD erit media proportionalis inter AD, DB segmenta diametri seu lateris AB in triangulo ACB rectangulo. Et per prop. 17. lib. cit. 6. quadratum rectæ CD mediæ proportionalis inter extremas AD, DB, erit æquale rectangulo sub ipsis extremis AD, DB. Atque ita patet prima pars.

Apparatus & demonstratio pro secunda parte. Ductis AC, CB, rectis, resultabit triangulum rectangulum ACB, ex cuius angulo C recto in semicirculo ACB, demissa est recta CD perpendicularis ad diametrum seu latus AB: igitur vti priùs concludemus intentum.

LEMMA XLVIII.

Datis tribus rectis proportionalibus hoc ordine, AD, DC, DB: si duæ extremæ AD, DB, in directum constituantur ADB; & media DC ponatur perpendicularis ipsi ADB composita ex prima & vltima, ita vt commune sit punctum D extremum vnum illarum trium. Dico quod si puncto medio E totius rectæ ADB, circulus fiat, vt centro, interuallo autem EA, vel EB, circumferentia eius incedet per C extremum alterum mediæ CD proportionalis. Est nostrum.

DEmonstratio. Esto si fieri possit, circumferentia circuli facti secet productam rectam DC in F, vel non productam in G: Ductis autem rectis lineis FA, FB, vel GA, GB; erit triangulum rectangulum AFB, vel AGB, ob angulum rectum in F, vel G, iuxta prop. 31. lib. 3 elem. sed & ex angulo recto F vel G, demissa est recta linea FD vel GD perpendicularis ad latus AB oppositum: ergo per coroll. 1. prop. 8. lib. 6. elem. recta linea FD, vel GD, erit media proportionalis inter segmenta AD, DB, lateris AB: Sed ille angulus rectus AFB, AGB, est in semicirculo, eiusque punctum F vel G, in circumferentia circuli; ergo per præcedens lemma quadratum rectæ FD, vel rectæ GD, erit æquale rectangulo sub AD, DB; cui rectangulo est etiam æquale quadratum rectæ CD datæ mediæ proportionalis inter AD, DB, idque iuxta prop. 17. lib. 6. elem. Igitur per 1. ax. lib. 1. elem. quadratum rectæ FD vel rectæ GD, erit æquale quadrato rectæ CD; ideoque per prop. 56. Procli

ipsæ rectæ ID, vel GD, æquales rectæ GD, totum & pars, contra 8. ax. lib. 1. cit. Absurdum hoc consequens ad positionem contradicentem assertioni huius lemmatis, indicat ipsam positionem esse falsam, & assertionem veram.

LEMMA XLIX.

Rectangula sub longitudinibus æqualibus, & latitudinibus æqualibus: sunt æqualia. Sub longitudine eadem, vel longitudinibus æqualibus, latitudinibus verò inæqualibus; inæqualia: maiusque illud quod sub latitudine maiore, & minus quod sub latitudine minore. Sub longitudinibus inæqualibus, latitudine verò eadem, vel latitudinibus æqualibus; inæqualia: maiusque illud quod sub longitudine maiore, & minus quod sub longitudine minore. Quod si vnum sit sub longitudine maiore, & latitudine etiam maiore; quàm aliud quod est sub longitudine minore, & etiam sub latitudine minore: illud erit maius, hoc minus. Denique sub longitudinibus & latitudinibus inæqualibus, comparando longitudinem cum longitudine; & latitudinem cum latitudine: possunt esse æqualia; vel inæqualia. Est nostrum.

Apparatus. Cùm per def. 4. lib. 6. elem. altitudo rectangulorum sit penes vnum ex eius lateribus perpendiculare alteri eiusdem lateri, ita vt efficiant hęc duo latera rectum angulum; quodlibet ex illis lateribus sumi poterit pro basi vel longitudine, & aliud pro latitudine vel altitudine: tunc enim in hoc casu latitudo vel longitudo altitudinem designare potest.

Demonstratio primæ partis. Quia dantur rectangulorum longitudines seu bases æquales, & latitudines seu altitudines æquales; ipsa erunt per prop. 1. lib. 6. elem. æqualia.

Demonstratio secundæ partis. Si sumamus latitudines datas inæquales pro basibus; & longitudinem eandem vel longitudines æquales datas, pro altitudine: ipsa rectangula erunt inæqualia per cit. 1. prop. lib. 6. elem. ob bases inæquales; maiusque erit quod maiorem latitudinem veluti basim; & minus quod latitudinem minorem pro basi obtinet.

Demonstratio tertiæ partis. Quod si latitudines datæ æquales sumantur pro altitudine; longitudines verò datæ inæquales pro basibus; erunt ipsorum bases inæquales, & eadem vel eædem altitudines: igitur per cit. prop. 1. lib. 6. elem. ipsa rectangula erunt inæqualia; maiusque quod habuerit basim seu longitudinem maiorem; minus verò quod minorem longitudinem seu basim.

Demonstratio quartæ partis, præmisso hoc apparatu. De rectangulo AC, longitudine maiore AB, detrahatur per prop. 3. lib. 1. elem. recta AE æqualis longitudini AE minori, rectanguli alterius AF: tùm de latitudine maiore AD auferatur recta AG æqualis latitudini minori AG: denique perficiatur rectangulum AF, sub AE, AG, per lem. 1. ad lib. 2. elem. Iam verò accedamus ad demonstrationem. Rectangulum AF datum, sub AE, AG, erit æquale rectangulo AF facto sub AE, AG, comprehensæque in altero rectangulo dato AC, idque per Primam partem huius lemmatis, factum autem rectangulum AF, est minus quàm rectangulum AC, per 8. ax. lib. 1. elem. igitur rectangulum AC sub longitudine AB maiore, & latitudine AD maiore, erit maius quàm rectangulum datum AF, sub longitudine AE minore, & latitudine minore AG.

Demonstratio vltimæ partis. Vel rectangula data ita se habent vt longitudo vnius sit inæqualis longitudini alterius, & etiam latitudini eiusdem alterius; tùm etiam latitudo eiusdem primi sit inæqualis latitudini alterius. Vel vnius longitudo AB sit quidem inæqualis longitudini AD, alterius rectanguli; verùm sit æqualis altitudini eius AB; & latitudo AD, primi, sit etiam inæqualis latitudini AB secundi, sed æqualis longitudini AD secundi. Posito primo casu, erit quarta pars superior: quare ipsa rectangula erunt inæqualia. Posito secundo casu, & sumendo AB latitudinem secundi pro longitudine eius; & longitudinem AD ipsiusmet secundi, pro latitudine eius: tunc quia horum rectangulorum longitudines AB, AB, & latitudines AD, AD, sunt æquales; erunt ipsa rectangula data æqualia per primam partem. Quinetiam datis quatuor rectis inæqualibus inter se, & proportionalibus; ita vt sit prima ad secundam, sicut tertia ad quartam: manifestum est per prop. 16. lib. 6. elem. rectangulum sub prima & quarta, esse æquale rectangulo sub secunda & tertia: sed eorum longitudines sunt inæquales, tùm etiam eorum altitudines seu latitudines; ergo æqualitas reperietur inter rectangula sub diuersis longitudinibus, & sub diuersis latitudinibus. Atque ita ex datis, poterunt esse æqualia, vel inæqualia.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Parallelogramma similia sub dictis in lemmate longitudinibus & latitudinibus eodem modo se habebunt vt rectangula sub eisdem dictis longitudinibus & latitudinibus.

Hoc constat ex dictis in hoc lemmate & lemmate 12.

LEMMA L.

In triangulo rectilineo quocumque, si vna recta linea, vel multæ rectæ parallelæ ductæ fuerint vni eius lateri, secans vel secantes reliqua latera: resoluetur triangulum in duo vel plura triangula æquiangula, & similia, ipsi etiam toti; & eorum latera homo-

homologa erunt comparabilia secundum comparationes omnes, corollarij etiam prop. 4. & proportionum 16. 17. 18. 19 & 22. lib. 5. elem. Similiter si duo triangula habuerint verticem communem, & latera alterna in directum concurrentia in illo vertice, basesque parallelas; ipsa erunt æquiangula & similia: & si ducta fuerit vna recta linea parallela vni lateri illorum, secansque reliqua eius latera; vel etiam multa huiusmodi recta linea; resoluetur vti diximus hoc triangulum in alia triangula similia & æquiangula inter se & toti, tùm etiam reliquo: & si etiam in alio dicto triangulo alia vel alia recta linea huiusmodi parallela ducantur cuilibet lateri secantes reliqua, idem eueniet; eruntque triangula inter se similia, & totis, & ijs in qua resolutum erat aliud; & simili modo comparabilia erant eorum latera vti in prima parte. Denique eadem etiam accident, si dentur duo diuersa triangula æquiangula separata.

SVppositio pro prima parte demonstranda. In triangulo ABC, sit recta linea DE parallela lateri BC, secansque in D & E, reliqua latera dati trianguli; vel etiam ducta sit alia recta FG parallela eidem lateri BC: resultabunt triangula diuersa DAE, FAG: quæ dico esse æquiangula, & similia inter se & toti, & comparabilia secundum citatas propositiones lib. 5. element.

Demonstratio primæ partis. Per prop. 29. lib. 1. elem. anguli AFG, ADE, sunt æquales angulo B; tùm etiam anguli AGF, AED, æquales angulo C; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. duo primi anguli assignati in F, & D, erunt æquales inter se; tùm etiam duo anguli postremi in G & E: tria verò triangula BAC totale, & FAG, & DAE, communem habent angulum A: ergo demonstrata erunt æquiangula: sunt autem per coroll. prop. 4. lib. 6. ele. similia toti BAC, duo alia; ergo per prop. 21. lib. eiusdem erunt etiam inter se similia. Denique ex def. 1. lib. eiusdem, habebunt latera circa æquales angulos proportionalia: ergo inuertendo poterunt sumi illorum laterum comparationes iuxta coroll. prop. 4. lib. 5. elem. tùm permutando per prop. 16. tùm componendo iuxta prop. 18. tùm diuidendo per prop. 17. denique ex æquo per prop. 22. lib. cit. 5. elem. tum per conuersionem rationis iuxta prop. 19. lib. eiusdem 5. Atque ita patet prima pars lemmatis.

Suppositio pro secunda parte. Ad verticem A sint duo triangula BAC, DAE; habeantque in directum alterna latera CA, DA; tùm alia latera BA, EA; basesque habeant parallelas BC, DE; tùm in quolibet illorum sint ductæ rectæ lineæ FG, HI, vel etiam in alio recta KL & sic de alijs, parallelæ vni basium DE, BC, secantesque alia duo latera trianguli in quo sunt; vel etiam ducta sit recta MN parallela vni laterum puta AB, secans alia duo latera in vno triangulorum. Dico omnia illa triangula partialia esse æquiangula & similia totis, & inter se, & habere latera comparabilia vti proposuimus.

Demonstratio secundæ partis. Quia dantur parallelæ bases BC, DE, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. in D & C, æquales; tùm etiam æquales anguli in E & B; sed & per prop. 15. lib. eiusdem anguli in A contrapositi ad verticem sunt æquales: igitur triangula totalia duo BAC, DAE, erunt æquiangula; ergo per prop. 4. lib. 6. elem. latera habebunt proportionalia circa angulos æquales; igitur per def. 1. lib. eiusdem 6. erunt similia. Sed & per primam partem triangula FAG, HAI, sunt similia inter se, & toti DAE, ergo etiam similia alteri toti BAC, per prop. 21. lib. 6. elem. Similiter per ipsam primam partem triangula KAL, NMC, erunt similia toti BAC; ergo etiam per cit. prop. 21. erunt similia alteri toti DAE, & ipsis similibus prædictis inclusis intra se, & inter se. Denique triangula MNC, MOL, sunt etiam similia per cit. primam partem; fuit autem triangulum NMC ostensum simile toti BAC, & reliquis prædictis; ergo per cit. prop. 21. omnia triangula designata erunt similia inter se; & per primam partem obtinebunt comparabilia latera vti proposuimus.

Demonstratio vltimæ partis manifesta est per propositionem quartam lib. 6. elem. hoc est ~~habebunt~~ quælibet duo triangula separata æquiangula, erunt similia & habebunt latera comparabilia modo proposito: cùm enim habeant latera proportionalia circum æquales angulos, erunt similia per 1. def. lib. ipsius 6. elem. Præterea per citatas propositiones lib. 5. elem. ipsa latera proportionalia illorum referentur ad inuicem. Atque ita demonstratum erit lemma hoc 50.

LEMMA LI.

In triangulo BAD rectangulo. Diuiso latere AB circa rectum A angulum, bifariàm in E; & vtcumque in C, X, F, G, supra & infra E: ductisque rectis parallelis CH, XI, EK, FL, GM. ex dictis punctis, alteri lateri AD circum A rectum angulum, secantibus rectam DB, in punctis H, I, K, L, M. Erit omnium rectangulorum sub partibus dicti lateris AB diuisi, & sub dictis proprijs parallelis, maximum sub AE semisse lateris AB, & sub recta EK parallela lateri AD. Maius verò sub partibus dicti lateris AB maioribus vsque ad E, & suis proprijs parallelis; quàm aliud sub partibus minoribus & suis proprijs parallelis; hoc est rectangulum sub AX, XI, maius erit quàm rectangulum sub AC, CH. Maius etiam rectangulum sub partibus viciniori-bus ipsi E, ab A vltra E, & suis proprijs parallelis, quàm rectangulum sub remotioribus & suis proprijs parallelis; hoc est rectangulum sub AF, FL, maius eris quàm rectangulum sub AG, GM. Quod si puncta extrema partium lateris AB, fuerint æque remota ab puncto E medio, vel vnum ab A,

& aliud ab B extremis lateris AB; erunt rectangula sub illis partibus & proprys parallelis æqualia: hoc est rectangulum sub AC, CH, erit æquale rectangulo sub AG, GM. Est nostrum.

Apparatus. Perficiatur per 1. lem. ad lib. 2. elem. ADFB, sub AB, AD, & producantur vsque ad latus DF, rectæ parallelæ datæ CH, XI, EK, FL, GM, ipsas secabit recta DF necessariò per prop. 11. Procli, & quidem CH in g, XI in h, EK in i, FL in k, GM in l. Prætetea ex punctis H, I, K, L, M, rectæ DB diagonalis rectanguli ADFB facti, per prop. 31. lib. 1. elem. transmittantur rectæ lineæ parallelæ lateri AD, vel DF, secabunt obuias rectas datas parallelas & productas, tùm latera AD, BF, per cit. prop. 11. Procli, in punctis adiunctos characteres habentibus in figuratione marginali proposita; & per lem. 2. ad lib. 2. elem. resultabunt rectangula intermedia, quorum aliqua erunt complementa aliorum, iuxta prop. 43. lib. 1. elem. æqualia inter se; & horum rectangulorum parallelogrammorum oppofita latera erunt æqualia inter se per prop. 34. lib. 1. elem. Sed & quoniam recta EK est parallela lateri AD ex datis, in triangulo ABD, erit per præcedens lemma 50. vt BE ad EK, sic BA ad AD; & vicissim vt BE ad BA, sic EK ad AD; ex datis autem BE est semissis totius AB, ergo EK erit semissis totius AD; ergo per 7. prop. lib. 5. elem. recta AP æqualis ipsi EK per prop. 34. lib. 1. elem. erit etiam semissis rectæ AD; quæ recta AD ideò diuisa erit bifariàm in P, & ei æqualis BF diuisa etiam bifariàm in r; nam sunt æquales AD, BF, etiamque æquales AP, B r, per cit. prop. 34. lib. 1. elem. Igitur per prop. 36. lib. 1. elem. rectangula omnia erunt æqualia, constituta supra has æquales bases CT, Tg, Xa, ah, EK, Ki, FZ, Zk, Gγ, γl, B r, r f. & inter easdem parallelas è datis ipsi AD, quæ erunt per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inter se; sicuti etiam erunt aliæ ductæ parallelæ ipsi AB vel DF, parallelæ inter se, per eandem citatam propos. His positis & explicatis descendamus ad demonstrationem propositi.

Demonstratio primæ assertionis, quod rectangulum EP sub AE, EK, sit maximum rectangulorum propositorum. Primò quidem maius quàm rectangulum CN sub AC, CH: Ab triangulis DiK, DPK, æqualibus per prop. 34. lib. 1. elem. demantur triangula DgH, DNH etiam æqualia per cit. prop. remanebunt per 3. ax. lib. 1. elem. trapezia æqualia gHKi, NHKP: ab hoc postremo dematur triangulum HTK, & ab primo trapezio nihil, erit trapezium primum gHKi maius quàm residuum TN rectangulum; his duobus inæqualibus, addantur æqualia rectangula gP, CP, per prop 36. lib. 1. elem. fient per 4. ax. lib. 1. elem. simul sumpta trapezium gHKi, & rectangulum gP, maiora quàm totum rectangulum CN compositum ex rectangulis TN, CP: maiori autem tantummodo addatur triangulum HTK, & minori nihil; fiet per 4. ax. lib. 1. elem. totum rectangulum iP, seu EP ipsi æquale per prop. 36. lib. 1. elem. maius quàm rectangulum CN: est autem rectangulum EP sub AE, EK; & rectangulum CN, sub AC, CH; ergo rectangulum sub AE, EK maius erit quàm rectangulum sub AC, CH. Tùm etiam ostendam quod rectangulum sub AE, EK sit maius quàm rectangulum sub AX, XI: Per prop. 43. lib. 1. elem. rectangulum iI æquale est rectangulo IP; si addatur rectangulo iI rectangulum Ka, & rectangulo IP nihil, fiet rectangulum ia, maius quàm rectangulum IP; his inæqualibus ia, IP, addantur æqualia hP, a A, per prop. 36. lib. 1. elem. fient per 4. ax. lib. 1. elem. inæqualia, maiusque erit rectangulum iP, quàm rectangulum IA; sed per prop. 36. lib. 1. elem. rectangulo iP est æquale rectangulum EP, ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum EP erit maius quàm rectangulum IA: est autem rectangulum EP sub AE, EK; & rectangulum IA, sub AX, XI; ergo rectangulum sub AE; EK, maius erit rectangulo sub AX, XI. Ostendamus etiam idem rectangulum sub AE, EK, maius esse quàm rectangulum sub AF, FL: Per prop. 43. lib. 1. elem. rectangulum Zi æquale est rectangulo dP; & per prop. 36. eiusdem lib. rectangulum FK æquale est rectangulo Zi, ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangula FK, dP, erunt æqualia; est autem per 8. ax. eiusdem lib. rectangulum FK maius quàm rectangulum Fd, ergo etiam per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum dP erit maius quàm rectangulum Fd: igitur si his duobus inæqualibus addatur commune rectangulum dA, fiet per 4. ax. lib. 1. elem. EP sub AE, EK, maius quàm rectangulum FQ sub AF, FL. Denique probemus idem rectangulum sub AE, EK, maius esse rectangulo sub AG, GM: Per prop. 36. lib. 1. elem. rectangula IK, GK, sunt æqualia, & per 8. ax. eiusdem lib. rectangulum GK maius est rectangulo Ge, ergo per 1. ax. lib. eit. rectangulum IK, maius erit rectangulo Ge; sed per prop. 43. lib. cit. rectangula IK, KR, sunt æqualia, ergo etiam per cit. 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum KR maius erit rectangulo Ge: His postremis inæqualibus adiungatur commune rectangulum dA, fiet per 4. ax. lib. 1. elem. rectangulum EP sub AE, EK, maius quàm rectangulum GR sub AG, GM. Eodem artificio & ex eisdem principijs demonstrabitur rectangulum sub AE, EK, maius esse quàm reliqua quarumque possibilia rectangula sub possibilibus partibus lateris AB, & suis proprijs parallelis: ideoque erit maximum omnium, sicuti fuit in prima assertione propositum.

Demonstratio secundæ assertionis quod rectangulum sub AX, XI, maius sit quàm rectangulum sub AC, CH. Ab his rectangulis

si dematur commune rectangulum CO, remanebit rectangulum HO, & rectangulum IC, hoc ex parte rectanguli sub AX, XI, illud ex parte rectanguli sub AC, CH: sed per prop. 43 lib. 1. elem. rectangulum sub h H est æquale rectangulo HO; & per 8. ax. lib. eiusdem, rectangulum h T maius est rectangulo h H, ergo per 1. ax. lib. 1. cit. rectangulum h T maius erit rectangulo HO: sed per prop. 36. lib. eiusdem rectangulum a C æquale est rectangulo h T, ergo per 1. ax. lib. cit. rectangulum a C maius erit rectangulo HO; est autem per 8. ax. lib. cit. rectangulum IC maius rectangulo a C, ergo per 1. ax. lib. eiusdem, rectangulum IC multò maius erit rectangulo HO: his ergo duobus postremis inæqualibus rectangulis si restituatur commune rectangulum CO, fiet per 4. ax. lib. eiusdem, rectangulum sub AX XI, maius rectangulo sub AC, CH. Et sic ex eisdem principijs demonstrabitur rectangulum sub maioribus portionibus lateris AB, vsque ad E, semper esse maius rectangulis sub minoribus portionibus eiusdem lateris AB vsque ad E; sumendo pro alijs lateribus rectangulorum proprias rectas parallelas. Igitur demonstrata erit secunda assertio lemmatis propositi.

Demonstratio tertiæ assertionis, quod rectangula sub partibus lateris AB, ab A vltra, E minoribus seu vicinioribus ipsi E, & suis proprijs parallelis, sit maior rectangulis sub partibus lateris AB, ab A vltra E, maioribus seu remotioribus ab E, & suis proprijs parallelis. Exempli gratiâ quod rectangulum sub AF, FL, sit maius rectangulo sub AG, GM. Per axiom. 8. lib. 1. elem. GM est minor quàm G γ, & G γ est æqualis ipsi l γ per apparatum, ergo per 1. ax. lib. 1. elem. l γ erit maior quàm GM; Sed & l δ est maior quàm l γ, ergo per 1. ax. lib. 1. elem. l δ maior erit quàm GM: rectangula igitur lL, MF, cùm habeant altitudinem æquales FG, kl, se habebunt per 1. prop. lib 6. elem. vt bases l δ, GM; est autem l δ ostensa maior quàm GM; ergo rectangulum lL maius erit rectangulo MF; est autem per prop. 43. lib. 1. elem. rectangulo lL æquale rectangulum LR; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum LR, maius erit rectangulo MF: his duobus postremis inæqualibus commune addatur rectangulum MA, fiet per 4. ax. lib. 1. elem. rectangulum LA sub AF, FL, maius rectangulo MA sub AG, GM: & sic de omnibus alijs huiusmodi rectangulis, quare probata erit hæc tertia lemmatis assertio.

Demonstratio quartæ seu vltimæ assertionis, positis AC, BC æqualibus partibus lateris AB, æqualiter remotis ab E puncto medio; vel posito quod C extremum partis AC, sit æquè remotum ab A, sicut G extremum partis BG mouetur ab B. probabimus rectangulum sub AC, CH, esse æquale rectangulo sub AG, GM. Æqualibus datis AC, BC, communis addatur recta CG, fient per 2. ax. lib. 1. elem. æquales rectæ AG, BC; sed per prop. 34. lib. cit. CB, g f, sunt æquales, ergo per 1. ax. lib. cit. AG, g f, erunt æquales: & quia sunt parallelæ rectæ DF, BA, erunt per prop. 29. lib. cit. anguli gDH, GBM, alterni æquales; suntque per apparatum, & ax. 12. lib. cit. anguli in D, & G æquales; ergo per 3. nost. coroll. ad prop. 32. lib. cit. 1. elem. anguli reliqui triangulorum DgH, BGM, erunt æquales; ideoque ipsa triangula æquiangula: quare per 4. prop. lib. 6. elem. erit vt BG ad GM, sic Dg æqualis ipsi AC per prop. 34. lib. 1. elem. ad gH; prima autem BG, & tertia Dg sunt æquales per 1. ax. lib. 1. elem. ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secunda GM, erit æqualis quartæ gH. Itaque cùm rectangula gp, AM, habeant æquales longitudines AG, g f, ostensas, & etiam æquales latitudines GM, gH, probatas; erunt per lemma 49. æqualia; Sed rectangulo gp, æquale est rectangulum CN, per prop. 43. lib. 1. elem. ergo per 1. ax. eiusdem libri, rectangulum gp, seu AM, erit æquale rectangulo CN; hoc est rectangulum sub AG, GM, æquale erit rectangulo sub AC, CH. & sic de omnibus alijs huiusmodi rectangulis probabitur simili methodo; & assertio postrema lemmatis demonstrata erit.

LEMMA LII.

Rectæ lineæ datæ æqualem accommodare inter duo trianguli latera siue producta, siue non producta, parallelam basi opposita angulo comprehenso ab dictis duobus lateribus. Est nostrum.

SVppositio. Data sit recta linea DE, & ei æqualis accommodanda inter duo latera AB, AC, trianguli BAC, parallelá basi BC oppositæ angulo BAC comprehenso ab dictis duobus lateribus AB, AC; siue sint producta dicta latera infra basim, siue non producta.

Apparatus. Datis tribus rectis hoc ordine, BC prima, CA secunda, & tertia DE, reperiatur per prop 12. lib. 6. elem. quarta proportionalis, cui per prop. 3. lib. 1. elem. detrahatur ex A, de recta AC producta vltra C, vel non producta, recta linea AE æqualis; & per prop. 31. lib. eiusdem 1. elem. ex puncto E agatur recta linea ED parallela basi BC; hæc recta ED secabitur ab latere AB producto vel non producto vltra B, in puncto D per prop. 1. Procli. Dico rectam ED esse æqualem datæ, & accommodatam inter duo latera AB, AC producta vel non producta comprehendentia angulum BAC oppositum basi BC, & esse parallelam ipsi BC.

Demonstratio. Imprimis ex ipso apparatu recta DE est accommodata inter duo latera AB, AC, producta vel non producta vltra basim

C 4

sim BC; estque ipsi BC parallela. Superest vt probetur æqualis datæ DE. Est per apparatum vt BC ad CA, ita data DE ad rectam EA: est autem accommodata ED parallela ipsi BC; ergo per lemma 50. erit in triangulis BAC, DAE, vt BC ad CA, sic accommodata DE ad EA; igitur erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt data DE ad EA, sic accommodata DE ad EA; ergo per prop. 9. lib. 5. elem. recta DE accommodata vti postulat lemma præsens erit æqualis datæ DE: posuimus autem illam parallelam ipsi BC in apparatu. Ergo imperatum in lemmate ad praxim reduxerimus, & rectè factam esse demonstrauerimus.

LEMMA LIII.

Si fuerit A ad B, vt C ad D; & C ad D, vt E ad F; & E ad F, vt G ad H; & sic in infinitum. Dico esse A ad B, vt G ad H; vel vt quaelibet alia ex datis rationibus: vel esse quamlibet ex datis rationibus, vt qualibet alia ex illis. Est nostrum.

Demonstratio. Cùm detur A ad B vt C ad D, & E ad F vt C ad D; erit per prop. 11. lib. 5. elem. A ad B vt E ad F: Sed datur etiam G ad H vt E ad F, & ostendimus esse A ad B vt E ad F; ergo per prop. cit. 11. erit A ad B vt G ad H. Et sic eodem discursu ostendetur esse quælibet ex datis rationibus, vt quælibet alia ex datis.

COMMENTARIVS
IN
PROPOSITIONES LIBRI PRIMI CONICORVM APOLLONII PERGÆI.

PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ, quæ à vertice superficiei conicæ, ad puncta, quæ in superficie sunt, ducuntur: in ipsa superficie erunt.



SVPPOSITIO. Recta linea ex vertice A, superficiei conicæ, ad quodlibet punctum superficiei illius ducta sit. Dico quod tota quanta est inter verticem A, & hoc punctum, recipiatur in ipsa superficie conica.

Apparatus. Punctum autem datum in ipsa superficie conica; vel erit G, inter verticem A & circulum BECF, circa cuius circumferentiam lata recta DAC, ipsam superficiem conicam efficit iuxta def. 1. vel erit B in ipsa dicti circuli circumferentia; vel erit H infra dictum circulum; vel erit I in superficie ipsa conica supra verticem A. Dico, inquam, rectas AG, AB, AH, AI, & sic de alijs omnibus huiusmodi rectis, existere in superficie ipsa conica.

Demonstratio. Si prædictæ rectæ lineæ AG, AB, AH, AI, & sic de alijs huiusmodi rectis ab vertice A ad puncta superficiei conicæ traductis, non recipiantur in ipsa conica; concipiendo rectam DAC generantem ipsam superficiem conicam, iuxta def. 1. adductam ad puncta prædicta, verbi gratiâ G, B, H, I, superficiei ipsius conicæ, ipsa puncta radet: atque ita duæ rectæ lineæ spatium concludent, contra 14. ax. lib. 1. elem. nimirum AG, vel AB, vel AH, vel AI, ductæ; & pars generantis ipsam superficiem, quatenus terminatur eisdem extremis, A communi, & B vel G, vel H, vel I. hoc absurdum condemnat antecedens vnde deducitur; videlicet negationem quod non recipiantur dictæ rectæ lineæ in superficie conica,

nica, deductæ ab eius vertice ad quælibet eiusdem superficiei puncta. Atque ita remanet demonstrata propositio.

COROLLARIVM.

Ex quibus constat, si à vertice ad aliquod punctum eorum quæ intra superficiem sunt, recta linea ducatur; intra: & si ad aliquod eorum quæ sunt extra; extra superficiem cadere.

SI enim rectæ lineæ transmissæ ab A vertice, ad quodcumque punctum intra superficiem conicam, vel extra illam, in superficie ipsa conica existerent: etiam puncta prædicta, siue intra, siue extra ipsam superficiem conicam datam in ipsamet superficie conica data existerent: nam puncta extrema terminantia quamcumque lineam receptam in quacumque superficie, in ipsa superficie existunt; atque ita puncta data extra superficiem conicam, hoc est vel intra eius concauitatem, vel extra eius conuexitatem, in ipsamet superficie situm obtinerent: quod est absurdum, videlicet contra datum. Igitur principium seu positio vnde prouenit, rationi repugnabit; nempe quod rectæ lineæ ab vertice A, superficiei conicæ, ad puncta intra vel extra ipsam data, in ipsamet superficie conica recipiantur. quare relinquitur, vt rectæ lineæ quæ ad puncta data intra superficiem eius concauam, ducuntur, intra ipsam superficiem concauam existant; & quæ ad puncta data extra ipsam seu versus conuexitatem, terminantur, ab vertice A ipsius superficiei conicæ, extra ipsam sint superficiem, conicam & extra eius concauitatem, at verò versus conuexitatem.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si à vertice coni ad aliquod punctum superficiei eius recta linea ducatur, & producatur versus basim circularem eius, vltra hoc punctum in infinitum: incidet in vnum punctum circumferentiæ dictæ circularis baseos.

NAm ducta recta ab vertice coni, qui etiam est vertex conicæ superficiei, per def. 1. ad punctum datum in superficie eius conica, quatenus terminatur his duobus punctis, recipietur in superficie ipsa conica, per prop. præsentem. Iam verò si hæc recta producatur in infinitum vltra duo puncta superficiei conicæ, si non incidat in aliquod punctum occurrentis intermediæ circumferentiæ circularis baseos coni, procedet vel intra superficiem vel extra superficiem ipsam conicam. Hoc posito, concipi poterit recta linea generans ipsam superficiem conicam, ab eius vertice immoto, ad punctum datum in ipsa superficie conica, adducta; quæ per ax. 21. lib. 1. elem. congruet secundum suam partem aliquam cum ducta recta; adductæ verò lineæ pars reliqua puncto aliquo suo incurret in punctum aliquod circumferentiæ circuli dirigentis eius motum iuxta def. 1. qui circulus est basis coni per def. 7. & quia producta recta data negatur incurrere in aliquod punctum circũferentiæ dicti circuli, & asseritur intra vel extra superficiem conicam excurrere; duæ rectæ lineæ, ducta productaque, & adducta generans superficiem coni, segmentum vnum commune obtinebunt, videlicet ductam rectam ab vertice coni ad punctum in eius superficie datum; hoc verò est contra 10. ax. lib. 1. elem. igitur positio contradicens assertioni huius corollarij nostri, falsa erit; & assertio vera.

PROPOSITIO II.

Si in altera superficierum quæ sunt ad verticem, duo puncta sumantur; & quæ puncta coniungit recta linea, ad verticem non pertineat: intra superficiem cadet; quæ verò est in directum ipsi, cadet extra.

SVppositio. In altera superficierum conicarum DAX, BAC, circa communem verticem A coaptatarum iuxta def. 1. assumpta sint duo puncta I, L; ita vt recta linea IL coniungens illa, ad verticem A non pertineat; hoc est producta ipsum A verticem non attingat. Dico totam rectam IL terminatam illis duobus punctis I, L, existere intra conicam superficiem datam; tùm productam vltra hæc puncta I, vel L excurrere extra ipsam superficiem; verbi gratiâ partem eius LM, cadere extra superficiem conicam.

Apparatus. Quatuor casus obtinet hæc propositio. Aut enim duo puncta data I, L, existent in superficie conica DAX supra verticem A: aut in superficie alia BAC infra verticem A, inter illum & circuli circumferentiam BECF dirigentem affectiones ipsarum superficierum duarum conicarum, iuxta def. 1. aut in eadem superficie conica inferiore, infra dictum circulum: aut in circumferentia dicti circuli, verbi gratiâ B, C, puncta duo sumpta sint.

Demonstratio primæ partis in omnibus illis casibus. Esto, si fieri possit, recta IL, non sit tota intra superficiem concauam conicam, eiusque punctum aliquod G sit in ipsa superficie conica. Tunc ex punctis datis I, & L, si transmittantur rectæ lineæ IA, LA, ad A verticem; vel ex A vertice ad puncta I, L, agantur rectæ lineæ AI, AL; existent istæ rectæ in ipsa superficie conica, per prop. 1. & per coroll.

roll. nostrum ad illam, producta si opus sit, versus circulum BECF, ipsius circumferentiæ puncta B,C, attingent: ductâque rectâ BC, resultabunt triangula rectilinea IAL, BAC, quæ in vno existent plano, per prop. 2. lib. 11. elem. & per corollar. nost. t. ad prop. 7. lib. eiusdem. Iam verò ex puncto G quod adstruitur existere in superficie conica, ad verticem A, traducatur recta GA, quæ diuidet angulum rectilineum IAL, per 30. ax. lib. 1. elem. productaque si opus sit diuidet etiam basim BC, trianguli BAC, per idem cit. ax. diuidat verò in puncto H: porrò basis hæc BC, tota existet intra circulum BECF, per 2. prop. lib. 3. elem. ideoque & H punctum ex eius intermedijs intra eundem circulum existet: Verùm tota circuli illius area est intra superficiem conicam BAC, per def. t. ergo & punctum H rectæ BC, & ipsa recta BC erit tota intra superficiem conicam, sicuti quartus exigebat casus, datis punctis B,C, in circumferentia circuli dirigentis effectionem superficiei conicæ. Sed & existente H puncto intra circuli prædicti aream, recta GAH, vel AGH, vel AHG deducta ab A vertice ad conicæ superficiei punctum G, incidet in H punctum intra aream dicti circuli situ: Verùm per coroll. nost. da prop. 1. ipsa recta AG producta versus dictum circulum, debet incidere in aliquod circumferentiæ illius punctum: ergo eadem recta linea è sublimi puncto A deducta ad subiectum circuli BECF planum, incidet in duo eius diuersa puncta, contra lemma 1. ad hunc librum. Absurdum hoc indicat positionem aduersarij contradicentem huic propositioni esse falsam, & propositionem ipsam esse veram quo ad eius primam partem. Quod verò probauimus de puncto G, rectæ IL, vel puncto H rectæ BC, idem ostendemus de omnibus alijs punctis illarum. atque ita probata remanebit prima pars huius propositionis.

Demonstratio secundæ partis. Producendo rectam IL, vel BC, quæ tota cadere intra superficiem conicam ostensa est, vltra I, vel L, aut B vel C; ex natura productionis, debet extra superficiem quam attingit suis extremis, egredi extra illam. atque ita relinquitur manifesta secunda pars.

COROLL. NOSTRVM I.

Data recta linea in superficie conica, minimè terminata in eius vertice, & circumferentia circuli dirigentis generationem eius; producta vtrimque in infinitum, attinget ipsum verticem, & ipsam circumferentiam.

PRima pars ostenditur. Si enim recta data, producta in infinitum versus verticem, ipsum non attingat, quandoquidem datæ rectæ extrema duo puncta in superficie conica existunt; ipsa recta data in superficie conica, per primam partem huius propositionis secundæ, erit intra concauum ipsius superficiei conicæ, & non in eius superficie: hæc duo pugnant inuicem; ergo positio vnde profluunt erit falsa, videlicet quod recta data in superficie conica, & minimè terminata in eius vertice, si producatur in infinitum versus verticem, ipsum non attingat: igitur per verticem incedet sicuti vult ista pars.

Secunda pars probatur. Si recta data, producta in infinitum versus circuli circumferentiam dirigentis productionem superficiei datæ conicæ iuxta def. 1. per huius circumferentiæ punctum aliquod non incedat: recta linea superficiem conicam datam efficiens, adducta ab vertice ad hanc datam rectam, parte aliqua sua propria per ax. 21. lib. t. elem. adæquabitur isti rectæ datæ & productæ versus verticem quem attingere ostendimus; nam hæc recta efficiens superficiem conicam, successiuè incedit per omnia puncta superficiei conicæ effectæ: sed hæc eadem recta per def. t. attingit successiuè totam circuli circumferentiam & eius puncta, dirigentem superficiei datæ conicæ productionem; ergo & data recta si producatur versus hunc circulum, attinget in aliquo puncto dictam circumferentiam; alioqui duæ rectæ lineæ, ducta productaque, & adducta efficiensque conicam superficiem, segmentum commune obtinebunt, videlicet ab vertice ad punctum extremum datæ versus circulum; contra 10. ax. lib. t. elem. quod absurdum est: igitur positio contradicens huic secundæ parti, falsa erit, & ipsa pars secunda erit vera: quæ breuiùs ostendetur per coroll. nost. ad prop. t. nam per primam partem data recta producta versus verticem, ipsum attingit; ergo ab illo vertice egrediens supra ipsam superficiem datam conicam, producta versus circulum prædictum, incidet in aliquod eius circumferentiæ punctum.

COROLL. II. NOSTRVM.

Recta existens linea in superficie conica, producta vtrimque si opus sit, versus verticem, & versus circumferentiam circuli dirigentis eius generationem, vel etiam vltra, si superficies ipsa conica vltra circuli prædicti circumferentiam procedat: tota existet in ipsa superficie conica.

NAm ex demonstratione præcedentis corollarij, recta linea data adæquatur parti rectæ lineæ efficientis ipsam superficiem conicam, procedentis ab vertice illius & procurrentis vltra circuli directiui circumferentiam si opus sit, & existentis in superficie ipsa conica: ergo data si producatur vtrimque prout opus fuerit, tota adæquabitur isti rectæ efficienti superficiem conicam, ne duæ rectæ lineæ commune sibi vendicent segmentum, contra 10. ax.

10. ax. lib. 1. elem. quare ipsa tota recipietur in superficie conica, data & producta, vti prædicta alia efficiens ipsam superficiem conicam.

PROPOSITIO III.

Si conus plano per verticem secetur: sectio triangulum erit.

SVppositio. Conus B A C secetur plano FG, per verticem A, ita vt etiam basis BDCE, dicti coni secetur eodem dicto plano. Nam dum planum aliquod secat corpus, penetrat intra ipsum, & si concipiatur hoc planum secans infinitum, egredietur partibus suis reliquis extra ipsum corpus, atque infringet vndequaque terminos ipsius corporis secti: cùmque tota area baseos circularis coni sit intra superficiem conicam, & circulus seu basis sit vnus è terminis coni secti; necessariò planum FG secans conum, si concipiatur productum vndequaque in infinitum, egrediendo extra conum, secabit etiam planum baseos eius circularis, & ipsam superficiem conicam. Dico autem sectionem huiusmodi communem plano FG secanti, & secto cono BAC, esse triangulum rectilineum BAC.

Demonstratio. Quandoquidem planum FG secans conum BAC per verticem eius A, secat etiam basim eius circularem BDCE planam; erit per prop. 3. lib. 11. elem. recta linea BC. sectio communis planorum secantis FG, & secti circuli prædicti. Iam verò in plano secante FG, quia vertex A, coni secti, existit, tùm etiam puncta B & C, circumferentiæ circuli prædicti sectæ ab eodem plano; poterimus in illo ducere rectas lineas AB, AC, quæ existent etiam in superficie conica coni secti, per prop. 1. Triangulum igitur rectilineum effectum ab tribus rectis lineis AB, AC, BC, erit in plano secante FG, per coroll. nost. 2. ad prop. 7. lib. 1. elem. quia tres dictæ rectæ lineæ coniungunt tria A, B, C, puncta existentia in dicto plano. Tres verò eædem rectæ lineæ sustentantur etiam ex dictis in superficie coni, duæ quidem AB, AC, in superficie eius conica, tertia verò BC, in baseeius circulari: igitur dictum triangulum BAC, erit commune dato cono secto, & plano secanti FG; ergo ex natura sectionis, ipsum triangulum BAC, erit sectio communis coni BAC secti, & plani illum secantis per verticem eius A. quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM I.

Planum secans conum per verticem eius, secat eius basim circularem in recta linea; & quidem diametrali, si planum secans incedat per axem coni secti.

NAm axis coni incedit ab vertice illius per centrum baseos eius circularis, iuxta def. 3. quare recta linea quæ est sectio communis plani secantis applicati ad axem coni, & baseos circularis, incedet per centrum ipsius circuli secti; & quia etiam hæc recta terminatur vtrimque in circumferentia dicti circuli quam secat etiam planum; erit diameter ipsius circularis baseos, per def. 17. lib. 1. elem. Quod si planum secans conum per verticem eius, non sit applicatum axi coni; non desinet propterea planum secans penetrare ipsum conum interius, & productum vndequaque incurrere cum basi circulari, eamque secare in alia recta linea non diametrali.

COROLL. NOSTRVM II.

Si in vna superficierum conicarum effectarum iuxta def. 1. sumatur vnum punctum A & in altera aliud punctum B, neutrumque sit vertex C, & ambo ad easdem partes axeos CL, dictarum superficierum conicarum, vel verticis C. Recta linea AB ducta & terminata his punctis AB, erit extra datas superficies conicas: producta tamen vltra hæc puncta procedet intra concauitatem ipsarum in D & E.

COncipiatur planum applicatum rectæ AB, & vertici C, secansque datas superficies; has secabit per verticem C: igitur pro sectione communi resultabunt per hanc propositionem duo triangula rectilinea HCI, FCG, verticem communem C habentia, remanebitque recta AB ad easdem partes axeos CL, vel ad easdem partes verticis C, per quem incedit axis ipse: quare recta AB siue producta siue non producta non attinget verticem C. Iam verò esto, si fieri possit, recta AB terminata his punctis A, B, existat in superficierum datarum conicarum altera; tunc per coroll. nost. 1. ad prop. 2. producta vertici occurret, contra concessa: igitur cùm non occurrat vertici C, seu non sit in directum illius, neque sit in vlla superficierum conicarum, triangulum efficiet ACB, cum portionibus AC, BC, laterum prædictorum triangulorum HCI, FCG: quare cùm existat in eodem plano secante, cum dictis lateribus triangulorum, producta vtrimque ad D & E, vltra B & A, procedet supra dictum planum secans, iuxta coroll. nost. 2. ad prop. 7. lib. 1. elem. sed & per ax. 11. lib. 1. elem. intersecabit dicta latera, & in partes contrarias procedet: ergo producta vltra B procedet intra triangulum FCG; & producta vltra A, procedet intra triangulum HCI: cùmque triangulorum prædictorum areæ totæ sint intra concauitates datarum superficierum conicarum; recta linea AB producta vltra A & B, procedet intra concauitatem ipsarum, sicuti propositum fuit.

PROPO-

PROPOSITIO IV.

Si alterutra ſuperficierum quæ ſunt ad verticem, plano ſecetur, æquidiſtante circulo, per quem fertur recta linea ſuperficiem deſcribens: planum quod ſuperficie concluditur, circulus erit, centrum in axe habens: figura verò contenta circulo, & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ interſecans planum & verticem interijcitur, Conus erit.

SVppoſitio. Alterutra ſuperficierum BAC, DAE, circa verticem A, definitarum def. 1. ſecetur plano æquidiſtante planæ ſuperficiei circularis puta BKCL, circa cuius circumferentiam fertur recta linea ſuperficiem datam conicam deſcribens ſectam. Imprimis per lem. 2. ex natura ſectionis ſuperficiei beneficio plani, ſectio communis reſultabit aliqua linea, quæ tam in ſuperficie ſecta, quàm in ſecante plano exiſtet 1, ſitque in ſuperficie data conica BAC ſecta, ſectio huiuſmodi communis linea DHE, quæ per lemma 3. erit curua, & per coroll. 4. citati lem. 3. concludet ſpatium, ſeu figuram D H E. Hanc verò figuram DHE ſeu ſectionem communem plani ſecantis & ſectæ conicæ ſuperficiei, ſecundum conditiones datas, aſſero primò eſſe circulum, centrum obtinentem G in axe AF deducto ab vertice A, ad F centrum circuli BKCL dirigentis generationem datæ ſuperficiei conicæ ſectæ. Secundò affirmo figuram ſolidam comprehenſam circulo DHE, & parte ſuperficiei conicæ ſectæ, quæ eſt inter planum ſecans ſeu circulum DHE, & verticem A conicæ ipſius ſuperficiei, eſſe conum.

Apparatus. Quandoquidem axis AF conicæ ſuperficiei, incedit per def. 6. ab eius vertice A ad centrum F circuli BKCL, productus axis AF ſi opus ſit, transfiget planum DHE, in vno ſolùm puncto, puta G, iuxta lem. noſtrum 1. eo quod planum prædictum DHE exiſtat totum intra aream dictæ ſuperficiei conicæ, & ipſe axis AF incedat intra dictam aream, deductus ab A vertice ad F punctum exiſtens intra eandem dictam aream, idque iuxta coroll. prop. 1. (Proponimus autem tres figuras, propter tres caſus: prima repræſentabit caſum primum, in quo planum ſecans ſecat ſuperficiem conicam inter circulum BKCL directiuum, & verticem A. Secunda exhibebit caſum ſecundum in quo circulus DHE exiſtit infra circulum BKCL. Tertia erit pro caſu tertio in quo planum ſecans & efficiens circulum DHE exiſtit ſupra verticem A, in ſuperiore ſuperficie conica.) Iam verò ſi applicetur planum ſecans conum BAC, & ſuperficiem datam eius conicam, per axem eius AF, & verticem A, producique intelligatur tam axis AF, quàm planum ſecans, ſecabit circulos DHE, BKC, ſectioneſque reſultabunt rectæ lineæ BFC, DGE, per prop. 3. lib. 11. elem. rectaque BFC erit diameter circuli BKC, per coroll. noſtrum, 1. ad prop. 3. eo quod tranſeat planum ſecans iſtud ſecundum, per F centrum circuli BKC; eruntque per prop. 16. lib. 11. elem. dictæ rectæ lineæ DGE, BFC, parallelæ, eo quod planum hoc ſecundum ſecet plana circulorum DHE, BKC, parallela, ex datis. Verum etiam per præced. prop. 3. hoc planum ſecundum ſecans conum per A verticem, & axem eius, efficiet ſectionem triangularem BAC, & aliam etiam triangularem DAE. Quod ſi concipiamus aliud tertium planum ſecans eundem conum ſeu ſuperficiem conicam per A verticem, & axem AF; reſultabunt etiam per cit. prop. 3. alia duo triangula LAK, IAH; & rectæ IGH, LFK, erunt parallelæ per cit. prop. 16. lib. 11. element. & triangula prædicta diuidet axis AGF, vel AFG. Conſideremus autem tria triangula in duabus primis figuris, BAF, vel DAG; CAF vel EAG; KAF vel HAG: in quibus rectæ DG, EG, HG; vel BF, CF, KF, ſunt parallelæ oſtenſæ baſibus BF, CF, KF; vel DG, EG, HG: vnde per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. reſultabunt triangula ſimilia BAF, DAG; & alia duo triangula ſimilia CAF, EAG; & alia duo ſimilia KAF, HAG: quare per lemma 50. erit vt AF ad FB, ſic AG ad GD; tùm vt AF ad AG, ſic FB ad GD; tùm vt AF ad FC, ſic AG ad GE; tùm vt AF ad AG, ſic FC ad GE; tùm etiam vt AF ad FK, ſic AG ad GH; tùm vt AF ad AG, ſic KF ad GH: ſunt verò per def. 15. lib. 1. elem. rectæ FB, FC, FK, æquales, videlicet ſemidiametri circuli BKC; ergo per 7. prop. lib. 5. elem. habebunt eandem rationem ad quamlibet ex DG, EG, HG: Cùm igitur ſit BF ad GD, vt AF ad AG; & BF ad GH, vt AF ad AG; & BF ad GE vt AF ad AG; ipſa BF ad alias tres DG, GH, GE, habebit eandem rationem, per prop. 11. lib. 5. elem. igitur per 9. prop. lib. eiuſdem 5. elem. æquales erunt tres rectæ lineæ DG, GH, GE. Quod ſi infinities ſecetur conus BAC per verticem eius A, & axem AF, & plana BKC, DHE, vti fecimus, plano tertio; reſultabunt triangula infinita huiuſmodi rectilinea, & parallelæ rectæ lineæ: ſimiliique artificio probabimus rectas omnes lineas ex puncto G ſectionis communis plani DHE, & axeos AGF, eſſe æquales inter ſe, terminatas in linea curua DHE. In tertia autem figura, quia rectæ lineæ DGE, BFC, ſunt oſtenſæ paralle-

parallelæ, erunt per lemma 50. duo triangula DAE, BAC, similia; & alia similia triangula BFA, EGA; & alia etiam similia DGA, CFA; eritque vt BF ad FA, sic EG ad GA; & vt AF ad FC, sic AG ad GD; tùm vt BF ad FC, sic EG ad GD; prima verò BF, & secunda FC, sunt semidiametri æquales circuli BKC, ergo tertia EG & quarta GD, erunt æquales per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. Præterea per idem lem. 50. cit. triangula GAH, FAK, erunt similia; & erit KF ad FA, sicut HG ad GA; ostendimus autem paulò ante esse AF ad FC, sicut AG ad GD; ergo per prop. 22. lib. 5. elem. erit ex æqualitate KF ad FC, vt GH ad GD: sunt autem ex natura circuli rectæ KF, FC, æquales; igitur per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. rectæ GH, GD, erunt æquales. Porrò probauimus rectam GE æqualem esse rectæ GD; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. tres rectæ lineæ GD, GE, GH, erunt æquales inter se. Quod si concipiamus sectam infinities superficiem conicam eandem, & plana parallela DHE, BKC, plano tertio per verticem R, & axem GAF; resultabunt vti in præcedentibus, infinita huiusmodi triangula rectilinea similia, & eodem artificio probabuntur rectæ omnes lineæ ex G puncto eodem in plano DAE, terminatæ ad lineam curuam DAE, esse æquales inter se.

Demonstratio. Cùm rectæ omnes lineæ ex puncto G intra figuram planam DHE, terminatæ in eius circumferentia curua quæ existit in superficie conica data, sint æquales inter se: ipsa figura DHE erit per def. 15. lib. 1. elem. circulus. Cumque tres rectæ lineæ GD, GE, GH, ex puncto G quod est intra circuli DHE aream, etiamque est punctum axeos FGA, egressæ terminentur in circumferentia dicti circuli, sintque æquales inter se, ipsum G punctum erit centrum dicti circuli per prop. 9. lib. 3. elem. Atque ita centrum G, huius circuli, erit in axe AF. Quia denique tota circuli DHE circumferentia existit in superficie data conica, quam superficiem effecit recta linea mota ex vertice immoto, circa circumferentiam circuli BKC, ipsa etiam recta eadem linea in suo motu radet totam circuli DHE circumferentiam: quare resultabit conus DAE comprehensus inter A verticem, & planum circulare DHE, terminatum hoc plano, & parte superficiei datæ conicæ positæ inter A verticem, & planum circulare prædictum DHE; idque iuxta def. 4. Atque ita tota propositio demonstrata erit.

COROLL. NOSTRVM I.

Si alterutra superficierum conicarum quæ sunt ad verticem communem definitarum def. 1. plano secetur æquidistante circulo directiuo effectionis illarum, planoque alio per verticem secetur, conus resultans ab dicta prima sectione, & conus datus primus sectus: resultabunt semper ex dicta sectione secunda, duo triangula æquiangula similia, quorum bases erunt rectæ lineæ in circularibus basibus dictorum conorum, latera verò in superficie conica secta; quod si planum secundum secans incesserit per axem, bases prædictæ erunt diametri circularium basium; si verò non incesserit per axem, dictæ bases erunt chordæ aliæ basium non diametrales.

PRimam partem demonstrauimus in duobus triangulis BAF, DAG æquiangulis & similibus; tùm etiam in alijs duobus triangulis CAF, EAG; tùm etiam in alijs duobus KAF, HAG, similibus.

Secunda pars etiam patet, eo quod ostendorimus bases BFC, LFK, esse diametros circuli BKCL; & alias bases DGE, IGH, esse etiam diametros circuli DHEI.

Tertia pars est manifesta, nam per prop. 3. fient semper per datam sectionem secundam, duo triangula rectilinea, quorum bases erunt chordæ dictorum circulorum parallelorum parallelæ per prop. 16. lib. 11. elem: quæ quia non incedunt per centrum dictorum circulorum, ipsæ non erunt diametrales: sed & erunt dicta triangula similia per lem. 50.

COROLL. NOSTRVM II.

Secto cono per planum parallelum basi eius circulari: resultans conus iuxta hanc propositionem, erit similis secto.

SI enim hi duo coni plano alio secentur per axem dictorum conorum acto communem, resultabunt per coroll. præcedens duo triangula similia, verbi gratiâ BAF, DAG; vnde per lemma 50. erit AF axis coni primi dati ad FB semidiametrum baseos eius circularis, sicut AG axis coni resultantis ad GD, semidiametrum baseos eius propriæ circularis. quare per def. 24. lib. 11. elem. conus datus sectus iuxta hanc prop. 4. & resultans alius conus, erunt similes.

PROPOSITIO V.

Si conus scalenus plano secetur per axem, ad rectos angulos ipsi basi; seceturque altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex verticis parte triangulum abscindat simile ei quod per axem, subcontrariè verò positum: Sectio circulus erit. vocetur autem sectio subcontraria.

D Sup-

SVppoſitio, & apparatus prima pars. Sit datus conus ſcalenus BAC, verticem A habens, baſim circularem BLC, axem NA, baſeos dictæ circularis centrum N, ex quo per prop.12. lib.11. elem. ſit educta verſus ſublime recta linea NR perpendicularis plano baſeos BLC; hæc recta NR erit diuerſa ab axe NA, quia per 9. def. cùm in ſcaleno cono axis non ſit perpendicularis baſi eius, & recta NR ſit poſita ipſi baſi orthogonia, ambæque ex eodem centro N baſeos prædictæ in ſublime aſſurgant verſus eaſdem partas, angulum rectilineum efficient, qui per prop.2. lib.11. elem. in vno erit plano, rectoque ad ipſum planum baſeos prædictæ BLC, per prop.18. lib.cit.11. elem. eò quòd applicatum ſit rectæ NR perpendiculari plano baſeos prædictæ. Iam verò ſi concipiatur planum hoc anguli RNA, vndequaque productum in infinitum, ſemper erit applicatum axi AN, & rectæ RN, ideoque per 3. prop. ſecabit datum conum ſcalenum, ſectioque communis erit triangulum BAC, quod erit etiam applicatum eidem axi AN, & rectæ RN; ideoque ad angulos rectos ipſi baſi circulari BLC, & baſis BNC dicti trianguli erit per coroll. 1. noſtrum ad illam prop.cit. diameter dictæ baſeos. Præterea ex aliquo puncto G, lateris AB, dicti trianguli BAC, fiat per prop.23. lib.1. elem. angulus AGK in plano dicti trianguli, æqualis angulo ACB, ſecetque recta GK, latus aliud AC, trianguli prædicti, iuxta 13.ax. lib.1. elem. ob duos angulos BAC, ACB, minores duobus rectis per prop.17. lib.1.elem. vnde duo alij anguli BAC, AGK, illis æquales, erunt etiam minores duobus rectis. Reſultabit triangulum AGK æquiangulum triangulo ACB, propter duos angulos AGK, ACB, æquales, & communem BAC, vnde reliqui ABC, AKG, etiam æquales erunt, per coroll. noſtrum 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. quare cùm ſint dicta triangula æquiangula, habebunt per prop.4. lib.6. elem. latera circa æquales angulos proportionalia; ideoque per def.1. lib. cit.6. erunt ſimilia dicta triangula, abſciſſumque AGK, ex alteto ACB. Sed & erunt ſub contrariè poſita, hoc eſt habebunt angulos ad baſes ſubcontrariè poſitos AGK, ACB, tùm etiam alios duos AKC, ABC. Quod ſi ex aliquo puncto puta F ex intermedijs rectæ GK exiſtentis per coroll. noſt. 2. ad prop. 7. lib.11. elem. in plano trianguli BAC, in quo etiam recipitur triangulum AGK adæquatè, erigatur per prop.12.lib.cit. 11. elem. recta linea FH perpendicularis dicto plano trianguli BAC, erit etiam eadem recta FH per def.3. lib. cit.11. perpendicularis rectæ GK. Planum ergo applicatum hiſce duabus rectis GK, FH, angulum rectum GFH, vel KFH, efficientibus, erit per prop. 18. lib.cit. 11. ad angulos rectos plano trianguli BAC, ipſumque ſecabit in recta GFK per 3. prop. lib.11. cit. atque ita triangulum prædictum AGK abſcindet de triangulo BAC per axem AN coni ſcti ſcaleni, ſimile ei quod per axem, ſubcontrariè verò poſitum. Iam verò concipiatur coni dati ſcaleni ſuperficies conica ſecta plano iſto perpendiculari ad planum trianguli BAC per axem dicti coni; reſultabit imprimis per lemma 3. pro ſectione communi in ſuperficie conica, linea curua GHK, quæ per coroll. 4. ad cit. lemma 3. claudet ſpatium ſeu figuram, quam dico eſſe circularem.

Secunda pars apparatus. Ex puncto H communi dictæ lineæ curuæ GHK, & ſuperficiei conicæ ſectæ, quod eſt in ſublimi reſpectu trianguli BAC per axem dati coni, demittatur per prop.11. lib.11. elem. recta linea HO, vel HF perpendicularis ad planum trianguli BAC; hæc recta HO incidet in O vel F punctum rectæ GK quæ eſt ſectio communis planorum, trianguli quidem BAC, & ſecantis ipſum ad angulos in recta GK, idque per prop.38.lib.11.cit. Similiter recta linea LP demiſſa ex puncto L circumferentiæ circularia baſeos BLC coni dati, ad planum trianguli BAC perpendiculariter, oſtendetur incidete in punctum P rectæ BC: eruntque per prop.6. lib.11. citati ipſæ rectæ HO, LP, parallelæ. Inſuper in plano trianguli BAC, per prop.31. lib. 1. elem. ducatur per O eius punctum, recta linea DOE parallela ipſi BC, diametroque circuli BLC, ſecans vtrimque in D & E, alia duo latera AB, AC, dicti trianguli BAC. Igitur quia duæ rectæ HO, LP, ſunt oſtenſæ parallelæ, & aliæ duæ DOE, BPC, ſunt poſitæ parallelæ, illæque cum iſtis angulos efficiunt in O, & P, exiſtuntque HO, DOE, in diuerſo plano, ab alio in quo exiſtunt aliæ duæ BPC, LP; per prop.15. lib. 11. elem. planum applicatum rectis DOE, HO, erit parallelum plano applicato rectis BPC, LP, hoc eſt baſi circulari BLC, coni dati ſcaleni: quare per prop 4. ſectio coni dati, & plani ſecantis ipſum applicati rectis DOE, HO, erit circulus DHE, cuius diameter erit recta DE, per coroll. noſt.1. ad prop. 3. in cuius puncto O, eſt ipſi per 3.def.lib.11. cit. perpendicularis, recta HO demiſſa ex puncto H communi tam circulari circumferentiæ DHE, quàm curuæ lineæ prædictæ GHK. Igitur per lem. 47. recta linea HO erit media proportionalis inter DO, OE ſegmenta diametri DOE, circuli DHE; & rectangulum ſub DO, OE, erit æquale quadrato rectæ HO. Præterea quia recta DOE poſita aſt parallela rectæ BC, erit per prop.29. lib. 1. elem. angulus ADE æqualis angulo ABC; ſed etiam angulus AKG oſtenſus eſt æqualis angulo ABC; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. AKG, ADE, æquales erunt: ſunt verò per prop.15. lib.1. elem. anguli GOD, EOK, æquales; igitur in triangulis GOD, EOK,

reliqui

reliqui anguli tertij æquales erunt per coroll. noſt. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. vnde dicta triangula erunt æquiangula; & per lemma 50. erit EO ad OK, vt GO ad OD; adeoque per prop. 16. lib. 6. elem. rectangulum EO, OD, erit æquale rectangulo ſub OK, GO; rectangulum autem ſub EO, OD, æquale fuit oſtenſum quadrato rectæ HO; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. etiam rectangulum ſub OK, GO, erit æquale quadrato rectæ HO. Hac arte demittendo perpendiculares infinitas rectas ex punctis lineæ curuæ GHK diuerſis ab extremis G, K, rectæ GK, ad rectam GK, ſicuti demiſimus rectam HO ipſi rectæ GK perpendicularem; & reliqua diſponendo ſicuti paulò ante fecimus in hac ſecunda parte apparatus: demonſtrabuntur rectangula omnia ſub ſegmentis rectæ GK, eſſe æqualia quadratis proprijs rectarum propriarum perpendicularium ab alia linea curua GHK ipſi GK, in communi puncto dictorum propriorum ſegmentorum: ſicuti oſtendimus rectangulum ſub GO, OK, eſſe æquale quadrato rectæ HO.

Demonſtratio. Quandoquidem quadrata omnium rectarum perpendicularium ab linea GHK demiſſarum ad rectam GK, ſunt probata æqualia rectangulis ſub ſegmentis rectæ GK ſitis hinc & inde ab proprijs dictis rectis lineis perpendicularibus: erit per lemma 5. linea illa GHK, oſtenſa curua, circumferentia circuli, eiuſque diameter recta GK. Hanc porrò ſectionem coni ſcaleni per planum prædictum, hoc eſt figuram planam GHK, vocat Apollonius ſectionem coni ſcaleni ſubcontrariam, ob rationem allatam in prima parte apparatus.

COROLL. NOSTRVM I.

Conum datum ſecare plano per axem eius recto ad baſim eius circularem.

SI conus rectus datus ſit: planum applicatum eius axi perpendiculari ad eius baſim iuxta def. 8. erit etiam perpendiculare ad dictam baſim, per prop. 18. lib. 11. elem. quare ſecabit conum datum rectum modo propoſito.

Si conus ſcalenus datus ſit. Seruetur methodus tradita in prima parte apparatus ad demonſtrationem huius prop. 5. & peragetur propoſitum.

COROLL. NOSTRVM II.

De triangulo dato ſcaleno, abſcindere aliud triangulum ſimile, verticem habens communem cum dato; ſed ſubcontrariè poſitum.

SEruetur methodus tradita in prima parte apparatus, in triangulo AGK reſecto de triangulo totali BAC ſcaleno: probauimus enim triangulum AGK, eſſe ſimile triangulo BAC, ſed ſubcontrariè poſitum.

COROLL. NOSTRVM III.

Planum datum ſecare ad angulos rectos plano alio.

HOc explicauimus in prima parte apparatus, dùm docuimus rectam lineam NR excitandam ex puncto N plani BLC, in ſublimi perpendicularem ipſi plano BLC, per propoſ. 12. lib. 11. elem. & applicandum planum iſti rectæ NR perpendiculari: tunc enim per prop. 18. lib. 11. elem. planum hoc applicatum erit perpendiculare plano ſubiecto BLC, ipſum ſecabit ad angulos rectos ipſi plano BLC, ſi concipiatur productum infra planum BLC.

PROPOSITIO VI.

Si conus plano ſecetur per axem; ſumatur autem aliquod punctum in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per axem, & ab ipſo ducatur recta linea æquidiſtans cuidam rectæ lineæ quæ perpendicularis eſt à circumferentia circuli ad trianguli baſim: triangulo per axem occurret, & vlterius producta vſque ad alteram ſuperficiei partem, bifariàm ab ipſo triangulo ſecabitur.

SVppoſitio, & apparatus. Conus verticem habens A, & baſim circularem BMC, ſectus ſit plano per axem eius: reſultabit per 3. propoſ. pro ſectione communi triangulum BAC rectilineum, latera duo AB, AC, habens in ſuperficie conica, & baſem BC diametralem circuli BMC, per coroll. noſtrum 1. ad cit. propoſ. 3. ſumptum autem ſit punctum D in ſuperficie dicti coni, minimè exiſtens in quouis laterum AB, AC, dicti trianguli per axem. datumque ſit M punctum, vel aſſumptum quodcumque in circumferentia circuli BMC, diuerſum tamen ab extremis B & C, dictæ diametri BC: ex quo puncto M, per prop. 12. lib. 1. elem. demiſſa ſit recta linea MNE orthogonia ipſi BC diametro. Tùm ex vertice A, per punctum D datum vel aſſumptum in ſuperficie conica prædictum, ducatur recta linea AD; hæc recta AD erit in ſuperficie conica, per 1. prop. & producta vltra D in infinitum occurret puncto K circum-

ferentiæ circuli BMC, per coroll. nost. ad cit. 1. prop. totaque recta ADK, existet in superficie dati coni, per coroll. nost. 2. ad propos. 2. Iam verò ex puncto K circumferentiæ circuli BMC, quod erit diuersum ab B & C, (nam rectæ AB, AK, AC, diuersæ sunt & diuaricantur ab inuicem eo quod angulum in A constituant,) demittatur per prop. 12. lib. 1. elem. recta linea KHL perpendicularis ad dictam BC diametrum circuli BMC, attingatque in L ex altera parte circumferentiam eiusdem circuli: erit per prop. 28. lib. 1. elem. hæc chorda KHL, parallela chordæ MNE, ob angulos rectos in H & N: Sed & ipsa recta KHL, bifariàm diuidetur in H, ab diametro BC, per prop. 3. lib. 3. elem. Insuper ex A vertice per punctum L, recta linea transmittatur AL, quæ per prop. 1. in ipsa superficie conica existet. Ad hæc etiam ex A vertice ad H punctum extendatur recta linea AH, quæ per coroll. nost 2. ad prop. 7. lib. 11. elem. existet tam in plano trianguli BAC per axem coni dati, quàm in plano alterius trianguli KAL resultantis ex ductis rectis AK, AL, KL. Denique ex puncto D assumpto in superficie conica extra triangulum BAC, in sublimi respectu illius; sed in plano trianguli KAL, hoc est in illius latere AK, ducatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea DFG parallela basi KL; hæc recta DFG secabit rectas AL, AH, illam quidem in G, hanc verò in F, sicuti eas secat recta KHL ipsi DFG parallela, idque per prop. 11. Procli. Est autem recta KHL ostensa parallela rectæ MNE, igitur per prop. 9. lib. 11. elem. recta DFG parallela ipsi KHL, erit parallela ipsi MNE: Posuerimus ergo ex puncto D assumpto in superficie coni dati prædicto, extra latera trianguli BAC per axem, rectam lineam DFG, parallelam cuidam rectæ MNE perpendiculari eductæ ab puncto M, circumferentiæ circularis baseos coni, ad diametrum BC baseos illius. Hanc verò rectam DFG, dico occurrere in puncto F, dicto triangulo BAC per axem coni dati, & productam vltra F, vsque ad aliam superficiei conicæ partem, ipsi occurrere in G puncto; bifariàmque secari in F, ab dicto plano trianguli per axem BAC.

Demonstratio. Cùm recta AH sit ostensa in plano trianguli BAC per axem existere; & ostenderimus rectam DFG occurrere seu intersecare rectam AH in puncto F: ipsa recta DFG occurret plano trianguli BAC per axem, illud transfigendo in puncto F. Cùmque recta AL sit in superficie conica data ex dictis, & recta DFG intersecet ipsam rectam AL in puncto G, iuxta demonstrata; occurret producta recta DF vltra F, versus aliam superficiei conicæ partem, in puncto eius G. Cumque in triangulo KAL, sit recta DFG parallela basi KHL, hasque rectas DFG, KHL, secet recta AFH, educta ab angulo BAC: erit per coroll. nost. ad prop. 4. lib. 6. elem. vt KH ad HL, ita DF ad FG; prima autem & secunda sunt æquales ostensæ, ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. tertia DF erit æqualis quartæ FG: secabitur igitur bifariàm in F, recta DG, ab plano trianguli BAC per axem, educta ab puncto D assumpto in superficie conica, extra latera trianguli BAC per axem, parallela cuidam rectæ lineæ assumptæ MNE demissæ perpendiculariter ab assumpto M puncto circumferentiæ circularis baseos BMC, coni dati, ad trianguli per axem basim BC, sicuti fuit propositum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Ex puncto aliquo superficiei conicæ educere rectam lineam intra ipsam superficiem conicam, parallelam datæ rectæ lineæ intra circularem basim ipsius Coni.

HOc est ex puncto D dato in superficie coni BAC, oporteat educere rectam lineam DG, intra superficiem conicam, parallelam rectæ MNE chordæ circuli BMC qui est basis coni.

Apparatus. Ex centro I, circuli, per prop. 12. vel 11. lib. 1. elem. recta ponatur linea BIC perpendicularis datæ chordæ MNE in puncto N, terminata vtrimque in B & C, in circumferentia circuli; hæc recta BC erit diameter ipsius circuli ex natura sua. Tum ex A vertice coni, transmittatur per D punctum datum in eius superficie, recta AD, quæ per prop. 1. existet in superficie conica; productaque vltra D, incidet in K punctum circumferentiæ circuli prædicti, per coroll. nost. ad cit. prop. 1. Tùm per prop. 12. lib. 1. elem. demittatur ex puncto K, recta linea KHL perpendicularis in H, ipsi BC diametro circuli, attingens in L vlteriorem semicircumferentiam dicti circuli. Præterea ab vertice A coni, per L punctum traijciatur recta linea AL, quæ per 1. prop. existet in ipsa superficie conica. Denique per prop. 31. lib. 1. elem: agatur in plano trianguli KAL, recta linea DG parallela basi KL, secans latus aliud AL, in G. Hanc rectam lineam DG dico esse ductam intra superficiem conicam ex puncto D dato in ipsa superficie conica, parallelam chordæ datæ MNE in circulari basi BMC, dati coni.

Demonstratio. Quia recta DG, terminatur duobus punctis D, G, in superficie conica, productaque ad verticem A non pertinet, alioqui duæ rectæ DGA, DA, superficiem includerent, contra 14. ax. lib. 1. elem. ipsa DG intra superficiem conicam existet per prop. 2. Et quia per apparatum duæ rectæ DG, MNE, sunt parallelæ ipsi KHL, ipsæque duæ DG, MNE existūt in diuersis planis, prima quidem in plano trianguli KAL eleuato supra circu-

lum

lum BMC, alia verò MNE in plano ipſius circuli prædicti: ipſæ DG, MNE, erunt per prop. 9. lib. 11. elem. parallelæ inuicem. Fecerimus ergo imperatum, & rectè factum eſſe demonſtrauerimus.

PROPOSITIO VII.

Si conus plano per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano ſecante planum baſis, ſecundum rectam lineam quæ ſit perpendicularis vel ad baſim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur. Lineæ quæ à ſectione in ſuperficie coni à plano facta ducuntur æquidiſtantes ei quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim, in communem ſectionem plani ſecantis & trianguli per axem cadent, & vlteriùs productæ ad alteram ſectionis partem; ab ea bifariàm ſecabuntur: Et ſi quidem rectus ſit conus, linea quæ eſt in baſi, perpendicularis erit ad communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem; ſi verò ſcalenus, non ſemper, niſi cum planum, quod per axem ducitur, ad baſim coni rectum fuerit.

SVppoſitio, & apparatus. Conus BAC ſecetur plano per axem eius, ideoque etiam per verticem eius A, qui eſt vnum extremum axeos, per def. 6. reſultabit ex hac ſectione, iuxta prop. 3. triangulum BAC per ipſum axem, rectilineumque, baſim habens BC, diametrum circularis baſeos BDC, ſecti coni, per coroll. noſt. 1. ad ipſam prop. 3. Secetur autem idem conus altero plano (quod vocabimus ſecundum, ad diſtinctionem alterius ſecantis conum per axem, quod nuncupare licet primum) non per axem coni acto, ſed applicato ſecundum rectam lineam DGE perpendicularem ipſi BC baſi dicti trianguli BAC per axem, non productæ; vel ſecundum rectam lineam MNO perpendicularem in N, dictæ baſi BC productæ verbi gratiâ vltra C. Imprimis in prima figura per lem. 3. reſultabit pro ſectione communi ſuperficiei conicæ, & plani huius ſecundi ſecantis, linea curua DFE, & per prop. 3. lib. 11. elem. reſultabit pro ſectione communi plani eiuſdem ſecundi ſecantis, & plani circularis, recta linea DGE; ſectioque ſuperficiei conicæ & circularis baſeos eius, per hoc planum ſecundum, erit iuxta lem. 4. coroll. 2. Figura plana clauſa ex vna parte linea prædicta curua DFE, & recta DGE prædicta: in ſecunda verò figura reſultabit per coroll. noſt. 3. ad prædictum lem. 4. pro ſectione communi ſuperficiei conicæ & plani huius ſecundi, figura plana terminata vnica curua linea CF, vel GF, quia planum hoc ſecans ſecundum, baſim circularem coni non ſecat, ſed attingit ſolum in puncto C vel G. In tertia verò figura, quia planum ſecundum ſecans, applicatumque rectæ prædictæ MNO, ſecat ſuperficiem conicam totam, & non eius baſim BDC circularem, niſi productam; ſectio communis huius plani ſecundi ſecantis & ſuperficiei conicæ, erit figura plana concluſa vnica linea curua GF, per cit. coroll. 3. ad lemma 4. ſed & quia hoc planum ſecundum ſecans conum, ſecat etiam triangulum BAC per axem, reſultabit ex hac ſectione per 3. prop. lib. 11. elem. recta linea GF in planis trianguli BAC per axem, & ſecundo ſecante ſeu figuris prædictis vel curuis ſolùm, vel compoſita ex curua DFE, & recta DGE, exiſtens, tanquam ſectio communis. Dico autem rectas omnes lineas ex punctis prædictæ lineæ curuæ ductas in plano eius parallelas prædictæ lineæ DGE vel MNO perpendicularis ad baſim BC productam vel non productam, incidere in rectam FG, productaſque vltra ipſam FG vſque ad alteram dictæ lineæ curuæ partem in plano receptæ, bifariàm diuidi ab ipſa FG. Exempli gratiâ inſtar omnium, rectam HKL ductam in plano ſecundo ſecante, vel plano eius in quo exiſtit ſectio prædicta curua GFE, vel GF, ab vno puncto H dictæ ſectionis parallelam ipſi DGE, vel MNO, incurrere in K punctum dictæ rectæ GF, productamque vlterius donec in L attingat ipſam lineam curuam prædictam, bifariàm in K ſecari ab prædicta recta GF. Quod ſi conus ſectus duobus prædictis planis, fuerit rectus, dico prædictam lineam rectam DGE, vel MNO, ſemper eſſe perpendicularem dictæ rectæ FG: ſi verò fuerit ſcalenus, non eſſe rectam DGE, vel MNO, perpendicularem ipſi FG, niſi cùm planum primum ſecans conum per axem, fuerit perpendiculare baſi BDC circulari coni dati ſcaleni ſecti.

Demonſtratio. Quandoquidem conus datus ſecatur plano primo per axem eius, ideoque per verticem eius A, punctumque H, & ſic de alijs in ſuperficie conica, eſt extra latera AB, AC, trianguli BAC per axem; rectaque linea HKL ducta eſt parallela ipſi DGE, vel

MNO perpendiculari rectæ BC, basi dicti trianguli BAC per axem coni, incidet in planum dicti trianguli BAC in vnum eius punctum K, quod etiam est punctum rectæ FG existentis in ipso plano dicti trianguli, (porrò punctum illud K erit vnicum in quo perforat recta HKL, ipsum planum dicti trianguli, per lem. 1. & vnicum in quo recta ipsa HKL, secat rectam FG per 11. ax. lib. 1. elem.) & in hoc puncto K bifariàm diuidetur recta ipsa HKL producta vsque ad L punctum sectionis prædictæ curuæ quod etiam est in superficie dicta conica sicuti & ipsa curua linea: porrò quod incidat dicta recta HKL in planum trianguli BAC per axem, & in puncto K bifariàm diuidatur, patet ex prop. 6. superiore. Quod si conus rectus fuerit rectus, eius axis per def. 8. erit perpendicularis ad planum baseos circularis dicti coni; ideoque per prop. 18. lib. 11. elem. & planum secans conum hunc per axem, & resultans triangulum BAC, erit perpendiculare seu rectum plano dictæ circularis baseos coni: Et quia ex datis data recta DGE vel MNO & perpendicularis rectæ BC communi sectioni duorum planorum BAC trianguli per axem, & basis circularis BDC, sibi inuicem perpendicularium; erit per def. 4. lib. 11. elem. etiam eadem recta DGE vel MNO ducta in plano circuli BDE, perpendicularis plano alteri trianguli BAC per axem; ideoque per def. 3. lib. eiusdem 11. elem. eadem recta DGE vel MNO, erit perpendicularis rectæ FG in quam incidit in puncto G vel N, existenti in dicto plano trianguli BAC. Quod si fuerit datus conus sectus, scalenus, & planum secans ipsum per axem eius, & verticem A, fuerit etiam perpendiculare ad basim circularem BDC; eodem modo & artificio probabimus quo antea, triangulum BAC per axem, esse perpendiculare dictæ basi circulari, & rectam DGE, vel MNO, esse ad angulos rectos ipsi rectæ FG, in puncto G, vel N. Quod si conus fuerit scalenus, triangulumque BAC per axem eius minimè orthogonium basi eius BDC, ostendam rectam DGE vel MNO, non esse perpendicularem in puncto G vel N, ipsi rectæ FG: si enim recta DGE vel MNO, esset perpendicularis rectæ FG, cùm sit ex datis orthogonia rectæ BC communi sectioni BAC, BDC, erit per 4. prop. lib. 11. elem. perpendicularis plano trianguli BAC in quo existit recta BC & recta FG: quare per prop. 18. lib. cit. 11. ipsum planum circuli BDC applicatum ipsi GDE vel MNO, erit perpendiculare plano trianguli BAC; ipsum igitur planum BAC trianguli per axem erit vicissim perpendiculare plano baseos BDC circularis dati, contra ipsa data: Absurdum hoc indicat positionem vnde procedit esse repugnantem rationi, videlicet in hoc casu vltimo rectam DGE vel MNO esse perpendicularem rectæ FG: non igitur erit perpendicularis, quod ostendere debebamus, Atque ita propositio præsens abundè demonstrata est.

COROLLARIVM I.

Ex quibus constat lineam FG diametrum esse sectionis DFE cùm lineas omnes quæ in ipsa ducuntur, vni cuipiam æquidistantes bifariàm secet.

HOc est rectam lineam FG, quæ est sectio communis trianguli BAC per axem & plani secundi secantis applicati ad rectam DGE, vel MNO, perpendicularem basi BC trianguli in plano baseos circularis coni, quod planum secundum sic applicatum & secans conum eiusque superficiem, producit sectionem DFE, vel terminatam curua linea DFE, & recta DGE, vel terminatam vnica curua GE, (quæ sectio est recepta in plano, lineamque curuam habet in superficie conica) lineamque in quam rectam FG, esse diametrum prædictæ sectionis: nam rectas lineas omnes, quæ in ipsa ducuntur seu accommodantur, parallelas cuidam rectæ lineæ DGE, vel MNO, in eiusdem proprio plano existenti, bifariàm diuidere constat ex huius propositionis demonstratione; Instar omnium sit recta linea HKL accommodata in sectione prædicta, parallela ipsi DGE, vel MNO, bifariàm diuisa ab prædicta recta FG: quare per def. 10. ipsa FG erit diameter sectionis DFE seu eius lineæ curuæ in plano existentis.

COROLLARIVM II.

Constat præterea fieri posse; vt lineæ æquidistantes, à diametro FG bifariàm quidem, non autem ad angulos rectos secentur.

QVia ex hac propositione constat conum rectum sectum duobus prædictis planis, primo per axem eius, secundo applicato secundum rectam lineam DGE vel MNO, perpendicularem basi BC trianguli BAC per axem, ductam in plano baseos circularis BDC, & secante etiam triangulum per axem in recta linea FG, & perpendicularem quoque ostensam ipsi rectæ FG in puncto eius G, vel N; obtinere in sectione facta per secundum planum secans, rectam lineam HKL, & reliquas huiusmodi in ipsa sectione ductas in eodem ipso plano parallelas rectæ DGE vel MNO: quare per prop. 29. lib. 1. elem. ipsa HKL & reliquæ prædictæ parallelæ, erunt ad angulos rectos ipsi FG: vnde vlterius ipsa recta FG diameter sectionis diuidet ad angulos rectos ipsam HKL & reliquas ipsi DGE vel MNO parallelas. Quod etiam intelligendum ex demonstratione ista allata, & dictis in demonstratione propositionis, in cono scaleno secto à primo plano secante per axem suum recto ad basim circularem. Et quia demonstra-

uimus in propositione dum conus scalenus secatur à primo plano per axem proprium minimè recto ad basim circularem, prædictam rectam lineam DGE, vel MNO, non esse ad angulos rectos ipsi rectæ FG; neque etiam erit recta HKL parallela ipsi DGE vel MNO, ad angulos rectos ipsi FG, per propos. cit. 29. lib. 1. elem. Ex quibus constat id quod Author corollario suo secundo rectè infert; fieri posse vt lineæ æquidistantes rectæ DGE vel MNO, accommodatæ intra sectionem huiusmodi conicam, ab diametro FG bifariàm quidem vti in demonstratione præsentis propositionis diximus, non autem ad angulos diuidantur: quod contingit in solo scaleno cono, quando planum secans primum, seu triangulum BAC per axem non est perpendiculare plano baseos circularis coni secti scaleni; secùs in omni cono recto semper ad angulos rectos secati; & etiam in scaleno cono, quando triangulum BAC per axem est perpendiculare plano circulari baseos.

COROLL. NOSTRVM I.

Tres casus vniuersales habet hac propositio. Aut enim recta linea DGE perpendicularis posita basi BC, trianguli BAC per axem coni, in plano baseos circularis illius, ipsam basim BC secat in G puncto ex intermedijs, vel in extremorum vno, verbi gratiâ C. Vel huiusmodi perpendicularis vt MNO, ipsam basim BC secat productam in puncto N.

PRo primo casu inseruit figura prima. pro secundo secunda figura. pro tertio tertia figura.

COROLL. NOSTRVM II.

Ex dictis colligitur vnam esse posse ex præmonitis lineis rectis ad 12. def. rectam lineam, quibus debent esse parallela recta omnes lineæ in sectione accommodata & bifariam secta, ad determinandam diametrum sectionis iuxta def. 10. quæ est communis sectio plani secundi secantis & efficientis sectionem, & plani baseos circularis coni.

NAm ostendimus rectas omnes lineas accommodatas in sectionibus, (quarum vna est instar omnium HKL,) parallelas rectæ DGE, vel MNO, quæ est communis sectio plani secundi secantis conum & efficientis sectionem, & plani baseos productæ vel non productæ dicti coni; bifariàm secari ab recta linea FG: atque ob id esse diametrum sectionis demonstratam in corollario primo Apollonij.

COROLL. NOSTRVM III.

Prædicta recta, vnaque ex rectis lineis quibus parallela esse debent recta linea accommodata in sectionibus, & bifariàm secta ad determinandam diametrum sectionis iuxta def. 10. potest esse extra circularem basim coni in plano eius, ipsius circumferentiam contingens in puncto vno, vel non contingens, vel intra ipsum circulum.

HOc nostrum corollarium 3. lucem accipere debet ex nostro primo, in tribus suis casibus, & figuris tribus huius propositionis.

COROLL. NOSTRVM IV.

Recta omnes lineæ accommodata in sectionibus propositis in hac propositione, inter quas est allata recta HKL; sunt ordinatim applicata ad diametrum FG.

NAm sunt parallelæ ipsi DGE, vel MNO, bifariàmque diuisæ ab diametro FG; ergo per def. 12. erunt ordinatim applicatæ ad diametrum FG.

COROLL. NOSTRVM V.

Recta FG ostensa diameter sectionum commemoratarum in hac propositione, est axis illarum in cono recto; & scaleno etiam, quando secatur primo plano per axem, perpendiculari ad basim circularem coni.

NAm per corollarium 2. constat hanc diametrum FG in cono recto, & in scaleno quando triangulum BAC per axem est perpendiculare basi BDC circulari coni, bifariàm; secare & ad angulos rectos, rectas omnes lineas æquidistantes rectæ DGE vel MNO, & inter se: quare per def. 18. ipsa FG diameter erit axis dictarum sectionum in cono recto semper, & in scaleno si adiungatur conditio commemorata.

PROPOSITIO VIII.

Si conus plano secetur per axem; & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: diameter autem sectionis factæ in superficie, vel æquidistet vni laterum trianguli, vel cum ipso extra coni verticem conueniat; & producantur in infinitum tùm superficies coni, tùm planum secans. Sectio quoque in infinitum augebitur: & ex diametro

metro sectionis ad verticem, cuilibet rectæ lineæ datæ æqualem abscindet linea, quæ quidem à sectione coni, ei quæ est in basi æquidistans ducta fuerit.

SVppositio, & apparatus. Conus verticem habens A, sectus sit plano primo per axem; vnde relultabit iuxta propof. 3. triangulum BAC pro sectione communi; & per nost. coroll. 1. ad illam prop. 3. basis BC dicti trianguli erit diameter baseos circularis BDC, ipsius coni. Sectus sit etiam idem conus altero plano secundo, applicato secundum rectam DG lineam perpendicularem basi BC prædictæ ductam in plano ipsius circuli BDC: sitque sectio communis huius plani secundi, & superficiei conicæ, linea curua iuxta lem. 3. DFE, recepta in plano secante secundo; sectio verò huius plani secundi, & trianguli BAC per axem, sit recta FG, quæ per coroll. 1. prop. 7. præced. erit diameter dictæ sectionis DFE. Sit verò hæc diameter FG, vel parallela vni laterum puta AC, dicti trianguli per axem, vti in prima figuratione videre est; vel secet ipsum AC latus in I, productum vltra A verticem, producendo etiam ipsam FG diametrum vltra F, vti figuratio secunda exhibet. Affero primò sectionem DFE, in infinitum augeri, si tam coni dati superficies curua, & planum secundum secans producantur in infinitum, vltra basim BDE circularem coni. Quod superficies conica in infinitum versus basim circularem augeri seu produci possit, patet ex def. 1. Secundam assertionem proponemus post primæ assertionis huius apparatum alterum sequentem.

Apparatus alius ad demonstrationem primæ assertionis. Producta superficie conica ex dictis in def. 1. produci poterunt latera AB, AC, trianguli per axem, quæ sunt in superficie conica per prop. 3. & productiones illorum, semper erunt in superficie ipsa conica producta, per coroll. nost. 2. ad prop. 2. Præterea produci poterit FG diameter vltra G in infinitum. Et quia vel ponitur recta FG parallela rectæ AC, etiam productæ ambæ in infinitum nunquam conuenient ex natura parallelarum rectarum existentium in eodem plano, sicut existunt istæ duæ in plano trianguli BAC per axem; vel ponitur recta FG conuenire cum recta AC vltra verticem A, in puncto I; quantumuis producantur ambæ, vltra G & C, semper magis ac magis recedent ab inuicem, seu nunquam conuenire poterunt; alioqui duæ rectæ illæ superficiem clauderent, contra 14. ax. lib. 1. elem. Similiter in prima & secunda figuris ob rationes allatas, recta FG producta in infinitum vltra G, non concurret cum latere FB extenso in infinitum vltra B.

Sumatur verò quodlibet punctum H in recta FG producta vltra G: & per prop. 31. lib. 1. elem. per hoc punctum H, in plano sectionis DFE constituatur recta linea MHN parallela ipsi rectæ DGE: tùm per punctum H rectæ FGH, agatur in plano trianguli BAC producto vltra BC sustentante rectas AB, AC, productas, altera recta linea KHL parallela rectæ BGC, quæ per prop. 11. Procli secabitur in K & L, ab lateribus AB, AC secantibus alteram parallelam BC. Iam verò quia duæ rectæ lineæ BC, DE se mutuò secantes in G, sunt parallelæ respectiuè duabus rectis KL, MN, se mutuò secantibus in H; existuntque binæ commemoratæ primæ in plano circuli BDC, & aliæ duæ postremæ in plano per prop. 2. lib. 11. elem. quod diuersum est ab dicto circulo, nam infra illum est: hæc plana erunt per prop 15. lib. 11. elem. parallela. Ergo sectio coni facta ab plano in quo existunt rectæ KL, MN, erit per prop. 4. libri huius, circulus KMLN; resultabitque alius conus KAL iuxta cit. prop. 4. cuius basis erit circulus KMLN, circumferentiam habens in ipsa superficie dicti coni resultantis. Sunt verò puncta D, E, M, N, tam in plano secundo secante, in quo existunt rectæ parallelæ DE, MN, quàm in superficie conica; ergo dicta puncta existent in communi sectione plani prædicti, & superficiei dictæ conicæ. Affero autem secundò in hac sectione DFE producta seu extensa vlteriùs, posse duci rectam lineam, verbi gratiâ MHN, terminatam vtrimque in ipsa linea curua sectionis producta, parallelam ipsi DGE, quæ secet diametrum FG, sectionis DFE; ita vt pars diametri ab eius vertice F ad sectionem eius communem & prædictæ rectæ MHN, sit æqualis cuicumque rectæ lineæ datæ.

Demonstratio primæ assertionis. In apparatu secundo probauimus auctam esse sectionem DFE, vsque ad puncta M & N; ergo si iuxta apparatum eadem præstemus in infinitum versus partes productæ rectæ FG vltra G in infinitum: augebitur semper in infinitum dicta sectio DFE; assumendo puncta remotiora & remotiora ab basi DE, in ipsa diametro FG, sicuti fecimus assumendo punctum H.

Demonstratio secundæ assertionis. Si per prop. 3. lib. 1. elem. de diametro FC producta in infinitum vltra G, rescindatur recta linea verbi gratiâ FH æqualis datæ cuicumque rectæ; & per punctum H agatur recta linea MHN parallela ipsi DE, in plano secundo secante; & reliqua fiant quæ in dicto apparatu secundo præstitimus, in quo probauimus rectam MN parallelam rectæ DE, incidere in puncta M, N, sectionis curuæ DFE productæ: manifestum est quod ex diametro FG sectionis DFE, ab F vertice eius, cuilibet rectæ lineæ æqualem rectam abscindet recta linea

nea MHN, ab sectione prædicta conica DFE ducta parallela ei quæ est in baseeius, nimirum DE. Et sic de alijs quibuscumque huiusmodi rectis lineis. Atque ita demonstrauerimus duas huius propositionis octauæ assertiones.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Diameter originaria FGH, sectionis DFE de qua sermo est in hac propositione; nunquam occurrit etiam producta in infinitum versus partes contrarias vertici F sectionis, ipsius sectionis lineæ curuæ etiam auctæ in infinitum versus partes prædictas; eamque solummodo secat in puncto verticis, & ab eo semper progreditur versus partes assignatas intra locum ipsius sectionis.

Esto si fieri possit diameter FGH, producta vel non producta occurrat alteri puncto lineæ curuæ sectionis DFE; certè per prop. 31. lib. 1. elem. in plano eius quod recipit rectam DG, & rectam FGH seu diametrum, poterimus educere rectam lineam parallelam ipsi DG, quæ per prop. 7. occurret duobus punctis lineæ curuæ sectionis, bifariàmque diuidetur ab diametro FGH producta vel non producta: At quomodo bifariàm hæc recta diuidetur ab diametro FGH? quam solùm attingit in vno suo extremo; bifariàm ergo hæc recta diuidetur, & non bifariàm; quod cùm sit absurdum, falsa erit positio vnde procedit, & nostra prima assertio illi contradicens, vera. Ex hac prima parte demonstrata, reliquæ sunt manifestæ. Nam si concipiamus rectam lineam contingentem sectionem in puncto F verticis; hæc recta nihil habebit commune cum linea curua sectionis præter punctum F, licet extendatur vtrimque in infinitum, iuxta naturam rectæ tangentis curuam lineam, & semper extra locum curuæ procedet. Quare non poterit esse in directum ipsi diametro FG, quæ intra locum eius extenditur in eodem plano sustentante ambas, curuam & diametrum FGH lineam rectam: igitur per ax. 10. & 11. lib. 1. elem. productæ istæ duæ rectæ tangens, & diameter FG, se mutuò secabunt in communi puncto F, & in partes abibunt diuersas; diameter igitur FG producta vltra F, secabit sectionem DFE in puncto F, extra illam procedendo: neque inuehi poterit, quod iterum occurrat vel secet lineam curuam sectionis; sic enim ex illa parte primùm obuiam tangentem prædictam rectam intersecaret, quæ tota extra sectionem extenditur in infinitum ex vtraque parte: & sic contra 14. ax. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ spatium clauderent. Maneat ergo propositum.

PROPOSITIO IX.

Si conus plano secetur conuenientecum vtroque latere trianguli per axem, quod neque basi æquidistet, neque subcontrariè ponatur: Sectio, circulus non erit.

SVppositio. Conus basim habens circularem BIC, verticemque A, secetur plano aliquo secundo quod non sit æquidistans dictæ basi, neque subcontrariè positum, seceтque ambo latera AB, AC, trianguli BAC per axem dicti coni facti plano primo per axem eius, vnde resultare debet dictum triangulum BAC per axem, per prop. 3. cuius basis BC est diameter circularis baseos dicti coni iuxta coroll. nost. 1. ad cit. prop. 3. Sectio autem coni per planum secundum prædictum secansque latera AB, AC, trianguli per axem cum circumstantijs allatis, sit iuxta lemma 3. DKE linea curua in superficie conica recepta, tùm etiam in plano secundo secante. Dico hanc sectionem DKE, non esse circulum.

Apparatus prima pars. Vel planum datum efficiens sectionem DKE, secansque triangulum BAC per axem cum conditionibus allatis, secabit basim circularem BIC coni dati, in linea inferiore recta FGO, non productam; vel secabit solum planum ipsius baseos productum contingendo circumferentiam circularis baseos, in eadem recta linea FGO, vel secabit planum circularis baseos in eadem recta linea FGO, productum, ita vt ipsa recta FGO nihil commune habeat cum circulari illa circumferentia. Primi casus est prima figura, secundi secunda, tertij tertia.

Apparatus secunda pars. Esto, si fieri possit prædicta sectio DKE, circulus. Et per prop. 12. lib. 1. elem. ex H centro circularis BIC baseos dati coni quærendo per prop. 1. lib. 3. elem. demittatur recta linea HGC, vel HCG vel HE perpendicularis ipsi rectæ FGO in puncto G: nisi recta FGO transierit per centrum H prædictum; tunc enim per prop. 11. lib. cit. excitanda erit ex centro H perpendicularis BHC vel BGC diameter circuli, ipsi FGO, punctumque G congruet eum H centro: producenda verò erit si opus sit recta HG, vtrimque donec terminetur vtrimque in circumferentia circuli; atque ita BC erit diameter illius. Præterea conus secandus erit plano applicato axi eius, & vertici, & rectæ BHC, vnde resultabit pro sectione coni, triangulum BAC rectilineum, latera habens AB, AC, in superficie conica, & basim BC, per 3. prop. & per 1. coroll. nost. ad illam, basis BC erit diameter

meter circularis baseos dicti coni. Iam quia puncta D, E, G, existunt tam in plano dato secante, quàm in plano triangulum BAC adæquatè sustentante secto; ex consequenti necessitate dicta tria puncta D, E, G, existent in communi sectione istorum duorum planorum, hoc est per prop. 3. lib. 11. elem. in recta linea DEG, quæ est per coroll. 1. prop. 7. diameter sectionis DKE. Quod si sumatur in linea curua sectionis prædictæ, aliquod punctum, puta K, quod non sit in lateribus AB, AC, trianguli BAC per axem, per quod in plano sectionis ipsius DKE, & secante, agatur per prop. 31. lib. 1. elementorum, recta linea KML parallela ipsi FGO, & accommodata in dicta sectione curua; erit in puncto M, quo occurrit rectæ DEG vel DGE, quæ est communis sectio plani secantis dati, & trianguli per axem; secta bifariàm in M ab ipsa diametro, per prop. 7. & sic omnes huiusmodi aliæ rectæ ducendæ parallelæ ipsi FGO, & accommodandæ in sectione DKE, erunt bifariàm diuisæ in punctis rectæ DEG vel DGE. Atque ita per def. 10. recta DE erit aliter demonstrata diameter sectionis DKE. Insuper per dictum punctum M in plano trianguli BAC per axem, agatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea NMX parallela basi BC, secanda ab lateribus AB, AC, in N & X, iuxta prop. 11. Procli, quia alteram BC parallelam secant in B & C: hæc recta NMX secabit etiam in eodem puncto M, rectam DE, per cit. prop. 11. Procli, nam DGE vel DEG secat alteram BC parallelam. Iam verò quoniam recta KML est etiam posita parallela rectæ FGO, secans in G rectam BC; planum in quo sunt per prop. 2. lib. 11. elem. duæ rectæ NMX, KML, angulum in M constituentes, erit per prop. 15. lib. 11. elem. parallelum plano in quo existunt duæ aliæ rectæ BCG, FGO, angulum in G efficientes, hoc est plano circularis baseos BIC producto vel non producto; nam binæ illæ rectæ sunt ostensæ binis alijs relatiuè æquidistantes: Sectio ergo in cono resultans per planum in quo existunt duæ rectæ NMX, KML, erit per prop. 4. circulus NKXL. Et quia recta FGO est posita ad angulos rectos ipsi BC, suntque positæ aliæ duæ rectæ lineæ KML, NMX, parallelæ illis respectiuè; erit per prop. 10. lib. 11. elem. angulus KMN quem efficit recta KM cum recta NM, æqualis angulo FGB; hic est rectus per constructionem, ergo angulus KMN, erit rectus: igitur recta KML erit perpendicularis rectæ NMX, per 10. def. lib. 1. elem. igitur per lemma 47. rectangulum sub NM, MX, erit æquale quadrato rectæ KM. His paratis accedamus ad demonstrationem.

Demonstratio. Quia sectio DKE ponitur ab aduersario circulus, & ostendimus rectam DE esse diametrum ipsius sectionis, bifariàmque diuidere rectam FGO, & rectam KML, & sic de reliquis parallelis huiusmodi ipsi FGO; necessariò per 3. prop. lib. 3. elem. erit ad angulos rectos recta KM, diametro DE, demissa ab K puncto circumferentiæ circuli introducti DKE ab aduersario, ad ipsam DE diametrum: quare per 47. lemma, rectangulum sub DM, ME, erit æquale quadrato rectæ KM: igitur per 1. ax. lib. 1. elem. erunt rectangula æqualia inter se, vnum sub NM, MX, aliud sub DM, ME: vnde per prop. 16. lib. 6. elem. erit vt NM ad ME, sic DM ad MX; & permutando iuxta proposi. 16. lib. 5. elem. vt NM ad MD, sic EM ad MX: quare cùm triangula NMD, EMX, angulos obtineant per prop. 15. lib. 1. elem. medijs characteribus M designatos æquales, lateraque circa illos proportionalia, erunt ipsa dicta triangula per prop. 6. lib. 6. elem. æquiangula; ideoque anguli DNM, XEM, seu ANX, AED, erunt æquales. cùmque sit in triangulo BAC posita recta NX parallela basi BC, erunt per propos. 29. lib. 1. elem. anguli ANX, ABC, æquales: quare cum eidem angulo ANX, sint ostensi æquales anguli AED, ABC, erunt inter se æquales ipsi anguli AED, ABC, per 1. ax. lib. 1. elem. Igitur ex dictis in prop. 5. subcontrariè erunt posita triangula ADE, ABC, contra datum. Hoc absurdum cùm deductum sit ex positione quod sectio DKE sit circulus, ipsa erit absurda & falsa: contradicens igitur assertio propositionis erit vera ac demonstrata.

PROPOSITIO X.

Si in coni sectione duo puncta sumantur: recta linea quæ huiusmodi puncta coniungit, intra sectionem cadet; & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra.

SVppositio. Data sit sectio FED conica habens lineam curuam pro termino; (nam Author sectionem huiusmodi conicam intelligit, nisi triangularem exprimat) & in hac sectione duo puncta quælibet G, H, assumpta; rectaque linea vniat ipsa. Dico ipsam rectam GH lineam cadere intra sectionem FED, seu in ipsa esse accommodatam; productam verò vlterius vltra G vel H, cadere extra dictam sectionem FED.

Demonstratio. Per coroll. 2. vel 3. lemmatis 4. hæc sectio FED, recipitur adæquatè in plano; & sic puncta G & H assumpta existent in hoc plano: ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 7. lib. 11. elem. recta GH, recipietur adæquatè in plano ipsius curuæ sectionis FED, existetque intra illam. Quod si producatur ista

recta

recta GH vltra H, vel vt loquitur Apollonius addatur ei in directum recta aliqua in puncto H; hæc recta addita ipsi rectæ GH, seu productio rectæ GH, non poterit adæquari vlli parti curuæ lineæ FED sectionis datæ; alioqui curuum & rectum congruerent contra naturas ipsorum; productio ergo illa ab puncto H extendetur intra aream sectionis FED, si non egrediatur extra ipsam; & assumere poterimus aliud punctum O in curua linea datæ sectionis conicæ, ad quod rectæ lineæ GO, HO, ductæ, etiam iuxta primam partem propositionis demonstratam, totæ erunt intra ipsam sectionem: sed & efficient cum alia recta GH triangulum rectilineum GHO, quandoquidem istud punctum O existere poterit vnum ex illis quæ non sunt in directum rectæ illius GH productæ vltra H; nam aduersarius præuidendo nos argumentari posse ex 29. ax. lib. 1. elem. productionem illam, exempli gratiâ HL diuidere angulum rectilineum GHO, ideoque productam in infinitum rectam illam GHL necessariò per ax. 18. eiusdem lib. 1. incursuram in punctum M, rectæ GO; atque ita duas rectas, GHLM vnam, & GM alteram, spatium claudere, contra 14. ax. eiusdem lib. cit. Quare dicet aduersarius productionem illam rectæ GH, vltra H, incedere per spatium comprehensum inter rectam HO, & curuam HO portionem sectionis conicæ datæ FED; Sed iterum argumentamur sic, Productio illa in infinitum facta, necessariò per ax. 28. cit. lib. 1. elem. tandem ad lineæ curuæ HO punctum K, aut aliud rectæ HO ex intermedijs attinget; puta N; Si primum aut secundum, duæ rectæ lineæ spatium comprehendent nimirum recta GHK, & GK in primo casu, & in secundo recta HKN & recta HN, contra ax. 14. lib. 1. elem. Hæc omnia absurda cùm deducantur ex positione aduersarij, indicant ipsam esse falsam; quare recta GH producta vltra H, extra sectionem curuam conicam egredietur, puta ad I. Si voluerit aduersarius productionem rectæ GH: incedere per spatium conclusum recta GI & curua GEH, idem modus argumentandi & concludendi assumetur. Igitur pars secunda huius propositionis manifesta erit.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si duo puncta sumantur in sectione coni per verticem & axem, quæ triangularis est per 3. prop. quorum neutrum sit vertex, & vnum sit in vno ipsius trianguli latere recepto in superficie conica, & alterum in alio latere etiam sustentato adæquatè in superficie eadem conica. Recta linea vniēs hæc puncta, tota intra sectionem dictam triangularem erit: producta verò extra triangulum incedet.

SVppositio. Sit iuxta prop. 3. sectio coni triangulum BAC, eiusque latera AB, AC, existant in superficie coni: duoque puncta G, H, assumpta, extra verticem A coni & trianguli BAC singula; vnumque G in latere AB, & aliud H in altero latere AC. Dico rectam GH, vnientem hæc duo puncta assumpta totam existere intra triangulum, productamque vltra hæc G, H puncta, exire extra triangulum, verbi gratiâ HI.

Demonstratio est facilis & euidens quoad primam partem: nam per coroll. nost. 21 ad prop. 7. lib. 11. elem. prout terminatur punctis G, H, datis extremis suis, tota est in plano ipsius trianguli dati BAC; & quia dantur sua extrema G & H, in terminis AB, AC, dicti trianguli; tota erit intra aream eius, ideoque intra ipsum triangulum. Porrò si producatur, verbi gratiâ vltra H, ad I, duæ rectæ GH, AH, cùm angulum in H efficiant, hoc est non sint in directum ex datis; necessariè per ax. 11. lib. 1. elem. si producantur ambæ, se mutuò decussabunt in H, & in diuersas diuaricabuntur partes, ex dictis in explicatione illius axiomatis: quare GH egredietur producta extra triangulum BAC.

PROPOSITIO XI.

Si conus plano secetur per axem: secetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; & sit diameter sectionis vni laterum trianguli per axem æquidistans. Recta linea, quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni plani secantis & basis coni, vsque ad sectionis diametrum; poterit spatium æquale contento linea quæ ex diametro abscissa inter ipsam & verticem sectionis interijcitur; & alia quadam quæ ad lineam inter coni angulum & verticem sectionis interiectam, eam proportionem habeat, quam quadratum basis trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus continetur.

netur. Dicatur autem huiusmodi sectio, Parabole.

Suppositio. Conus verticem habens A, & basim circularem BDC, plano sectus sit per axem; resultabit pro sectione triangulum BAC per axem, iuxta prop. 3. & per coroll. nostrum 1. ad illam prop. basis BC erit diameter circularis baseos prædictæ BDC. Posita verò sit recta linea DGE, in plano dicti circuli, quæ sit chorda eius, perpendicularis diametro BC per 11. prop. lib. 1. elem. hæc recta DGE chorda secabitur in G bifariàm, per 3. prop. lib. 3. elem. Sectus autem sit idem conus altero plano secundo secante basim circularem BDC, secundum rectam DG, ita vt sectio communis huius plani secundi, & trianguli BAC per axem sit recta FG parallela vni laterum verbi gratiâ, AC, dicti trianguli per axem: certum est quod sectio ista resultans in cono per planum hoc secundum, non incedet per eius verticem A, eo quod planum secans per illum non incedat; resultabitque pro hac sectione communi superficiei conicæ & plani secundi secantis, linea curua DFE, spatium planum concludens cum recta DGE, quæ est sectio communis planorum, secundi secantis, & sectæ baseos circularis: quod resultet tale spatium clausum curua linea DFE, & recta DGE, patet ex lemmate 4. Quod si ab omnibus punctis curuæ huius lineæ DFE, excepto vertice F quod est in latere AB, dicti trianguli per axem, in plano sectionis DFE prædictæ agantur rectæ lineæ parallelæ ipsi DGE, (instar omnium sit recta KL) productæ vsque ad alteram dictæ sectionis partem, incurrent in obuiam rectam FG, bifariàmque omnes diuidentur ab ipsa FG, per prop. 7. quare per defin. 10. recta FG erit diameter dictæ sectionis DFE. & ex datis æquidistans lateri AC prædicti trianguli per axem. Præterea per prop. 11. lib. 1. elem. ex puncto F verticis tam curuæ lineæ DFE, quàm diametri FG, excitetur in plano sectionis prædictæ DFE, in quo existit recta FG, recta linea FH perpendicularis ipsi FG diametro: ex qua FH recta detrahenda erit æqualis inueniendæ rectæ per lemma 6. datis quadrato BC, & rectangulo sub BA, AC, & recta AF, ordine prædicto; ita vt recta FH reperienda sit ad datam AF, sicut quadratum super recta BC ad rectangulum sub rectis BA, AC. Tunc assero quod quadratum rectæ KL sit æquale rectangulo sub rectis HF, FL, vti proponitur. Et quod talis sectio DFE cum conditionibus assignatis in propositione, sit ex mente Apollonij, Parabola.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. elem. in plano trianguli BAC per axem, ex puncto eius L, communique diametro FG prædictæ existentis in eius plano, agatur recta linea MLN, parallela basi BC, trianguli BAC, secans latera AB, AC, illud in puncto M, istud in puncto N.

Demonstratio. Quoniam duæ rectæ lineæ KL, MN, se mutuo attingentes in L, sunt parallelæ respectiuè duabus rectis lineis BC, DG, se mutuò attingentibus in G; & in diuersis existunt planis; (nam duæ DG, KL, existunt in plano secundo secante, vel plano sectionis DFE; & aliæ duæ BC, MN, existunt in plano trianguli BAC,) ipsæ per prop. 10. lib. 11. elem. angulos continebunt æquales: positus autem est angulus BGD rectus, ergo alter angulus MLK, erit etiam rectus. Sed & per prop. 15. lib. cit. 11. elem. plana incedentia per dictos angulos, seu rectas illos constituentes, erunt parallela; hoc est planum sustentans duas rectas MLN, KL, erit parallelum circulari plano BDC sustentante duas alias rectas BGC, DGE: ergo per prop 4. sectio coni dari facta ab plano in quo existunt duæ rectæ MLN, KL, erit MKN circulus, centrum habens in axe coni secti, per cit. prop. 4. rectaque linea MLN, erit diameter dicti circuli MKN per coroll. nost. 1. ad prop. 3. & 4. Ergo quia ex K puncto circumferentiæ circuli MKN, decidit recta KL ad angulos rectos diametro MLN, erit per 47. lemma, rectangulum sub ML, LN, æquale quadrato super recta KL. Iam verò quia est per constructionem HF ad FA, sicut quadratum super recta BC ad rectangulum sub rectis BA, AC; & per prop. 23. lib. 6. elem. quadratum ex BC ad rectangulum sub BA, AC, habet rationem compositam ex ratione BC ad CA, & ratione BC ad BA; erit per lem. 7. ratio HF ad FA, composita ex ratione BC ad CA, & ratione BC ad BA. Et quia in triangulo BAC, ducta est recta MN parallela basi BC, erit per lem. 50. MN ad NA, vt BC ad CA: & quia etiam FL est posita parallela ipsi AN, in triangulo AMN; erit per cit. lem. 50. ML ad LF, sicut MN ad NA: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit ML ad LF, sicut CB ad CA; & vt CB ad BA, sic MN ad MA; hoc est vt LM ad MF; & reliqua NL ad FA reliquam, per prop. 16. lib. 5. elem. & per prop. 2. lib. 6. elem. vel citatum lem. 47. Igitur per lemma 7. proportio HF ad FA, componetur ex proportione ML ad LF, & ex proportione NL ad FA; sed proportio composita ex proportione ML ad FL, & ex proportione NL ad FA, est ea quam habet rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, per prop. 23. lib. 6. elem. ergo per lemma 7. & prop. 11. lib. 5. elem. erit vt HF ad FA, sic rectangulum sub ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA. Est autem, sumpta communi altitudine FL, iuxta prop. 1. lib. 6. elem. vt HF ad FA, ita rectangulum sub HF, FL, ad rectangulum sub LF, FA: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub ML,

ML, LN, ad rectangulum sub LF, FA, sicut rectangulum sub HF, FL, ad rectangulum sub LF, FA: eritque ideo per prop. 9. lib. 5. elem. rectangulum sub ML, LN, æquale rectangulo sub HF, FL. Cùm igitur ostenderimus rectangulum sub ML, LN, esse æquale quadrato super recta KL; erit per 1. ax. lib. 1. elem. quadratum super recta KL, æquale rectangulo sub HF, FL: quod erat demonstrandum. Vocetur autem vti Apollonius voluit, huiusmodi sectio DFE, conditiones habens propositas & explicatas, Parabole vel Parabola. Deinceps etiam Author rectam FH, vocabit lineam iuxta quam possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum sectionis: sed etiam ipsam rectam FH vocabit rectum latus sectionis, diametrum verò FG appellabit transuersum latus sectionis: quæ duo postrema erunt communia alijs sectionibus conicis, videlicet, hyperbolæ, & ellipsi, tùm etiam circulo.

Alia demonstratio magis succincta sed ab lemmatibus nonnullis dependens; posita tamen eadem figura, suppositione & apparatu, Quia duæ lineæ rectæ ML, LK, sunt parallelæ respectiuè duabus alijs rectis lineis BG, DG, in diuersis existentes planis binæ parallelæ respectu aliarum duarum; erunt per prop. 10. lib. 11. elem. anguli MLK, BGD, comprehensi ab illis æquales; cùmque angulus BGD sit rectus, alter etiam MLK rectus eritt quare recta KL erit perpendicularis ipsi rectæ MNL, per defin. 10. lib. 1. elem. Sed & per prop. 15. lib. 11. elem. planum applicatum rectis ML, LK, erit parallelum plano circulari baseos BDC, in quo sunt duæ aliæ prædictæ rectæ BG, DG: ergo si conus plano secetur applicato dictis rectis ML, LK, resultabit per prop. 4. pro sectione huiusmodi coni, circulus MKL, centrum habens in axe ipsius coni, & per nost. coroll. 1. ad cit. prop. 4. recta MLN existens in plano trianguli BAC per axem, erit diameter dicti circuli MKL. Ergo per lem. 47. cùm recta KL ex puncto K circumferentiæ circuli MKL demissa sit ad angulos rectos in L ad diametrum MN illius circuli, rectangulum sub ML, LN, erit æquale quadrato super recta KL: est verò per lemma 28. rectangulum sub HF, FL, æquale rectangulo sub ML, LN; igitur per 1. ax. lib. 1. elem. quadratum rectæ KL, erit æquale rectangulo sub HF, FL. quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM I.

Data Parabola, & diametro eius quæ sit sectio communis trianguli per axem conica sectionis, & plani efficientis ipsam parabolam: rectum eius latus, vel lineam rectam iuxta quam possunt recta linea ordinatim ad illam diametrum applicata, inuenire.

Svppositio. Data sit parabola DFE, eiusque diameter FG prædicta: oporteatque rectum eius latus reperire, seu rectam lineam iuxta quam possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad illam diametrum FG.

Apparatus. Ex quocumque puncto, verbi gratiâ L, diametri FG, educatur per prop. 11. lib. 1. elem. recta linea LK perpendicularis ipsi diametro FG, quæ producta in infinitum, attinget ex vna parte lineam curuam DFE in aliquo puncto, puta K; nam per prop. 8. sectio ipsa DFE in infinitum produci potest versus partes oppositas vertici F; quare recta LK, occurrat necesse est ipsi sectioni. Tùm datis duabus rectis hoc ordine FL, KL; FL quidem portione diametri FG, inter verticem F, & punctum L assumptum in diametro FG, reperiatur per prop. 11. lib. 6. elem. tertia proportionalis FH, constituenda perpendiculariter per prop. 11. lib. 1. elem. ipsi FG, ex eius vertice F. Dico rectam FG, esse latus rectum quæsitum parabolæ datæ, seu rectam iuxta quam possunt omnes rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum FG; verbi gratiâ iuxta quam potest recta KL.

Demonstratio. Cùm enim sint tres rectæ lineæ proportionales FL, KL, HF; erit per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ KL mediæ, æquale rectangulo sub FL, HF: ergo per prop. præsentem, & eius demonstrationem allatam, recta HF, erit rectum latus datæ paraboles DFE: dando diametrum eius FG incedentem per verticem F paraboles, quæque etiam sit sectio communis trianguli BAC per axem coni, & plani secantis efficientisque ipsam parabolam.

COROLL. NOSTRVM II.

Data diametro Paraboles, qua sit sectio trianguli per axem coni secti, & plani secantis efficientisque parabolen; & recto eius latere: Describere in plano ipsam Parabolam.

Svppositio. Data sit diameter prædicta FG, & rectum latus FH, oporteatque ipsam parabolam delineare in plano.

Apparatus. Sumpto quocumque puncto L, in diametro data FG, reperiatur per prop. 13. lib. 6. elem. inter duas rectas FL, FH, media recta LK proportionalis, applicanda per propos. 11. lib. 1. elem. perpendiculariter diametro FG, in puncto eius L, versus ambas partes, ita vt sint æquales inter se, & repertæ LK: & sic de alijs infinitis huiusmodi rectis, modo prædicto reperiendis & constituendis ex diuersis punctis diametri FG. Dico quod Parabole delineanda in plano incedet per extrema dictarum rectarum perpendicularium, verbi gratiâ instar omnium, per extremum K, rectæ LK.

Demonstratio, Cùm enim sint tres rectæ

lineæ proportionales HF, KL, FL; erit per propos. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ KL æquale rectangulo sub HF, FL. Iam verò si linea curua paraboles incipiens ab eius vertice F, non incedat per punctum K extremum rectæ LK; (& sic de alijs extremis aliarum huiusmodi rectarum) incedet si fieri possit per aliud eius punctum, vltra vel citra K: tunc verò per istam propos. 11. rectangulo sub HF, FL, erit æquale quadratum rectæ KL productæ vltra K, vel portionis ipsius rectæ KL; ostendimus autem eidem rectangulo sub HF, FL, esse æquale quadratum ipsius rectæ LK: ergo per 1. ax. lib. 1. elem. quadratum rectæ LK, & quadratum portionis huius rectæ LK, erunt æqualia; ipsaque recta LK, & pars eius, erunt per prop. 16. Procli, æquales, pars & totum, contra 8. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum indicat curuam lineam paraboles non posse incedere per aliud punctum rectæ LK, ab extremo suo K. Igitur reperiendo infinita huiusmodi puncta extremarum prædictarum rectarum proportionalium mediarum, modo prædicto constitutarum; per illa delineabitur linea curua paraboles in plano. & sic fecerimus imperatum.

COROLL. NOSTRVM III.

Sectio conica, quæ Parabole dicitur, potest in infinitum produci ad partes contrarias vertici eius: & eius diameter originaria intra locum eius produci poterit in infinitum versus easdem partes, & nunquam ad illas sectioni occurret, & solùm eius lineam curuam in vnico puncto verticis interfecabit.

NAm per hanc prop. 11. diameter eius est parallela vni laterum trianguli per axem coni: ergo per prop. 8. produci in infinitum potest ipsa parabole, ad partes oppositas verticiei eius; & reliqua proposita succedent vtì in vniuersum demonstrauimus in coroll. nostro ad cit. prop. 8.

COROLL. NOSTRVM IV.

Ista propositio includit duas definitiones. Primam ipsius Paraboles. Alteram lateris eius recti, seu rectæ lineæ iuxta quam possunt ordinatim applicatæ rectæ ad diametrum ipsius paraboles.

HAs duas definitiones per causam efficientem cum conditionibus requisitis proponemus, & addemus ad definitiones secundas Apollonij pertinentes ad hunc librum.

COROLL. NOSTRVM V.

Omnis recta linea educta ex punctis lineæ curuæ paraboles, perpendicularis ad diametrum eius, cuius mentio fit in hac propositione: est media proportionalis inter eius latus rectum, & portionem dictæ diametri, inter verticem paraboles, & hanc ipsam rectam perpendicularem ipsi diametro prædictam.

OStendimus hoc in recta KL media proportionali inter latus HF rectum ipsius paraboles DFE, & rectam FL: & sic de alijs omnibus huiusmodi rectis.

COROLL. NOSTRVM VI.

Hæc sectio conica, quæ vocatur in hac propositione Parabola, sic denominatur ab græco Παραβολὴ, quod significat comparationem. Quia comparando quadratum rectæ lineæ cuiusuis ab eius linea curua ductæ perpendiculariter ad eius diametrum, de qua fit mentio in hac propositione, cum rectangulo sub eius latere recto, & portione dictæ diametri huius, inter verticem illius, & dictam rectam perpendicularem: cùm sint semper æqualia, vocata est antonomasticè Parabola, hoc est comparatio, ad distinctionem nominum particularium aliarum sectionum conicarum sub lineis curuis; in quibus reperitur comparatio quadrati cum rectangulo, huiusmodi sed cum excessu vel defectu; non autem cum æqualitate, vt in hac Parabola.

NOtandum est, in parabola esse diuersas diametros ab commemorata, quam ab distinctione aliarum vocabimus primariam seu originariam, eò quòd in sua originaria sectione conica prædicta in hac propositione, & effectione paraboles primùm enascatur, de alijs diametris dicemus suo loco.

COROLL. NOSTRVM VII.

Diameter Parabolæ commemorata in hac propositione, seu originaria vel primaria, est axis eiusdem Parabolæ, iuxta conditiones corollar. nostri 5. ad prop. 7.

QVia demonstrauimus diametrum FG originariam paraboles DFE secare bifariàm rectas omnes lineas æquidistantes rectæ DGE, ideoque sibi inuicem parallelas, & per def. 12. ordinatim applicatam ad illam diametrum FG, ad angulos rectos; erit ipsa diameter FG originaria axis Paraboles DFE per coroll. cit.

PROPOSITIO XII.

Si conus plano secetur per axem: Secetur autem & altero plano secante basim, secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: & sectionis diameter producta, cum vno latere trianguli

anguli per axem, extra verticem coni conueniat. Recta linea, quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni plani ſecantis & baſis coni, vſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ea quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditurque angulo extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ quæ diametro æquidiſtans à vertice coni vſque ad baſim trianguli ducitur, ad rectangulum baſis partibus, quæ ab ea fiunt, contentum; latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam & verticem ſectionis interiectam; excedenſque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ continetur linea angulo extra triangulum ſubtenſa, & ea iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum applicantur. Vocetur autem huiuſmodi ſectio, Hyperbole.

SVppoſitio, & apparatus. Conus verticem A obtinens, & baſim circulum BDC, plano ſectus ſit primo per axem; vnde per prop. 3. pro ſectione triangulum BAC per axem, baſim BC habens ipſam diametrum circularis baſeos, iuxta coroll. noſt. 1. ad illam prop. 3. cit. Sectus verò ſit idem conus plano altero ſecundo ſecante baſim circularem BDC, ſecundum rectam chordam DGE perpendicularem diametro BC ſeu baſi dicti trianguli per axem; quæ recta DGE biſariàm in G diuidetur per prop. 3. lib. 3. elem. ab dicta diametro BC: Sectioque communis ſuperficiei conicæ & plani huius ſecundi ſecantis ſit iuxta lem. 3. linea curua DFE, diametrum habens originariam rectam FG, productam, concurrentem in H, cum latere CA, dicti trianguli BAC per axem, producto vltra A verticem coni. Tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex dicto vertice A, ſeu puncto anguli BAC, acta ſit recta linea AK, in plano dicti trianguli, ſecans in K diametrum BC circularis baſeos dicti coni, vel baſim dicti trianguli, parallela diametro FG, ſectionis prædictæ factæ DFE. Tùm per prop. 11. lib. 1. elem. ex puncto F, diametri FG, educatur ad vnam partem illius recta linea FL perpendicularis ipſi FG, in plano trianguli BAC, æqualiſque ponatur per prop. 3. lib. 1. elem. rectæ FL inueniendæ per lemma 6. ad quam recta HF, portio diametri producta GF, vltra F, ſubtenſaque angulo HAF extra triangulum prædictum BAC, rationem habeat, quam quadratum rectæ AK ad rectangulum ſub BK, KC; (hoc eſt quadratum rectæ AK ductæ ab A vertice coni ad baſim BC dicti trianguli per axem, parallela diametro FG, dictæ ſectionis DFE, ad rectangulum ſub BK, KC, contentum ſub dictæ baſis BC, partibus factis ab prædicta AK.) Præterea in ſectionis prædictæ DFE plano, ex puncto quolibet, puta M, lineæ eius curuæ DFE, quod tamen non ſit in latere AB, hoc eſt non ſit vertex F dictæ ſectionis, vel diametri FG, tranſmittatur recta linea MN parallela ipſi DGE, per cit. prop. 31. lib. 1. elem. quæ ſecabit per propoſ. 7. libri huius, vel prop. 11. Procli, diametrum FG, in N, eo quod altera parallela DG ipſam FG ſecat. Quia verò tota FG exiſtit etiam in plano trianguli per axem, BAC, (nam eſt ſectio communis illius & plani ſecundi ſecantis, per coroll. 1. cit. prop. 7.) etiam punctum eius N in plano dicti trianguli BAC exiſtet: quare per cit. prop. 31. lib. 1. elem. poterimus ducere in plano dicti trianguli, aliam rectam RNS parallelam baſi BC, occurrentemque in R, lateri AB, & in S, lateri AC. Tùm etiam per cit. prop. 31. in eodem plano dicti trianguli BAC, ponatur ex puncto N, rectæ FG, alia recta NX, parallela ipſi FL: & puncta H, L, recta linea HL vniantur, quæ producta vltra L, occurret alteri rectæ NX in puncto X, per prop. 11. Procli. Inſuper ex punctis X & L, ducantur ad partes H, rectæ XPT, LI, æquidiſtantes ipſi GNFH; prima XPT occurret in P rectæ FL productæ vltra P, & rectæ HIT ductæ parallelæ ipſi FL in eodem plano trianguli BAC, in puncto T; altera verò LI, occurret in I, rectæ HT prædictæ, & alteri NX in O ſi producatur infra L; idque per cit. prop. 11. Procli. Porrò per lemmata 13, & 44. reſultabunt diuerſa parallelogramma rectangula XF, OF, XL, XH, PI, IF. Dico autem rectam lineam MN à ſectionis DFE puncto M ductam parallelam ipſi DG, & applicatam in N ad eius diametrum FG, poſſe ſpatium rectangulum XF, contentum ſub recta FN, portione diametri FG, inter prædictam MN applicatam ad diametrum FG ab puncto M lineæ curuæ ſectionis parallelam ipſi DG, & verticem F; & ſub recta FP: rectangulum, inquam, XF adiacens lineæ FL, ad quam recta FH quæ in directum conſtituitur

diametro FG, ſectionis DFE, ſubtenditurque angulo FAH extra triangulum BAC per axem, eam proportionem obtinet, quam quadratum rectæ AK ductæ ab A vertice parallelæ diametro FG, vſque ad baſeos BC dicti trianguli punctum K, ad rectangulum ſub BK, KC, ſegmentis baſeos BC factis ab recta prædicta AK, contentum; latitudinem habens prædictam rectam FN; excedenſque per lemma 45. figura XL, ſimili, & ſimiliter poſita ei quæ continetur linea recta FH ſubtenſa angulo FAH extra triangulum BAC, & ea recta FL, iuxta quam poſſunt rectæ lineæ quæ ad diametrum FG, ſectionis prædictæ DFE applicantur modo prædicto parallelæ ipſi rectæ DG.

Demonſtratio. Quoniam recta linea RNS eſt poſita parallela rectæ BGC in plano trianguli BAC per axem; & recta MN parallela rectæ DGE in alio plano ſecundo vel ſectionis factæ DFE, per prop. 10. lib. 11. elem. angulos BGD, RNM, continebunt æquales; ſed angulus BGD, ex datis eſt rectus, ergo alter RNM etiam rectus erit: quare per def. 10. lib. 1. elem. recta linea MN erit perpendicularis alteri rectæ RNS. Verùm etiam per prop. 15. lib. 11. elem. plana erunt parallela applicata dictis rectis lineis RNS, MN, tùm BGC, DGE: igitur planum applicatum rectis RNS, MN, erit parallelum plano circuli BDC in quo ſunt rectæ lineæ BGC, DGE, hoc eſt parallelum plano baſeos coni: Quare per prop. 3. ſi concipiatur illud planum ſecare conum datum, ſectio communis erit circulus RMS; & recta linea RNS erit diameter illius circuli per noſtrum 1. coroll. ad illam prop. 3. Igitur cùm demonſtrauerimus rectam lineam MN deductam ab M puncto communi circumferentiæ circuli RNS, & ſectionis DFE, perpendicularem eſſe ad RNS diametrum dicti circuli; erit per lemma 47. quadratum ſuper recta MN æquale rectangulo ſub RN, NS. Iam verò quia fecimus in apparatu vt quadratum rectæ AK, ad rectangulum ſub BK, KC, ita recta HF ad rectam FL; & per propoſ. 23. lib. 6. elem. proportio quadrati rectæ AK ad rectangulum ſub BK, KC, componitur ex proportione AK ad KC, & ex proportione AK ad KB; componetur per lemma. 7. proportio HF ad FL, ex proportione AK ad KC, & ex proportione AK ad KB. Et quia in triangulo GHC, ducta eſt parallela recta AK ipſi HG. erit per lemma 50. AK ad KC, vt HG ad GC. Et quia etiam in triangulo GHC eodem, recta ducta eſt NS parallela rectæ GC, erit per cit. lem. 50. vt HG ad GC, ſic HN ad NS: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit AK ad KC, vt HN ad NS. ſed etiam quia eſt in triangulo BAK, ducta recta FG parallela ipſi AK; & recta RN, parallela ipſi BC in triangulo BFG; erit per cit. lem. 50. vt AK ad KB, ſic FG ad GB; & vt FG ad GB, ſic FN ad NR. Igitur per lemma 7. proportio HF ad FL, componetur ex proportione HN ad NS, & ex proportione FN ad NR: Verum proportio compoſita ex proportione HN ad NS, & ex proportione FN ad NR, eſt per prop. 23. lib. 6. elem. ea quam obtinet rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub NS, NR: ergo per lemma 7. erit vt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub NS, NR, ſic HF ad FL, hoc eſt per lemma 50. ſic HN ad NX, propter rectam lineam FL parallelam ipſi NX. Quod ſi ſumatur recta FN altitudo communis duobus rectangulis, vnius quidem ſub HN, NF, alterius verò ſub FN, NX; erit per 1. prop. lib. 6. elem. vt HN ad NX, ita rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub FN, NX: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum ſub HN, NF, ad rectangulum ſub SN, NR, Ita rectangulum ſub HN, NF, ad ipſum rectangulum ſub FN, NX. Igitur per prop. 9. lib. 5. elem. rectangulum ſub SN, NR, eſt æquale rectangulo ſub XN, NF. Verùm quadratum ſuper recta MN probatum eſt eſſe æquale rectangulo ſub SN, NR; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. idem quadratum ſuper recta MN erit æquale rectangulo ſub XN, NF: Rectangulum verò iſtud ſub XN, NF, eſt ſpatium parallelogrammum XF: & ſic de omnibus alijs rectis eductis ab linea curua ſectionis DFE ad diametrum FG, parallelis rectæ DGE. Probauimus igitur propoſitum; hoc eſt, quod recta linea MN, poſſit ſpatium XF, quod lineæ rectæ FL adiacet, obtinens latitudinem FN, excedenſque figura LX ſimili illi figuræ FI, quæ ſub HF, FL, continetur. Appelletur autem, vt Apollonius vult, dicta ſectio DFE, Hyperbole; & linea FL prædicta, linea iuxta quam poſſunt rectæ lineæ ab punctis lineæ curuæ dictæ ſectionis DFE, applicantur ad diametrum FG, parallelæ ipſi DGE prædictæ.

Alia demonſtratio breuior, ſuppoſita tamen prædicta ſuppoſitione & apparatu, & alijs lemmatibus citandis. Quandoquidem recta RNS eſt poſita parallela rectæ BGC in plano eodem trianguli BAC per axem; & recta MN parallela rectæ DGE, in plano ſecundo ſecante, ſeu in plano ſectionis DFE; per prop. 10. lib. 11. elem. anguli quos efficiunt binæ rectæ lineæ prædictæ, erunt æquales, videlicet anguli in G & N; ſed vnus illorum videlicet BGD eſt rectus ex datis, ergo alter RNM erit etiam rectus; & per prop. 15. lib. cit. 11. elem. planum applicatum rectis RNS, MN, erit parallelum plano circularis baſeos coni in quo recipiuntur aliæ duæ rectæ lineæ BGC, DGE: ergo per prop. 3. ſi concipiatur ſectus conus plano per rectas prædictas RNS, MN, incedente; ſectio reſultabit circulus RMS, cuius centrum erit in axe coni, ideoque in plano trianguli BAC per axem eiuſdem coni; &

per

per coroll. nost.1. ad prop.3. recta RNS erit diameter dicti circuli RMS. Et quia ostendimus rectam MN eductam ex puncto M circumferentiæ dicti circuli, efficere angulum rectum in N cum RS diametro eiusdem circuli; erit per 10. def. lib.1. elem. perpendicularis ipsi RNS diametro: quare per lemma 47. quadratum rectæ MN, erit æquale rectangulo sub RN, NS. Sed & per lemma 35. rectangulum sub XN, NF, est æquale rectangulo sub RN, NS; ergo per 1. ax. lib.1. elem. quadratum rectæ MN, erit æquale rectangulo sub XN, NF. Sed etiam per lemma 45. rectangulum XF, seu NP, sub XN, NF, est applicatum rectæ LF, latitudinem habens FN, excedensque figura XL simili & similiter posita ei FI, sub rectis HF, FL. Igitur propositum erit demonstratum. & sic de alijs omnibus rectis huiusmodi parallelis ipsi DG ab sectione ad diametrum eius FG applicatis, demonstrabitur idem quod de recta MN.

COROLL. NOSTRVM I.

Diameter FG commemorata in hac propositione, Hyperboles; est axis eius, iuxta conditiones coroll. nostri 5. ad prop. 7.

NAm quia rectas omnes lineas ex punctis lineæ curuæ hyperboles DFE ductas parallelas ipsi DGE, & accommodatas intra ipsam hyperbolam DFE, secat bifariàm ipsa FG diameter, per prop.7. & probabimus ex coroll. cit. in recta MN, exempli gratiâ, (nam de reliquis alijs idem ex demonstratione allata concluditur) quod sit ad angulos rectos ipsi diametro FG: erit per defin. 17. ipsa FG, axis hyperboles DFE.

COROLL. NOSTRVM II.

Prædicta diameter FG, rectè vocabitur diameter primaria seu originaria hyperboles DFE.

NAm dùm sit in cono dicta hyperbola DFE, per planum secundum secans conum, & triangulum. BAC per axem eius, applicatumque secundum prædictam rectam DGE; resultat pro sectione communi dicta recta FG, duorum planorum, vnius secantis secundi, alterius verò dicti trianguli per axem, iuxta prop. 3. lib. 11. elem. quæ recta FG per corollar.1. ad propos. 7. est diameter sectionis DFE; ideo rectè prædicta diameter FG dicetur primaria & originaria hyperboles DFE.

COROLL. NOSTRVM III.

Ex hac propositione colligemus duas definitiones. Primam hyperboles. Alteram lateris eius recti, (quæ est dicta recta FL) quas reponemus in numero definitionum secundarum Apollonij, post prop. 16.

COROLL. NOSTRVM IV.

Hyperbola potest in infinitum augeri seu produci versus partes oppositas vertici eius.

CVm enim diameter eius FG originaria, quæ est sectio communis plani secundi efficientis hyperbolam, & trianguli BAC, per axem coni, concurrat ex datis in hac prop. cum latere AC producto in H, trianguli BAC per axem, vltra verticem A: ipsa sectio DFE hyperbolica augebitur seu producetur in infinitum vltra D & E, ad partes oppositas vertici eius A, per prop.8.

COROLL. NOSTRVM V.

Dato triangulo BAC per axem coni, & diametro Hyperboles originaria FG, quæ sit sectio communis trianguli per axem prædicti, & plani secundi secantis, & efficientis ipsam Hyperbolen: latus eius rectum, seu rectam lineam iuxta quam possunt rectæ lineæ ab punctis circumferentiæ hyperboles ad diametrum eius applicatæ parallelæ rectæ ipsi DGE, reperire.

APparatus. Producto latere CA vltra A verticem, & diametro FG producta vltra F, concurrent ex datis in hac prop.12. in H. Iam verò per prop.31. lib.1. elem. ex A vertice agatur recta AK parallela ipsi FG, quæ per prop. 11. Procli secabitur in K ab base BC trianguli BAC: fiatque per lemma 6. vt quadratum rectæ AK ad rectangulum sub BK, KC, ita recta HF ad aliam FL; cui per prop.11. lib.1. & 3. lib. eiusdem, æqualis ponenda erit ad rectos angulos ipsi FG, ex eius puncto F, ad vnam eius partem. Dico hanc rectam FL esse quæsitum latus rectum Hyperboles datæ DFE.

Demonstratio petenda est ex dictis in demonstratione huius propositionis 12. præsentis.

COROLL. NOSTRVM VI.

Data Hyperboles DFE, latus rectum reperire; ex data eius diametro FG originaria; & triangulo BAC per axem coni; & recta DGE, quæ sit sectio communis secundi plani efficientis hyperbolen datam, & circularis baseos coni.

HÆc praxis alia est ab illa tradita in coroll. præced.5. Apparatus. Per prop.31. lib.1. elem. ex puncto aliquo puta M, lineæ curuæ hyperboliæ DFE, alio ab F vertice, agatur recta linea MN applicata ad diametrum FG originariam, parallela DGE: & per propos.11. lib.6. elem. duabus datis rectis, prima FN, secunda MN, reperiatur recta FP proportionalis tertia, ponenda per prop. 11. & 3. lib.

lib. 1. elem. ad angulos rectos ipsi FG, ex eius puncto F, ad vnam partem: perficiaturque rectangulum PFNX, per 1. lem. ad lib. 2. elem. sub rectis FN, FP. Tùm productis CA, GF rectis, vltra A & F, quæ iuxta hanc prop. 12. concurrent in H puncto, ex quo transmittatur recta HX secans obuiam rectam FP in L. Dico rectam FL, esse datæ hyperboles rectum latus.

Demonstratio. Cùm sint tres rectæ proportionales FN, NM, FP; erit per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ MN æquale rectangulo sub FN, FP. Iam verò si ab L puncto agatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea LO parallela rectæ FN, resultabit rectangulum PO, vel XL, simile rectangulo sub HF, FL, per coroll. nost. 2. ad prop. 24. lib. 6. elem. Igitur cùm rectangulum PFNX adiaceat rectæ FL, excedatque rectangulo XL simili rectangulo sub HF, FL, rectangulum OF, sub FN, LF, erit per hanc prop. 12. recta FL latus rectum datæ hyperboles DFE.

COROLL. NOSTRVM VII.

Data diametro FG originaria hyperboles DFE; & recta DGE quæ sit sectio communis circularis baseos coni, & plani secundi secantis conum, & efficientis ipsam hyperbolen; & latere recto FL, & rectâ FH quæ sit productio ipsius FG vltra F, concurrens in H cum latere CA trianguli BAC per axem coni secti: ipsam curuam lineam hyperboles in plano describere.

APparatus. Ex quolibet puncto rectæ FG puta N diuerso ab F, excitetur per prop. 11. lib. 1. elem. recta linea NX perpendicularis ipsi FG, sicuti & latus FL rectum ad partem L perpendiculare ipsi FG, ex puncto eius F, vnde per prop. 28. lib. 1. ele. erunt parallelæ rectæ NX, FL. Tùm ex puncto H per L transmittatur recta linea LH, producenda vltra L; hæc per prop. 11. Procli secabit obuiam NX in X: perficiaturque rectangulum sub FN, NX, per lem. 1. ad lib. 2. elem. Denique inter duas rectas FN, NX, reperiatur per prop. 13. lib. 6. elem. recta linea NM media proportionalis, applicanda per prop. 3. & 31. lib. 1. elem. ipsi FG, ex puncto eius N, parallela ipsi DGE. Dico quod linea curua hyperboles incessura sit per punctum M, rectæ NM: Quod si innumeræ huiusmodi rectæ lineæ reperiantur & constituantur ad instar rectæ NM, ex punctis rectæ FG, assero quod eadem curua linea hyperboles transitura sit per extrema earum puncta minimè sita in diametro FG.

Demonstratio in recta NM, applicanda erit omnibus alijs huiusmodi prædictis rectis lineis. Si non ita fit vti proponimus & asserimus: Incedat si fieri possit linea curua hyperboles per aliquod punctum ex intermedijs rectæ NM, vel vltra punctum M, producendo vltra M ipsam NM; nihilominus cùm tres rectæ lineæ sint proportionales FN, NM, NX, quadratum rectæ NM erit æquale rectangulo sub FN, NX per prop. 17. lib. 6. elem. & eidem rectangulo erit per istam prop. 12. æquale quadratum rectæ maioris vel minoris recta NM; vnde per ax. 1. lib. 1. elem. quadratum rectæ NM, & quadratum rectæ maioris vel minoris recta NM, erunt æqualia: ergo per prop. 16. Procli ipsæ rectæ NM, & maior vel minor ipsa NM, erunt æquales contra 8. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum condemnat falsitatis positionem aduersarij introductam: igitur linea curua hyperboles incedet per punctum M extremum rectæ NM; ideoque etiam per extrema alia prædicta. Et sic descripta erit hyperbola in plano vti proposuimus.

COROLL. NOSTRVM VIII.

Omnis recta linea ex punctis lineæ curua hyperboles ad diametrum eius originariam FG, parallela rectæ DGE communi sectioni plani secundi efficientis hyperbolen, & circularis baseos coni secti: est media proportionalis inter latera rectanguli, cuius mentionem fecimus in præcedente corollario 7. exempli gratia recta MN est media proportionalis inter latera FN, NX, rectanguli sub FN, NX.

HOc enim manifestum est ex demonstratione allata in ipsum citatum corollarium septimum.

COROLL. NOSTRVM IX.

Rectè Hyperbole dicitur ab græco nomine ὑπερβολὴ, quod excessum significat.

QVia quadrata rectarum applicatarum ad diametrum eius originariam FG, ex punctis lineæ curuæ ipsius hyperboles, parallelarum rectæ DGE quæ sit communis sectio plani secundi secantis conum & efficientis ipsam hyperbolen, tùm plani circularis baseos dicti coni, sunt æqualia rectangulis applicatis ad latus rectum ipsius hyperboles, excedentibus alijs rectangulis similibus ei rectangulo quod sub latere hyperboles recto, & sub recta linea angulo extra triangulum per axem coni subtensa; vti demonstrauimus in præsenti propositione 12. Quare hæc sectio hyperbolica distinguitur ab præcedente parabolica appositè nominibus: nam in præcedente fit comparatio quadratorum cum rectangulis, quæque cùm sit adæquata in genere æqualitatis, absolutè ipsa vocata est ab Apollonio, comparatio, seu Parabola; in præsente verò sectione quia comparando dicta quadrata cum proprijs rectangulis, reperitur excessus in rectangulis, ideoque nuncupata est ab Authore comparatio cum excessu, seu Hyperbola.

COROL-

COROLL. NOSTRVM X.

Rectè linea recta iuxta quam possunt applicata ad diametrum hyperboles ex punctis circumferentiæ eius curuæ, vocatur Rectum latus; & diameter, ad quam applicantur dictæ rectæ parallelæ cuidam alteri, dicitur Transuersum latus ipsius hyperboles, seu diameter transuersa.

NAm illa recta linea ex apparatu & demonstratione huius propos. 12. applicatur ad angulos rectos seu perpendicularis diametro, estque latus vnum rectanguli facientis ad demonstrationem, ergo bene rectum latus appellatur. Diameter verò ad quam applicatur dictum latus rectum, quia transuersim incedit intra ipsam hyperbolam, appositè etiam transuersum latus dicitur, & eo quod sit etiam rectanguli vnius facientis ad demonstrationem, vna sua portione latus.

COROLL. NOSTRVM XI.

Infinitæ sunt aliæ diametri in Hyperbola diuersæ ab eius originaria, se mutuo secantes in puncto quod, extra aream & lineam curuam hyperboles situm est; admittentes sua propria latera recta.

HOc corollarium nostrum vltimum sit veluti præmonitio ad sequentes propositiones huius libri & aliorum de conicis Apollonij. quæ omnia suis proprijs locis ostendemus.

COROLL. NOSTRVM XII.

Diameter originaria Hyperboles extendi potest in infinitum intra locum ipsius Hyperboles, ad partes contrarias vertici eius, & nunquam alteri puncto lineæ curuæ eius occurret distincto ab vertice proprio, ipsamque secabit in hoc puncto.

CVm enim ex hac propositione diameter originaria secet ambo latera trianguli per axem continentia angulum verticis, vnum non productum, alterum productum vltra verticem; necessariò pro coroll. nost. ad prop. 8. manifesta sunt proposita; Hyperbola enim est sectio de qua sermo est in prop. cit. 8.

PROPOSITIO XIII.

Si conus plano per axem secetur; & secetur altero plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque basi æquidistet, neque subcontrariè ponatur: Planum autem in quo est basis coni, & secans planum conueniant secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur. Recta linea quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni planorum vsque ad diametrum sectionis, poterit spatium adiacens lineæ, ad quam sectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ diametro æquidistantis à vertice coni vsque ad trianguli basim ductæ, habet ad rectangulum contentum basis partibus, quæ inter ipsam & rectas trianguli lineas interijciuntur; latitudinem habens quæ ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis; deficiensque figura simili & similiter posita ei, quæ diametro & linea iuxta quam possunt, continetur. Dicatur autem huiusmodi sectio Ellipsis seu defectus.

SVppositio, & apparatus 1. pars Conus verticem A habens, sectus sit primo plano per axem eius, vnde per 3. prop. resultet triangulum BAC per axem, basim habens BC, diametrum circularis baseos BQC coni secti, iuxta coroll. nost. 1. ad cit. prop. 3. sectusque sit idem conus altero secundo plano secante ambo AB, AC, latera dicti trianguli, minimè parallelo basi circulari BQC, & non subcontrariè posito; applicato tamen rectæ lineæ FG perpendiculari rectæ lineæ BC, in G, quæ est dicti trianguli basis, siue productæ vltra C, vel non productæ: sitque recta EDG sectio communis huius secundi plani secantis & plani trianguli per axem, iuxta prop. 3. lib. 11. elem. Resultet verò in cono, sectio resultans per hoc secundum planum, ELD, habens lineam curuam ELD in superficie coni, iuxta lem. 3. Erit recta ED per cor. 1. ad prop. 7. diameter dictæ sectionis ELD. Tùm ab E extremo puncto diametri ED, ducta sit recta

 LH,

lela recta PM, ipsi BG; erunt triangula BEG, PEM per idem lemma æquiangula: Cùmque etiam in triangulo BAK sit recta EG parallela lateri AK, erunt per idem lemma cit. triangula BAK, BEG æquiangula: & quia ostendimus triangula PEM, BAK esse æquiangula triangulo BEG, erunt per proposf. 21. lib. 6. elem. similia triangula PEM, BAK, & per def. 1. lib. eiusdem 6. æquiangula: Sed etiam quia in triangulo EDH, est parallela recta MX basi EH, erunt triangula EDH, MDX æquiangula per idem lem. 50. Igitur per ipsum lemma 50. & prop. 11. lib. 5. elem. & lemma 7. recte attendendo ad commemorata triangula æquiangula, erit vt AK ad KB, ita EG ad GB, hoc est EM, ad MP; & vt AK ad KC, sic DG ad GC, id est DM ad MR: Erit ergo proportio DE ad EH, composita ex proportione EM ad MP, & ex proportione DM ad MR: Sed composita proportio ex proportione EM ad MP, & DM ad MR, est per prop. 23. lib. 6. elem. illa rectanguli sub EM, MD, ad rectangulum sub PM, MR: igitur per lem. 7. cit. erit vt rectangulum sub EM, MD, ad rectangulum sub PM, MR, ita DE ad EH, scilicet DM ad MX: Sed vt DM ad MX, sumendo pro altitudine communi rectam ME, ita rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub XM, ME, per 1. prop. lib. 6. elem. ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub PM, MR, ita erit rectangulum sub DM, ME, ad rectangulum sub XM, ME: Quare per prop. 9. lib. 5. elem. rectangulum sub PM, MR, erit æquale rectangulo sub XM ME: ostendimus autem rectangulum sub PM, MR, æquale esse quadrato rectæ LM; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum sub XM, ME, æquale erit quadrato rectæ LM. Atque ita demonstrauerimus propositum, videlicet quod recta LM possit spatium MO, adiacens lineæ EH, latitudinem habens EM, deficiensque figura ON simili ipsi similiterque posita ipsi SE, quæ sub DE, EH, continetur. Et sic de omnibus alijs rectis huiusmodi, instar rectæ LM simili apparatu & discursu facto concludemus propositum.

Alia demonstratio breuior suppositis eisdem apparatibus præcedentibus, quæ dependet ex nonnullis lemmatibus citandis. Posuimus rectam PR parallelam ipsi BC, & rectam LM parallelam ipsi FG, & in diuersis existunt planis binæ sumptæ prout debent; angulos ergo PML, BGF, continebunt æquales per prop. 10. lib. 11. elem. inter quos cùm sit positus rectus angulus BGF, alter etiam PML rectus erit: sed & per prop. 15. lib. eiusdem 11. element. planum applicatum rectis PMR, LM, parallelum erit plano circulari BQC, in quo existunt producto vel non producto duæ aliæ lineæ rectæ BCG, FG. Ergo si concipiamus conum datum secari plano per rectas PMR, LM, applicato, resultabit pro sectione circulus PLR per prop. 4. cuius diameter erit recta PMR per coroll. nost. 1. ad prop. 3. Et quia ad hanc diametrum PR est ostensa ad angulos rectos recta LM, descendens ex puncto L circumferentiæ dicti circuli; erit per lemma 47. quadratum rectæ LM æquale rectangulo sub PM, MR: est autem per lemma 42. rectangulum MO, sub rectis XM, ME, æquale rectangulo sub PM, MR; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. quadratum rectæ LM æquale erit rectangulo MO, sub rectis XM, ME. Sed per lemma 44. rectangulum MO, sub XM, ME, adiacet rectæ EH, deficitque parallelogrammo NO simili similiterque posito ipsi SE, quod continetur sub DE, EH. Probauerimus ergo intentum circa lineam rectam LM. & sic de alijs omnibus huiusmodi rectis philosophandum erit.

COROLL. NOSTRVM I.

Dato BAC triangulo per axem coni, & recta ED diametro Ellipseos quæ sit sectio communis dicti trianguli per axem; & plani secundi efficientis ellipsim, applicati secundum rectam FG in plano baseos circularis BQG producto vel non producto, perpendicularem in CG ad BC basim dicti trianguli productam vel non productam. Reperire rectum latus EH, vel rectam secundum quam possunt rectæ in ellipsi ductæ ab punctis circumferentiæ ellipseos deductæ ad diametram eius ED, æquidistantes ipsi FG.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. elem. Ex A vertice trianguli BAC, agatur recta linea AK parallela ipsi EDG, donec occurrat per prop. 11. Procli, in K, rectæ BC productæ vltra C: & per lemma 6. fiat vt quadratum rectæ AK ad rectangulum sub BK, KC, ita recta DE ad aliam rectam, cui abscindatur per prop 3. lib. 1. elem. æqualis EH, de perpendiculari ipsi DE constituenda ab eius puncto E versus vnam partem, iuxta prop. 11. lib. 1. element. Hæc recta EH, erit rectum latus ellipseos, seu linea iuxta quam possunt commemoratæ lineæ rectæ.

Non alia demonstratione opus est, quàm ea quam attulimus in demonstratione præcedente primâ huius propositionis 13.

COROLL. NOSTRVM II.

Ex hac propositione colliguntur duæ definitiones. Prima ellipseos, altera lateris eius recti seu lineæ iuxta quam possunt lineæ rectæ in ellipsi applicatæ ad eius diametrum parallelæ cuidam rectæ facienti ad eius effectionem iuxta hanc proposit. 13.

Verùm has duas referemus inter alias nostras additas ad definitiones secundas Authoris in hoc libro, post propositionem 16.

COROL-

COROLL. NOSTRVM III.

Ab Apollonio rectè vocatur, sectio ista conica iuxta hanc prop. 13. ellipsis seu defectus.

QVia rectæ lineæ ab eius circumferentia ductæ & applicatæ ad eius diametrum quæ est sectio communis plani secundi secantis conum & eam efficientis, & trianguli per axem coni, parallelæ ipsi rectæ in plano circularis baseos, positæ perpendicularis ad basim dicti trianguli, ac dirigentis sectionem faciendam ellipticam; possunt spatia rectangula applicata ad eius latus rectum, contenta sub portione lateris prædicti recti, & portione dictæ diametri inter ipsas rectas & latus rectum, deficientia rectangulis similibus ei quod sub eadem dicta diametro, & latere recto continetur. Atque cùm in hac comparatione quadratorum & rectangulorum reperiatur defectus aliquis, in hac sectione conica; propterea appositè ab Apollonio dicta est hæc sectio conica, Ellipsis seu defectus, ad distinctionem aliarum sectionum parabolicæ & hyperbolicæ. Nonnulli existimant dici hanc sectionem ellipsim seu defectum, eò quòd sit similis figuræ repræsentatę in circulo spectato obliquè, sitque defectus ab circulo in ratione repræsentationis illius oculo ipsi.

COROLL. NOSTRVM IV.

Data diametro DE, & latere recto EH, ellipseos, commemoratis in coroll. 1. delineare ipsam ellipsim in plano.

APparatus. Ad diametrum ED datam, fit per prop. 11. lib. 1. elem. ad angulos rectos constitutum rectum latus EH datum, ex eius extremo puncto E; ductáque recta HD: tùm ex puncto quolibet ex intermedijs diametri ED, puta M, erecta MX alia recta linea perpendicularis ipsi DE, versus partes EH, quæ erit per prop. 28. lib. 1. elem. parallela ipsi EH, & secabitur in X ab recta HD, per prop. 11. Procli. Tùm per prop. 13. lib. 6. elem. reperiatur media ML recta linea proportionalis, inter duas datas EM, & MX, cui de recta MX detrahenda erit ML, ipsi ML inuentæ, idque per prop. 3. lib. 1. elem. Dico circumferentiam ellipseos transituram per punctum L; & sic de omnibus alijs extremis innumerarum rectarum linearum simili modo ducendarum, vti posuimus ML; tum per extrema E & D, diametri datæ. Et sic describendam ellipsim in plano ex datis.

Demonstratio. Nam per propos. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ ML erit æquale rectangulo sub EM, MX, quod erit applicatum ad rectam EH, deficiente figura XH, simili rectangulo sub ED, EH, vti demonstratum est: ergo circumferentia ellipseos transibit per punctum L, iuxta hanc prop. Si enim non transeat per dictum punctum L, incedat si fieri potest per punctum aliud ab L, rectæ ML productæ vel non productæ: tunc per hanc prop. quadratum rectæ maioris vel minoris recta ML, erit æquale rectangulo prædicto sub EM, MX, cui ostendimus esse æquale quadratum rectæ ML: quare per 1. ax. lib. 1. elem. quadrata ista erunt æqualia; & ideo per prop. 16. lib. Procli latera dictorum quadratorum erunt æqualia, videlicet recta ML, & alia recta maior vel minor ipsa, contra 8. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum indicat esse falsam illam positionem, ideoque verum erit propositum.

COROLL. NOSTRVM V.

Aliter reperire latus rectum ellipseos data seu rectam lineam iuxta quam possunt recta linea commemorata in hac propositione 13. ex eius diametro ED de qua fit mentio in hac prop.

APparatus. In ellipsi ducatur recta quæcumque LM, ex quocumque puncto puta L circumferentiæ illius ad diametrum ED perpendicularis per prop. 12. lib. 1. elem. Tùm per propos. 11. lib. 6. elem. datis duabus rectis hoc ordine EM, ML, reperiatur tertia proportionalis MX; cui per 3. propos. lib. 1. elem. detrahatur recta MX æqualis, de recta ML producta vel non producta: Præterea recta DX transmittatur. Denique ex puncto E extremo diametri ED, constituatur per prop. 11. lib. 1. elem, recta EH perpendicularis ipsi ED ad partes rectæ MX: erunt per prop. 28. lib. 1. elem. parallelæ rectæ lineæ MX, EH; vnde per 11. prop. Procli recta DX producenda vltra X, secabit in H rectam EH prædictam. Dico autem hanc rectam EH esse latus rectum datæ ellipseos.

Demonstratio. Cùm enim sit in triangulo DEH, recta MX parallela lateri EH; erit per lemma 50. vt DM ad MX, sic DE ad EH latus rectum; ipsa recta erit EH latus rectum, ex dictis in demonstratione huius propositionis.

COROLL. NOSTRVM VI.

Diameter prædicta ED, est diameter originaria seu primaria ellipseos huius propositionis, productaque si opus sit secabit in G rectam BC basim productam vel non productam trianguli BAC per axem.

QVod sit ED diameter originaria seu primaria ellipseos huius prop. 13. patet ex eius effectione: reliqua verò manifesta sunt ex dictis in apparatibus & demonstratione propositionis.

CORQL-

COROLL. NOSTRVM VII.

Primaria seu originaria diameter ED, ellipseos in omni cono secto primùm plano per axem recto ad basim suam circularem: Est axis ellipseos.

NAm per corollarium 2. ad prop. 7. secabit omnes rectas lineas in ellipsi accommodatas, parallelasque rectæ FG, non solùm bifariàm quia diameter, per def. 10. sed etiam ad angulos rectos; ergo per def. 18. ipsa ED diameter erit axis ellipseos.

COROLL. NOSTRVM VIII.

Apposità recta EH, dicitur rectum latus ellipseos; & altera recta ED diameter, transuersum latus eiusdem.

PRimum quia constituitur EH per apparatum ad angulos rectos ipsi ED diametro. Altera verò ED, quia transuersim acta est per ellipsim intra ipsam penetrans.

COROLL. NOSTRVM IX.

Infinitæ sunt aliæ diametri in ellipsi diuersæ ab originaria ED: tùm etiam alia recta latera diuersa ab EH.

HÆc præmoneo tantum, postmodum in sequentibus declaranda & demonstranda.

COROLL. NOSTRVM X.

Centrum sibi vendicat ellipsis, in quo diametri omnes illius se mutuò intersecant bifariam.

HOc etiam præmitto, postea fusius declarandum, & cum Apollonio demonstrandum in prop. 30.

COROLL. NOSTRVM XI.

Si diameter originaria ED, ellipseos, secet basim BC, trianguli per axem BAC, non productam, circumferentia ellipseos non erit integra, sed perfici poterit.

TVnc enim quia plano secundo secante conum & efficiente ellipsim, secatur basis coni non producta, resultat per coroll. nost. 2. ad lemma 4. pro sectione coni figura plana terminata ex vna parte linea curua, & ex altera parte, linea recta, quæ recta non est de natura ellipseos quæ tota curua est; circumferentia ellipseos erit imperfecta. Perfici tamen poterit producendo superficiem conicam iuxta def. 1. protrahendo etiam diametrum ED, quæ per istam prop. 13. secare debet ambo latera AC, AB, trianguli ABC per axem coni; & producta etiam secare debet basim BC dicti trianguli productam; atque ita per coroll. 3. ad cit. lem. 4. exurget linea curua spatium concludens, & per istam prop. 13. erit ellipsis perfecta.

COROLL. NOSTRVM XII.

Si diameter ED originaria ellipseos, attigerit in extremo vno, puta C, basim BC, trianguli BAC per axem coni; vel secuerit ipsam productam, puta in O. circumferentia ellipseos erit integra.

SEcundum quod proposuimus patet in figura & demonstratione propositionis. Primum autem sic explicatur ope corollarij nostri 4. ad lemma 3. Nam in hoc casu planum secundum secans & efficiens ellipsim, supra se habet imminentem totam superficiem conicam versus verticem, ita vt cum ea solidum constituat; ergo per cit. coroll. sectio resultans in superficie conica erit linea curua spatium se sola comprehendens, ideoque perfecta: ellipsis verò est per hanc prop. præsentem.

COROLL. NOSTRVM XIII.

Ellipsis, figura plana est vnica linea curua spatium se sola continens, vel comprehensiua.

QVod sit plana superficies, patet ex eo quod in plano secundo secante & illam efficiente, recipiatur: continens quidem spatium se sola, dum planum secat basim coni productam, per coroll. nost. 3. ad lem. 4. vel eius diameter ED attingit basim BC, trianguli BAC per axem in extremo eius puncto, per coroll. nost. præced. 12. Comprehensiua verò si planum dictum secundum producatur in infinitum, vnà cum superficie conica; vel quod idem est si diameter ellipseos originaria producatur versus basim, & superficies ipsa conica: tunc enim per coroll. nost. 11. linea curua ellipseos perfici poterit.

COROLL. NOSTRVM XIV.

Tot sunt latera recta in ellipsi, quot sunt diametri eius.

HOc præmoneo vltimò corollarij loco, quod in decursu commentarij multis in locis manifestum fiet.

COROLL. NOSTRVM XV.

Recta linea qualibet vt LM, ordinatim applicata diametro ED ellipseos, est media proportionalis inter EM portionem diametri terminatam ipsa recta LM, & vertice E ad partes lateris recti EH, & partem EO lateris recti EH.

Nam

NAm demonſtratum eſt quadratum rectæ LM, eſſe æquale rectangulo MO, ſub ME, EO: quare per prop. 17. lib. 6. elem. recta LM erit media proportionalis inter rectas ME, EO. & ſic de alijs huiuſmodi rectis ordinatim applicatis ad diametrum ellipſeos.

COROLL. NOSTRVM XVI.

Nullum latus rectum in Ellipſi eſt æquale tranſuerſo ſuo lateri proprio originario, quod ſit Axis eius.

APparatus, pro demonſtratione conſideretur ellipſis procreata iuxta hanc propoſitionem ab ſectione coni, & conſulatur figuratio huius propoſitionis; in qua ex datis & apparatibus, & demonſtratis, eſt triangulum BAC per axem coni, baſis BC; Axis ellipſeos recta ED; ipſa ellipſis ELD, in cuius plano rectæ omnes parallelæ ipſi FG, ſectæ bifariàm ſint ab dicto axe ED ad angulos rectos; & recta AK deducta ab vertice A parallela ipſi diametro ED, in plano trianguli BAC, occurrat in K, rectæ BC productæ vltra C.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit Axis ED, ellipſeos ſit æqualis recto ſuo lateri EH. deducam aduerſarium, vt ex poſitione ſua & demonſtratis, neget ellipſim admiſſam, & circulum eſſe fateatur; hoc eſt, admittat eandem figuram ELD, eſſe ellipſim, & circulum; quod fieri nequit, eò quòd ſpecie diſtinguantur.

Per hanc prop. 13. Tranſuerſum latus ED, ellipſeos eſt ad rectum ſuum latus EH, ſicut quadratum rectæ AK, ad rectangulum ſub BK, KC: Aduerſarius introducit primam quantitatem eſſe æqualem ſecundæ, hoc eſt tranſuerſum latus quod ſit axis ED eſſe æquale recto lateri EH; ergo per coroll. noſt. ad prop. 14. lib. 5. elem. quadratum rectæ AK erit æquale rectangulo ſub BK, KC: igitur per prop. 17. lib. 6. elem. erunt tres rectæ proportionales hoc ordine BK, KA, KC; hoc eſt erit BK ad KA, ſicut KA ad KC: ergo per prop. 6. lib. 6. elem. in triangulis BAK, ACK, erunt anguli BAK, ACK, ſuppoſiti lateribus homologis BK, AK, æquales. Sunt autem per prop. 29. lib. 1. elem. anguli EAK, AED, duobus rectis æquales; tùm etiam per prop. 13. lib. eiuſdem 1. elem. duo ſimul anguli deinceps ad C, æquales duobus rectis; & duo recti anguli ſunt æquales duobus angulis rectis, per 11. ax. eiuſdem lib. 1. elem. Igitur ſi ab illis æqualibus, ſubtrahamus æquales angulos oſtenſos EAK, ACK, relinquentur per 3. ax. lib. cit. anguli æquales AED, ACB, ſubcontrariè poſiti. Triangulis autem EAD, BAC, cùm ſit communis angulus BAC, & oſtenderimus angulos habere æquales AED, ACB; eorum reliqui anguli ADE, ABC, erunt æquales per coroll. noſt. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. triangula ergo EAD, BAC, erunt ſubcontrariè poſita ex dictis in prop. 5. Planum autem ſecundum efficiens ellipſim ELD admiſſam, detrahit de triangulo BAC per axem, triangulum EAD æquiangulum ipſi BAC ex parte verticis A, ideóque per 4. propoſ. & def. 1. lib. 6. elem. ſimile ipſi triangulo BAC: ergo per ipſam prop. 5. ſectio ELD admiſſa ellipſis, erit circulus, quæ conſecutio cùm deducatur ex poſitione aduerſarij, ipſa falſa erit, ideóque verum corollarium noſtrum.

PROPOSITIO XIV.

Si ſuperficies quæ ad verticem ſunt, plano non per verticem ſecentur: erit in vtraque ſuperficierum ſectio, quæ vocatur Hyperbole; & duarum ſectionum erit eadem diameter. Lineæ verò iuxta quas poſſunt applicatæ ad diametrum, æquidiſtantes ei quæ eſt in baſi, inter ſe æquales erunt. Et figuræ tranſuerſum latus vtriſque commune, quod ſcilicet inter ſectionum vertices interijcitur. Vocentur autem huiuſmodi ſectiones, oppoſitæ.

SVppoſitio. Ad verticem A, ſint duæ ſuperficies conicæ. vnam efficientes iuxta def. 1. quæ duæ ſuperficies ſectæ ſint plano non per verticem A, ſectiones efficiente, duas diuerſas in dictis ſuperficiebus conicis, vnam ſectionem DEF in vna ſuperficierum, alteram verò ſectionem GHK in altera ſuperficie conica; quæ ſectiones in ſuperficiebus prædictis erunt ſingulæ, lineæ curuæ, per lemma 3. Dico vtramque ſectionum DEF, GHK, eſſe hyperbolen, eiſque eſſe communem diametrum originariam; tùm latera recta ſeu lineas iuxta quas poſſunt rectæ lineæ applicatæ ad prædictam diametrum communem, eſſe æqualia inter ſe; tum vtriſque ſectionibus eſſe commune latus tranſuerſum, quod ſcilicet inter ſectionum vertices ſitum eſt: & appoſitè vocari has duas ſectiones, ſeu duas hyperbolas DEF, GHK, ſectiones oppoſitas.

Apparatus. Sit circulus BCDF, circa cuius circumferentiam lata, recta linea, ſuperficies duas datas conicas, vnicam componentes, efficiat iuxta def. 1. ſitq; dicti circuli centrũ L. Planum verò parallelum dicto circulo BCDF, in ſuperiore ſuperficie, vel altera conica minimè terminata circulo prædicto, applicetur, inquam,

quam, planum parallelum dicto circulo, secans dictam superficiem alteram conicam; resultabit pro sectione circulus XGOK per 4. prop. centrum Y habens in axe LA producto vltra verticem A; nam per def. 3. axis est communis ambabus dictis superficiebus compositis citra communem A verticem; & ostendimus in def. 6. axem coni esse axem superficiei eius conicæ: igitur cùm resultent coni contrapositi in communi A vertice, vnam superficiem modo explicato in defin. 1. communem habentes, axis horum conorum erit vnus, quare per defin. cit. 6. axis LA productus coni vnius, vltra A, incidet in centrum Y baseos circularis alterius coni resultantis prædicti. Horum verò duorum circulorum BDCF, XGOK, & plani prædicti seu dati secantis ambas superficies conicas datas non per verticem A communem, sectiones erunt duæ rectæ lineæ DF, GK, parallelæ per prop. 16. lib. 11. elem. vna in vno circulo ex prædictis parallelis, altera in alio; quæ etiam erunt bases dictarum sectionum DEF, GHK, seu cum illis claudent spatia plana particularia, quarum singula erunt mixta ex curua & recta lineis, iuxta coroll. 2. ad lemma 4. Prætetea per prop. 11. vel 12. lib. 1. elem. ab L centro circuli BDCF ponatur recta linea perpendicularis ipsi DF in M puncto illius, producenda donec fiat BLC diameter circuli prædicti. Insuper plano applicato per axem YAL, & rectam BLC, angulum efficientes in L, qui existet in vno plano per prop. 3. lib. 11. elem. concipiatur secta superficies data conica, vel duæ datæ, quod sectiones efficiat in ipsis superficiebus conicis, duo triangula BAC, XAO, per axem LAY, iuxta prop. 3. pro basibus habentia rectas BLC, XYO, diametros dictarum circularium basium, per nost. 1. coroll. ad prop. 3. cit. parallelasque per prop. 16. lib. 11. elem. Porrò rectæ XAC, OAB, erunt rectæ lineæ existentes in ipsa superficie conica data composita ex duabus, idque per 1. prop. Iam verò quia rectæ XO, GNK, sunt relatiuè ostensæ parallelæ alijs duabus rectis BC, DMF, existuntque in diuersis planis binæ circularium basium; ipsæ per prop. 10. lib. 11. elem. angulos æquales in N & M, continebunt; verùm per constructionem ipsam angulus in M est rectus, ergo etiam in N rectus erit. Et quia planum per axem secans datam superficiem conicam, vel duas prędictas, sectionum prædictarum DEF, GHK, basibus prædictis DF, GK, occurrit in punctis M, & N, disiunctiuè, ipsæque sectiones in infinitum augeri possunt per prop. 8. & earum lineæ curuæ existunt in superficiebus datis sectis quas secat hoc planum, secando planum ipsum dictas duas sectiones DEF, GHK, efficiens, illud secabit in vna linea recta per lem. 2. in qua existent quatuor puncta prædicta N, H, E, M, quæque sit sectio communis duorum illorum planorum, vnius quidem secantis conos datos duos per axem, alterius verò efficientis dictas sectiones conicas: si enim omnia ista puncta, vel aliquod illorum essent extra hanc rectam quæ est sectio communis dictorum duorum planorum, cùm sint in ambobus planis dictis, ducendo rectam vnientem quodlibet illorum, cum altero illorum vel cum quocumque in dicta sectionis communis recta linea; esset hæc recta per coroll. nost. 2. ad propos. 7. lib. 11. elem. in vtroque plano subiectiuè: ergo ex natura sectionis superficierum, cùm omne quod est commune superficiebus se mutuò secantibus, sit sectio communis illarum, vel de sectione communi; hæc recta cum alia non in directum iacente, esset sectio communis duorum dictorum planorum; & sic duo plana seu duæ superficies non se mutuo secarent in vna tantum recta linea, contra lem. 2. absurdum hoc indicat non posse adstrui prædicta quatuor puncta designata N, H, E, M, esse extra rectam lineam quæ sit sectio communis dictorum duorum planorum: Igitur prædicta quatuor puncta erunt in recta linea NHEM, quæ est sectio communis planorum, vnius quidem secantis conos per axem YAL, alterius verò efficientis dictas sectiones conicas DEF, GHK. Iam verò ex punctis H, E, per prop. 11. lib. 1. elem. erigantur rectæ lineæ HR, EP, perpendiculares ipsi rectæ HE: & per prop. 31. lib. cit. 1. elem. in plano vno triangulorum BAC, XAO, ab puncto A, agatur recta linea SAT parallela rectæ MEHN, quæ occurret per propos. 11. Procli rectæ XO in T, & rectæ BC in S, nisi concurrat cum axe YAL; resultabit parallelogrammum NTSM, ob parallelas rectas positas MEHN, SAT, & alias ostensas rectas XO, BC. Insuper per lemma 6. fiat vt quadratum super recta AS ad rectangulum sub BS, SC, sic HE ad EP; & per prop. 3. lib. 1. elem. de recta EP perpendiculari ipsi EH, detrahatur æqualis ipsi modo inuentæ EP, ex puncto E. Similiter faciendo per idem lem. 6. vt quadratum super recta AT ad rectangulum sub OT, TX, ita EH ad HR, sumatur per cit. prop. 3. lib. 1. elem. de recta HR perpendiculari ipsi rectæ HE, ex puncto H, æqualis ipsi HR modò inuentæ. Dico 1. ipsas sectiones duas conicas prædictas factasque DEF, GHK, esse singulas hyperbolas. 2. diametrum originariam habere communem, videlicet rectam MEHN. 3. rectas lineas RH, PE, esse eas iuxta quas possunt rectæ lineæ applicatæ ad diametrum MEHN in dictis sectionibus, æquidistantes rectis DMF, GNK, quæ sunt in basibus conorum; & æquales esse inter se prædictas rectas RH, PE. 4. vtrisque sectionibus prædictis latus esse transuersum EH commune. Vltimò appositè vocari ab Apollonio, huiusmodi sectiones duas DEF, GHK, sectiones oppositas.

Demonstratio. Quia conus BAC, verticem

F

cem habens A, basim verò circulum BDCF, sectus est plano primo per axem AL, resultauitque triangulum BAC per axem AL iuxta 3. prop. cuius basis BC est dicti circuli diameter per coroll. nost. 1. ad illam prop. sectusque est idem conus plano alio secundo secundum rectam lineam applicato DMF perpendicularem diametro BC, seu basi BC trianguli BAC per axem, efficiente in cono ipso sectionem DEF, & in plano trianguli prædicti, sectionem communem rectam EM, quæ erit per prop. 7. diameter dictæ sectionis conicæ DEF; quæ diameter ME producta vltra E verticem, quia secat latus CA productum dicti trianguli. vltra verticem A, in puncto H; tùm per A eundem verticem acta est in plano dicti trianguli recta linea AS parallela ipsi EM diametro dictæ sectionis DEF: tùm ex puncto E ducta est recta EP perpendicularis ipsi diametro ME, ad quam EP rectam, recta HE eandem habet rationem quam habet quadratum rectæ AS ad rectangulum sub BS, SC: erit per prop. 12. ipsa sectio DEF, hyperbola, eiusque latus rectum, seu linea iuxta quam possunt quæ in illa ad diametrum eius EM applicantur parallelæ rectæ ipsi DMF. Similiter quia conus XAO, verticem habens A, basim verò circulum XGOK, sectus est primo plano per axem eius AY, resultauitque per prop. 3. ex hac sectione triangulum XAO per axem, cuius basis XO est diameter circularis eius baseos, per corollar. nost. 1. ad illam propos. 3. sectusque est iterum idem conus plano alio secundo applicato rectę GNK perpendiculari ad basim dictam BC, efficiente in cono ipso sectionem GHK, & in plano trianguli prædicti per axem, sectionem communem, rectam lineam HN, quæ erit per propos. 7. diameter dictæ sectionis conicæ GHK; quæ diameter NH producta quia secat latus OA productum, dicti trianguli XAO, vltra verticem A, in puncto E; tùm per A verticem ducta est in plano dicti trianguli recta linea AT parallela diametro HN: tùm ex puncto H emissa est recta linea HR perpendicularis ipsi diametro NH; ad quam rectam HR, recta HE habet eandem rationem, quam habet quadratum rectæ AT ad rectangulum sub OT, TX; erit per prop. 12. dicta sectio GHK, hyperbola; eiusque latus rectum HR, seu recta linea iuxta quam possunt rectæ lineæ applicatæ ad diametrum HN parallelæ ipsi GNK. Insuper quia rectæ lineæ XO, BC, sunt parallelæ, erunt per lemma 50. triangula XAT, CAS, æquiangula; tum etiam alia duo triangula BAS, OTA: vnde erit per cit. lemma 50. vt AS ad SC, sic AT ad TX; & vt AS ad SB, sic AT, ad TO: sed per propos. 23. lib. 6. elem. proportio AS ad SC, simul cum proportione AS ad SB, est proportio quadrati rectæ AS ad rectangulum sub BS, SC; & proportio AT ad TX, simul cum proportione AT ad TO, est proportio quadrati rectæ AT ad rectangulum sub XT, TO: igitur per lem. 7. erit vt quadratum rectæ AS ad rectangulum sub BS, SC, ita quadratum rectæ AT ad rectangulum sub XT, TO. Verumtamen est quadratum rectæ AS ad rectangulum sub BS, SC, ita HE ad EP, per ipsum apparatum; tùm etiam vt quadratum rectæ AT ad rectangulum sub XT, TO, ita HE ad HR, per ipsum apparatum: ergo erit per prop. 11. lib. 5. elem. & lemma cit. 7. vt HE ad EP, ita HE ad HR. Igitur per prop. 9. lib. 5. elem. æquales erunt rectæ EP, & HR, quæ sunt rectæ iuxta quas possunt rectæ lineæ applicatæ in sectionibus prædictis conicis hyperbolicis, parallelæ rectis DMF, GNK. Et quia ostendimus duas rectas MEH, NHE, vnicam efficere lineam, seu esse in directum duas rectas ME, NH; vnamque efficere, si producantur, diametrum productam cuiuslibet dictarum hyperbolicarum sectionum DEF, GHN; ideo diameter ipsarum erit communis; quam quia vocauimus in coroll. nost. 10. ad prop. cit. 12. transuersum hyperboles latus, ex mente Apollonij; ideo etiam tota diameter prædicta transuersum latus harum sectionum oppositarum dici poterit; verùm Apollonius hoc loco præcisè rectam HE vocat latus transuersum, videlicet rectam inter vertices E, & H, dictarum sectionum sitam; alibi verò seu multis in locis vocauit totam rectam NM, latus transuersum sectionum huiusmodi oppositarum; tum etiam rectam HE productam intra aream vnius ex oppositis sectionibus verbi gratiâ DEF, appellabit transuersum latus hyperbolicæ sectionis DEF. Itaque latus transuersum hyperboles vnius, vel duarum oppositarum sectionum, potest dici diameter eius quatenus intra eius vel illarum aream est; vel quatenus extra eius vel earum aream sita est, producta. Transuersum verò latus sic denominatur, quia transuersim ingreditur, vel ingredi potest productum, aream ipsarum hyperbolarum; vel quia est vnum latus rectanguli cui similis est excessus rectangularis supra rectangulum cui æquale est quadratum rectæ applicatæ ad diametrum hyperboles ab aliquo puncto circumferentiæ eius, parallelæque rectæ lineæ basi trianguli per axem perpendicularis. Latus transuersum huiusmodi sumptum, quatenus situm est inter vertices sectionum oppositarum, vel inter conuexa ipsarum, vt recta linea EH, rectè dicitur commune ambabus sectionibus oppositis; nam ad reperienda latera recta EP, HR, ostensa æqualia dictarum sectionum oppositarum, fuit assumptum in apparatu. Denique duæ sectiones DFE, GHK, appellantur sectiones oppositæ; quia vertices oppositos habent, E, H; vel quia conuexa obtinent opposita; vel quia efficiuntur ab plano secante duas superficies oppositas conicas in vertice communi, sumptas

ptas secundum def. 1. Atque hæc sint satis circa demonstrationem huius propositionis 14.

COROLL. NOSTRVM I.

Duobus planis se mutuò secantibus; puncta omnia communia; existunt in recta linea quæ est communis eorum sectio iuxta prop. 3. lib. 11. elem.

HOc demonstratum à nobis est in apparatu; quando ostendimus quatuor puncta N, H, E, M, communia plano efficienti sectiones oppositas DEF, GHK, & plano sustinenti adæquatè duo triangula BAC, XAO, existere in recta linea NHEM, quæ est communis sectio illorum planorum se mutuo secantium.

COROLL. NOSTRVM II.

Ex hac propositione colligemus duas definitiones, Primam sectionum oppositarum. Alteram lateris recti, & lateris transuersi illarum.

SEd has definitiones duas reponemus in numero definitionum secundarum Authoris ad hunc librum.

COROLL. NOSTRVM III.

Infinita sunt diametri sectionum oppositarum diuersa ab originaria ipsarum NHEM, admittentes sua propria latera recta.

HÆc præmitto tantùm in præsentia, postmodum assignanda & declaranda passim in sequentibus.

COROLL. NOSTRVM IV.

Centrum opposita sectiones obtinent, extra areas ambarum, sed in loco inter vtrasque.

HOc etiam præmoneo, postea declarandum.

COROLL. NOSTRVM V.

Vnaquaque sectionum oppositarum potest in infinitum augeri, versus partes oppositas verticibus.

CVm enim sit vnaquæque illarum hyperbola per hanc propositionem; & hyperbola possit augeri in infinitum ex parte contraria vertici suo, per coroll. nost. 4. ad prop. 12. etiam vnaquæque sectionum oppositarum poterit augeri in infinitum ex parte opposita verticibus proprijs.

COROLL. NOSTRVM VI.

Diameter NHEM originaria sectionum oppositarum, est axis illarum, si planum secans per axem conos duos oppositos superficies duas conicas habentes effectas secundum def. 1. fuerit ad angulos rectos basibus circularibus parallelis conorum sectorum prædictorum.

QVandoquidem per hanc propositionem illa diameter assignata & originaria est communis sectionibus oppositis quæ sunt singulæ hyperbolæ; secatque etiam ex apparatu planum secundum eas efficiens, triangula per axem conorum communem, applicatum, inquam, illud planum secans rectis lineis perpendicularibus ad bases dictorum triangulorum per axem; daturque planum primum secans secare duos conos ad angulos rectos basibus dictorum conorum parallelis: erit per coroll. 1. ad prop. 7. ipsa recta NHEM diameter dictarum sectionum; & per coroll. secundum ad eandem 7. prop. secabit bifariàm & ad angulos rectos rectas omnes lineas in ipsis sectionibus applicatas diametro prædictæ & accommodatas æquidistantes rectis DMF, GNK; igitur per def. 18. erit axis dictarum sectionum oppositarum.

COROLL. NOSTRVM VII.

Dato latere transuerso HE, sectionum oppositarum DEF, GHK vna cum rectis DMF, GNK; & triangulis per axem BAC, XAO; latera earum recta reperire.

PRoducatur latus HE transuersum intra alterutram dictarum sectionum oppositarum, verbi gratiâ DEF; & per coroll. nost. 6. ad prop. 12. reperiatur latus rectum EP, sectionis DEF: Iam quia datur ei opposita XGK sectio, & per prop. præsentem latera illarum recta sunt æqualia; latus rectum inuentum hyperboles DEF, erit etiam latus rectum oppositæ XGK. atque ita fecerimus imperatum.

COROLL. NOSTRVM VIII.

Dato latere HE, transuerso quod sit pars axeos duarum oppositarum sectionum, & latere EP recto vnius: ipsas oppositas sectiones, vel alteram earum in plano describere.

SIngulæ seorsim per coroll. nost. 7. ad prop. 12. describi poterunt hyperbolæ in plano eodem, posito eodem seu communi latere transuerso HE, producto intra illarum aream, & dato latere recto vnius è dictis sectionibus, quod est æquale alterius lateri recto per hanc propositionem; educendo diuersas rectas lineas perpendiculares diametro transuersæ

producta; & reliqua præstando quæ imperauimus in praxi coroll. nostri 7. ad prop. 12. Atque ita fecerimus imperatum in hoc coroll. nostro 8.

COROLL. NOSTRVM IX.

Appositè dictæ duæ hyperbolæ in hac propositione, dicuntur ab Apollonio sectiones oppositæ.

NOn solùm quia vertices oppositos habēt, & conuexa earum sunt opposita: sed etiam dicuntur oppositæ hyperbolæ, quia nullæ aliæ sectiones oppositam sectionem huiusmodi pati possunt ex commemoratis sectionibus conicis, quarum termini in superficie curua conica existentes, lineæ curuæ sint. Non parabolæ, quia iuxta prop. 11. diameter originaria parabolæ debet esse parallela vni laterum trianguli per axem resultantis ex sectione coni per primum planum: quare illud latus productum vltra verticem intersecare non poterit, & vlterius transire, & incedere per interiora superficiei alterius conicæ contrapositæ ipsi sectæ, efficientem tamen vnam iuxta sensum definitionis primæ; quod requiritur ad sectiones oppositas secundum hanc prop. 14. vel etiam 12. ad vnam hyperbolam. Sed neque dici etiam possunt sectiones oppositæ, ellipses, neque circuli vllo modo: Non ellipses; nam per prop. 13. diameter originaria ellipseos debet intersecare actu, vel posse secare ambo latera trianguli per axem, à quibus, quantò magis extendetur etiam infinitum, semper magis ac magis recedet, quare nunquam cum alterutro latere producto vltra verticem, conueniet; quod requiritur ad naturam hyperboles in prop. 12. sed neque etiam circuli esse possunt, siue planum efficiens sit parallelum circulari basi coni, siue subcontrariè positum, iuxta prop. 4. vel 5. sic etenim etiam per citatas propositiones diametri illorum originariæ intersecare non poterunt laterum trianguli per axem, alterutrum productum vltra verticem, propter eandem rationem allatam in ellipsi. Sed neque etiam triangula esse possunt per axem resultantia; nullum enim latus transuersum commune obtiuent situm inter vertices, & infinita alia desunt pro sectionibus oppositis, nisi maximè impropriè. Denique vna sectionum oppositarum non potest esse hyperbola, & alia vel parabola, vel circulus, vel ellipsis, vel triangulum: nam præter alia multa non obtinebunt latus transuersum commune, quod tamen est de ratione sectionum oppositarum huius prop.

PROPOSITIO XV.

Si in ellipsi à puncto quod diametrum bifariàm diuidit, ordinatim ducta linea ex vtraque parte ad sectionem producatur; & fiat vt producta ad diametrum, ita diameter ad aliam lineam: Recta linea quæ à sectione ducitur ad productam, diametro æquidistans, poterit spatium adiacens tertiæ proportionali, latitudinem habens lineam quæ inter ipsam & sectionem interijcitur, deficiensque figura simili ei quæ continetur linea ad quam ducuntur, & ea iuxta quam possunt. Quod si vlteriùs producatur ad alteram sectionis partem, bifariàm secabitur ab ea ad quam fuerit applicata.

SVppositio pro prima parte, & apparatus vniuersalis ad ambas partes propositionis. In ellipsi ADBE sit diameter AB diuisa bifariàm in puncto C, ex quo ducta sit recta linea DCE ordinatim applicata ipsi diametro AB, & accommodata vtrimque in ipsa ellipsi, eius circumferentiam in D & E, attingens suis extremis D, E; hæc recta DCE quia datur ordinatim applicata diametro AB, bifariàm in C diuisa erit ab ipsa diametro in puncto C, per 10. defin. siue ad angulos rectos vt in prima figura, siue ad obliquos vt in secunda. Tùm per prop. 11. lib. 1. elem. ex puncto D, excitetur ad vnam partem rectæ DCE, ipsi perpendicularis recta DF longissima: fiatque per prop. 12. lib. 6. elem. vt DE ordinatim applicata ad diametrum AB, per medium eius punctum C, sic diameter AB ad aliam, cui de recta longissima DF, detrahenda erit per propos. 3. lib. 1. elem. æqualis DF inuentæ. Insuper sumpto quolibet puncto G diuerso ab designatis in circumferentia ellipseos, ab illo puncto G agatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea GH parallela diametro datæ AB, quæ per prop. 11. Procli occurret in H, rectæ DCE. Ad hæc, punctum E cum puncto F, recta EF vniatur: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto H, recta agatur linea HL parallela ipsi DF, occurrens in L rectæ EF per propos. 11. Procli: Producta verò HL vltra L, ponantur rectæ lineæ LM, FK, parallelæ ipsi DH per cit. prop. 31. lib. 1. elem. quæ per cit. prop. 11. Procli occurrent, illa in M, rectæ DF, hæc in K rectæ HL productæ. Resultabunt parallelogrammata DK, vel HF; DL vel HM; MK vel LF. Porrò in vtrisque figuris dicta parallelogrammata erunt rectangula per lem. 13. ob angulum rectum in D positum.

situm. Sed in prima figurarum duæ rectæ GH, HLK, erunt in directum, ob angulos rectos in H per prop. 29. lib. 1. elem. vnde per prop. 14. lib. eiusdem 1. elem. erunt in directum dictæ rectæ lineæ GH, HLK. Quod si concipiamus in vtrisque figuris iuxta lemma 1. ad lib. 2. elem. perfectum rectangulum sub ED, DF, erit eius diameter EF; ideoque per prop. 24. lib. 6. elem. rectangulum LF, vel MK, erit simile parallelogrammo rectangulo toti sub ED, DF. Dico autem rectam lineam GH posse spatium DL, vel HM, adiacens lineæ DF tertiæ proportionali inuentæ, latitudinem habens DH, deficiens figura LF vel MK, simili ei quæ sub rectis ED, DF, continetur, iuxta data in prima parte propositionis.

Apparatus alius particularis pro prima parte demonstranda. Per coroll. nost. 5. ad prop. 13. ex data diametro AB ellipseos, reperiatur rectum eius latus AN, seu recta linea iuxta quam possunt rectæ lineæ ab linea curua ellipseos applicatæ ordinatim ad eius diametrum AB datam; Tùm per prop. 11. lib. 1. elem. in extremo A diametri AB, erigatur ad vnam partem rectæ AB, recta linea AN ipsi perpendicularis, æqualisque ponatur ipsi AN recto lateri inuento: hæc recta AN, erit etiam recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ diametro AB, ex dictis in citata prop. 13. tùm ex puncto N ad punctum B recta linea AB traijciatur; & per propos. 31. lib. 1. elem. ex puncto G agatur recta linea GX parallela ipsi DE, quæ per prop. 11. Procli occurret in X puncto rectæ AB; & per cit. prop. 31. ex puncto X transmittatur alia recta linea XO parallela ipsi AN, occurrensque in O rectæ NB per cit. prop. 11. Procli: similiter ex puncto C alia recta CP ducatur parallela eidem AN, occurrensque in P, eidem rectæ NB. Itemque ex punctis N, O, P, aliæ rectæ NYR, OS, PT, parallelæ ipsi AB; prima NYR occurret in Y, productæ rectæ XO vltra O, & rectæ CP productæ vltra P in R; secunda verò OS, occurret in S ipsi CR, & in I ipsi AN si producatur ipsa SO vltra O; tertia denique PT, occurret in T ipsi AN: hi porrò occursus erunt iuxta prop. 11. Procli. Resultabunt autem ex constructione huius apparatus diuersa parallelogramma per lem. 2. ad lib. 2. elem. AR, AP, TS, IR, OP, IY, OR; quæ per lemma 13. erunt rectangula, ob angulum rectum in A positum, & alios rectos per propos. 29. lib. 1. elem. Totius verò rectanguli perficiendi iuxta lemma 1. ad lib. 2. elem. sub AB, AN, diameter erit recta NB. sed etiam in prima figura GX, erit in directum XO, per prop. 14. lib. 1. elem. & alia recta CPSR, in directum ipsi DC, per eandem cit. proximè prop. ob angulos rectos in X & C.

Demonstratio primæ partis. Per propos. 13. Quadratum rectæ DC erit æquale rectangulo AP; & quadratum rectæ GX, æquale rectangulo AO. Et quia in triangulo BAN, recta linea CP est parallela lateri AN; & recta PT parallela lateri AB; erit per lemma 50. vt BA ad AN, sic BC ad CP; & PT ad TN; æqualis verò est BC ipsi CA per apparatum seu ex datis; ideoque etiam ipsi PT per prop. 34. lib. 1. elem. & 1. ax. lib. eiusdem ergo per cit. lemma 50. erit CP æqualis ipsi TN, & BP ipsi PN, æqualis erit. Igitur rectangulum AP erit æquale rectangulo eò quòd sub æqualibus rectis contineantur, per lemma 49. tùm etiam rectangulum XT erit æquale rectangulo TY, eò quòd sub æqualibus rectis ostensis comprehendantur. Quia verò per propos. 43. lib. 1 elem. rectangulum OT est æquale rectangulo OR, si illis addatur commune rectangulum YI, erit rectangulum TY æquale rectangulo NS, per 2. ax. lib. 1. elem. sed rectangulum TY vel NS, æquale est ostensum rectangulo TX; ergo si eis TX, NS, æqualibus, addatur commune rectangulum TS; fient per 2. ax. lib. 1. elem. ex vna parte totum rectangulum TR, vel AP, & ex alia parte rectangulum AO simul cum PO rectangulo, æqualia inter se. Quare rectangnlum PA excedit rectangulum AO, rectangulo OP: sed rectangulum PA, fuit ostensum æquale quadrato rectæ CD, rectangulumque AO æquale quadrato rectæ GX, & rectangulum OP continetur sub rectis OS, SP; igitur quadratum rectæ CD excedit quadratum rectæ GX, rectangulo sub OS, SP, per 3. ax. lib. 1. elem. Quoniam autem recta DE bifariàm secta est in C, & non bifariàm in H, erit per prop. 5. lib. 2. elem. rectangulum sub EH, HD, simul cum quadrato intermediæ HD, (vel XG æqualis iuxta prop. 34. lib. 1. elem.) æquale quadrato rectæ CD: igitur quadratum rectæ CD excedet quadratum rectæ XG, rectangulo sub EH, HD; ostendimus autem idem quadratum rectæ CD, excedere quadratum rectæ XG, rectangulo sub OS, SP; ergo rectangulum sub EH, HD, erit æquale rectangulo sub OS, SP, per 3. ax. lib. 1. elem. quandoquidem ipsa sunt eiusdem differentia. Adhæc cùm per constructionem sit DE ad AB, sicut AB ad DF, sintque tres proportionales DE, AB, DF, erit per propos. 20. lib. 6. elem. coroll. vt DE ad DF, sic quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ AB; cùmque sit per coroll. nost. ad cit. prop. 20. quadratum rectæ DE quadruplum quadrati rectæ DC, & quadratum rectæ AB quadruplum quadrati rectæ CB; eò quòd rectæ DE, AB, sint duplæ rectarum propriarum DC, CB; erit per prop. 15. lib. 5. elem. quadratum rectæ CD ad quadratum rectæ CB, vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ AB; sed quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ AB, ostensum est esse vt DE ad DF; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt DE ad DF, sic quadratum rectæ DC ad quadratum rectæ CB: Verùm

per prop. 13. quadrato rectæ DC æquale & rectangulum sub PC, CA, vel sub CA, AT, hoc est per lemma 49. sub PC, CB, propter æquales rectas CA, CB, & æquales rectas PC, AT: Et quia in triangulo EDF, est recta HL parallela lateri DF, erit per lemma 50. vt ED, ad DF, sic EH ad HL; eritque comparando ista cum paulò antea dictis, per prop. 11. lib. 5. elem. vt EH ad HL, sic rectangulum sub PC, CB, ad quadratum rectæ CB. Quod si sumamus pro basibus rectas EH, HL, & pro altitudine communi rectam HD; erit per 1. prop. lib. 6. elem. rectangulum sub EH, HD, ad rectangulum sub HL, HD, sicut EH ad HL: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub EH, HD, ad rectangulum sub DH, HL, sic rectangulum sub PC, CB, ad quadratum rectæ CB. Quia verò est per lem. 50. vt BC ad CP, sic OS ad SP; erit per lemma 10. vt rectangulum sub CB, PC, ad quadratum rectæ CB, sic rectangulum sub OS, SP, ad quadratum rectæ OS: quare per prop 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub EH, HD, ad rectangulum sub DH, HL, sic rectangulum sub OS, SP, ad quadratum rectæ OS; sed rectangulum sub EH, HD, est ostensum æquale rectangulo sub PS, SO, ergo per prop. 14. lib 5. elem. rectangulum sub DH, HL, æquale erit quadrato rectæ OS, hoc est quadrato rectæ GH, æquali ipsi OS per propos. 34. lib. 1. elem. Quare linea recta GH potest spatium DL adiacens lineæ DF, latitudinem habens DH, deficiensque figura FL similis ei quæ sub ED, DF, continetur, sicut fuit in prima parte propositionis assertum. Et sic de omnibus alijs huiusmodi lineis ad instar GH.

Suppositio pro secunda parte. Si producatur recta GH, vsque ad alteram sectionis partem in puncto V. Dico quod recta GHV, bifariàm diuidatur in H, ab recta DE.

Apparatus pro secunda parte demonstranda, supplens apparatum præmissum generalem. Per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto V, agatur recta linea VQ parallela ipsi GX, occurrens per 11. prop. Procli rectæ AB, in Q; & ex puncto Q, ponatur alia recta QZ, parallela ipsi AN, occurrens in Z, ipsi rectæ NB, per cit. prop. 11. Procli: resultabunt triangula similia BQZ, BAN, BCP, per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. tùm etiam resultabit parallelogrammum GQ.

Demonstratio secundæ partis. Per prop. 34. lib. 1. elem. erunt rectæ lineæ GX, VQ, æquales; ideoque per prop. 16. Procli, quadrata illarum erunt æqualia; sed per prop. 13. quadratum rectæ GX æquale est rectangulo sub AX, XO; & quadratum rectæ VQ æquale rectangulo sub AQ, QZ: quare per 1. ax. lib. 1. elem. dicta duo rectangula erunt æqualia, quia sunt quadratis æqualibus æqualia: igitur per prop. 14. lib. 5. elem. erit vt OX ad ZQ, ita QA ad AX; est autem per lemma 50. vt OX ad XB, ita ZQ ad QB; & vicissim vt OX ad ZQ, ita XB ad QB: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt QA ad AX, sic XB ad QB; & iuxta prop. 17. lib. 5. elem. diuidendo vt QX ad XA, sic XQ ad QB. quare per 9. prop. lib. cit. 5. recta AX erit æqualis rectæ QB. si ergo ex æqualibus CA, CB, demantur æqualia AX, QB, relinquentur æqualia XC, QC, per 3. ax. lib. 1. elem. posita verò est recta GX parallela ipsi DE; parallelogramma ergo erunt GC, HQ: ergo per prop. 34. lib. 1. elem. rectæ GH, HV, erunt æquales rectis XC, QC, ostensis æqualibus; igitur per 1. ax. lib. 1. elem. erunt rectæ GH, HV, æquales inter se. Ergo recta GH producta in V ad alteram ellipseos partem, bifariàm diuiditur in H, ab recta DE, ad quam applicata fuit, sicuti in secunda parte propositum fuerat.

COROLL. NOSTRVM I.

Recta linea DF, tertia proportionalis datis duabus AB diametro ellipseos, & DE chorda illius incedens per medium punctum C dictæ diametri, ordinatimque applicata ipsi diametro AB; est linea iuxta quam possunt applicatæ ipsi DE, (qualis est GH,) parallelæ ipsi AB diametro.

Ostendimus enim quadratum rectæ GH æquale esse rectangulo sub DM, DH, adiacenti rectæ DF, latitudinemque habenti DH, & deficienti figura MK, simili ei quæ continetur sub DE, DF. quare ex dictis in prop. 13. recta linea DF tertia proportionalis, datis duabus AB, DE, erit linea iuxta quam potest recta GH; & sic de alijs rectis applicatis ad rectam DE, parallelis ipsi AB diametro.

COROLL. NOSTRVM II.

Datis eisdem quæ in præcedente corollario: Recta chorda DE, erit diameter ellipseos.

Diuidit enim per hanc propositionem bifariàm rectas omnes lineas parallelas rectæ ACB diametro datæ in data ellipsi; quod probauimus in recta GHV, ad instar omnium; ergo per defin. 10. chorda DE erit diameter ellipseos.

COROLL. NOSTRVM III.

In ellipsi si ad diametrum eius aliquam puta DE ostensam in corollario præcedente, ordinatim applicetur alia diameter ACB incedens per C medium punctum ipsius DE: Quadratum recta ACB, erit æquale rectangulo sub diametro DE, & recto latere ellipseos respectu diametri DE.

Nam ostendimus rectam ACB seu diametrum ellipseos esse mediam proportionalem

tionalem inter DE & DF, & DF esse rectum latus ellipseos respectu diametri DE: ergo per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ ACB, erit æquale rectangulo sub DE, DF.

COROLL. NOSTRVM IV.

In ellipsi datis duabus eius diametris verbi gratiâ ACB, DCE, ad se inuicem ordinatim applicatis: Recta earum latera propria reperire.

Apparatus. Per 12. prop. lib. 6. elem. Datis tribus rectis ACB, DCE, DCE, secunda bis sumpta, reperiatur quarta proportionalis AN: Dico rectam AN, esse rectum latus in ellipsi, respectu diametri ACB. Tùm per eandem prop. cit. datis tribus rectis DCE, ACB, ACB, secunda bis sumpta, reperiatur DF quarta proportionalis: Dico rectam DF esse latus rectum in ellipsi, respectu diametri DE.

Demonstratio. Quandoquidem secundæ bis sumuntur, erit recta AN tertia proportionalis respectu duarum hoc ordine ACB, DCE; & recta DF etiam tertia proportionalis, respectu duarum hoc ordine DCE, ACB: Est autem ex datis quælibet diametrorum datarum ACB, DCE, ad aliam ordinatim applicata: ergo per coroll. nostrum 1. recta DF, erit rectum latus in ellipsi respectu diametri eius DCE; & recta AN rectum latus respectu diametri ACB. & sic fecerimus ac demonstrauerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM V.

Data diametro in ellipsi puta DCE, & recto eius latere DF: Reperire alteram diametrum eiusdem ellipseos ordinatim applicatam dictæ datæ diametro DCE.

Apparatus. Per prop. 13. lib. 6. elem. reperiatur media recta proportionalis ACB, inter duas datas DCE, DF. Dico hanc mediam proportionalem rectam ACB, esse diametrum ellipseos ordinatim applicatam ipsi datæ DCE diametro.

Demonstratio. Detur recta ACB ordinatim applicata diametro DCE, per medium C punctum datæ diametri DCE: hæc ordinatim applicata, vel suis extremis A, B, attingit circumferentiam ellipseos, vel non, aut transgreditur. Si non attingat, produci poterit ita vt vtrimque attingat: vel si transgrediatur, nihilominus duobus in punctis attinget dictam circumferentiam. Et quia datur ordinatim applicata diametro DCE, per medium eius punctum C, quadratum huius rectæ prout terminatur vtrimque in circumferentia ellipseos siue sit producta vsque ad illam, siue secta ab dicta circumferentia; erit per coroll. nost. 3. quadratum eius æquale rectangulo sub DCE, & DF: sed quia per apparatum recta ACB est media proportionalis inter DCE, DF, erit per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ ACB æquale rectangulo eidem sub DCE, DF: ergo per 1. ax. lib. 1. elem. quadratum rectæ ACB, & quadratum minoris vel maioris dictæ rectæ ACB; erunt æqualia; ipsæque rectæ æquales per prop. 16. Procli, quæ ostensæ sunt inæquales. Absurdum hoc indicat non posse dici quod recta ACB ordinatim applicata diametro DCE, per punctum eius medium C, non attingat suis extremis A & B, circumferentiam ellipseos. Igitur eius extrema A & B, existent in dicta circumferentia ellipseos. Ergo quia recta ACB chorda ellipseos est, & per eius punctum medium ordinatim applicata est DCE diametro ipsius ellipseos; erit per coroll. nost. 2. ipsa ACB diameter ellipseos, ostensa ordinatim applicata alteri DCE. & sic inuenerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM VI.

Recta linea media proportionalis inter diametrum aliquam ellipseos & rectum eius proprium latus; est diameter eiusdem ellipseos ordinatim applicata datæ initio diametro.

Nam ex praxi præcedentis corollarij 5. liquet, reperiendo mediam proportionalem rectam inter datam diametrum in ellipsi, & proprium eius latus, ipsam mediam inuentam proportionalem rectam lineam esse diametrum in data ellipsi ordinatim applicatam ad datam in ea diametrum. Igitur manifestum est corollarium.

PROPOSITIO XVI.

Si per punctum quod transuersum latus oppositarum sectionum bifariàm diuidit, recta linea quædam ordinatim applicetur; ipsarum diameter erit priori diametro coniugata.

Suppositio. Datarum sectionum oppositarum GAM, HBN, sit latus AB transuersum, bifariàm diuisum in puncto C, ex quo recta linea CD sit ordinatim applicata ad ipsum latus transuersum AB. Dico hanc rectam CD esse diametrum datarum sectionum oppositarum, priori AB coniugatam: seu quod idem est, ambas AB, CD, esse diametros coniugatas ipsarum datarum sectionum oppositarum.

Ante apparatum aduerte Apollonium vocare AB latus transuersum iuxta ea quæ dixerat in prop. 14. videlicet rectam lineam in-

ter vertices A & B sectionum interiectam: nunc in ista propositione, diametrum earundem sectionum oppositarum: quare rectè monuimus in ipsa prop. 14. confusè vsurpari latus transuersum, & diametrum sectionum oppositarum; quæque etiam ab eodem Authore nuncupabuntur non solùm diametri transuersæ earundem vel vnius hyperbolæ, sed etiam in alijs sectionibus conicis.

Apparatus. Sint duæ rectæ lineæ AE, BF, recta latera datarum sectionum respectu transuersi lateris earum, inuenta per coroll. noſt. 7. ad prop. 14. quæ sunt æqualia inter se per cit. prop. & constituta sint ad easdem partes transuersi lateris AB communis ad angulos rectos, ipsi lateri AB transuerso per prop. 11. lib. 1. elem. ex punctis eius extremis A & B, iuxta naturam lateris recti. Tùm ex puncto A, per F extremum lateris recti BF alterius, recta linea transmittatur producenda in infinitum, vltra F; similiter ex puncto B per E alia recta immittatur producenda in infinitum vltra E. sumatur autem in alterutra è datis sectionibus oppositis, verbi gratiâ in sectione GAM, punctum G in circumferentia seu linea curua illius, diuersum ab A; & per prop. 31. lib. 1. elem. agatur ex G puncto recta linea GH infinita versus oppositam HBF sectionem; quæ quia produci seu augeri potest in infinitum versus partes oppositas vertici, ita vt ab inuicem in infinitum diuaricentur partes eius inferiores, tandem concurret recta GH prædicta in H puncto lineæ curuæ sectionis HBN. Insuper ex punctis G & H, concipiantur ordinatim applicatæ rectæ lineæ GK, HL, ad transuersum latus AB, seu diametrum productam vltra A & B: illæ duæ rectæ GK, HL, erunt per def. 16. parallelæ: resultabitque parallelogrammum HK. sed & per prop. 31. lib. 1. elem. ex punctis K & L, diametri, aganrur rectæ lineæ, prima quidem KM parallela ipsi AE, & altera LN parallela ipsi BF; primas duas secabit BEM, & alias duas recta AFN per prop. 11. Procli. Et quia duæ rectæ AE, BF, sunt perpendiculares diametro AB, ipsæ erunt per prop. 28. lib. 1. elem. parallelæ; ideóque per prop. 30. lib. eiusdem 1. elem. quatuor rectæ KM, AE, BF, LN, erunt inuicem parallelæ.

Demonstratio. Per propos. 34. lib. 1. elem. erit GK æqualis ipsi HL, in parallelogrammo HK; quare per prop. 16. Procli, erit quadratum rectæ GK æquale quadrato rectæ HL: est autem per prop. 12. quadratum rectæ GK æquale rectangulo sub AK, KM; & quadratum rectæ HL æquale rectangulo sub BL, LN; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum sub AK, KM, æquale erit rectangulo sub BL, LN. Sunt verò per prop. 14. rectæ AE, BF æquales; & per coroll. noſt. ad propos. 7. lib. 5. elem. est vt AE ad AB, sic BF ad BA; estque per lemma 30. vt EA ad AB, sic MK ad KB; & vt FB ad BA, sic NL ad LA: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt MK ad KB, sic NL ad LA. Verùm sumendo pro altitudine communi rectam KA, erit per 1. prop. lib. 6. elem. vt MK ad KB, ita rectangulum sub MK, KA, ad rectangulum sub BK, KA: & sumpta pro altitudine communi, recta BL, erit etiam per cit. prop. 1. lib. 6. elem. vt NL ad LA, sic rectangulum sub NL, LB, ad rectangulum sub AL, LB: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub MK, KA, ad rectangulum sub BK, KA, sic rectangulum sub NL, LB, ad rectangulum sub AL, LB; est verò probatum rectangulum sub MK, KA, æquale rectangulo sub NL, LB: igitur per propos. 14. lib. 5. elem. rectangulum sub BK, KA, æquale erit rectangulo sub AL, LB: ac propterea per propos. 14. lib. 6. elem. erit KB ad AL, vt LB ad KA; & iuxta prop. 16. lib. 5. elem. vicissim, vt KB ad LB, sic AL ad KA; componendóque secundum prop. 18. lib. 5. elem. vt KL ad LB, ita LK ad KA; prima autem ac tertia KL, LK, sunt æquales, vtpote eadem; ergo per prop. 14. lib. eiusdem 5. elem. secunda LB, & quarta KA, erunt æquales. Est autem recta AB, bifariàm in puncto C diuisa ex datis, ideóque AC, æqualis ipsi BC; ergo si his postremis æqualibus, addamus æquales LB, KA, videlicet ipsi AC rectam KA, & ipsi CB, rectam BL, fient per 2. ax. lib. 1. elem. rectæ æquales CK, CL. Quod si producatur recta DC, vltra C, randem atringet in X, rectam GK, per prop. 11. Procli; & quia datur ipsa recta DC ordinatim applicata diametro AB, & rectæ GK, HL, sunt etiam per apparatum ordinatim applicatæ eidem diametro AB, duarum datarum sectionum oppositarum, quarum lineæ GAM, HBN, sunt lineæ curuæ ostensæ in prop. 12. & 14. erunt per def. 16. parallelæ inuicem rectæ lineæ GK, HL, XCD; & quia etiam sunt per apparatum aliæ duæ lineæ GH, KABL, parallelæ, resultabunt parallelogramma GC, HC: quare per prop. 34. lib. 1. elem. tam in parallelogrammo GC, quàm in parallelogrammo HC, erunt latera KC, GX, æqualia, & alia LC, HX, æqualia: igitur per 1. ax. lib. 1. elem. quia latera GX, HX, sunt ostensa æqualia lateribus æqualibus probatis CK, CL, ipsa GX, HX, erunt æqualia inter se, ideóque recta GH diuisa erit bifariàm in X, ab recta DCX. Non alia ratione demonstrabimus rectas omnes alias lineas parallelas ipsi AB diametro ducendas ab sectione ad sectionem, diuidi bifariàm ab recta DC producenda, sicuti ostendimus bifariàm secare in X rectam GH parallelam eidem diametro AB. Cùmque rectæ GK, HL, & sic de alijs omnibus accommodatis intra sectiones ductas, & ordinatim applicatis ad diametrum AB productam, sint ordinatim applicatæ ex apparatu eidem diametro AB productæ bifariàm diuidan-

uidantur per defin. 13. ab ipsa diametro AB; sintque ostensæ parallelæ ipsi DCX; diuidet diameter AB producta, bifariàm rectas omnes lineas parallelas rectæ DCX, accommodatas intra sectiones datas; & recta DCX diuidet etiam bifariàm rectas omnes lineas parallelas diametro AB, positas inter datas sectiones, ergo per defin. 15. erit diameter recta datarum sectionum. Igitur cùm duæ rectæ AB, DCX, sint diametri datarum sectionum, & AB diuidat bifariàm rectas omnes lineas parallelas ipsi DCX, accommodatas intra sectiones; & DCX diameter bifariàm etiam diuidat rectas omnes lineas parallelas alteri AB diametro, sitas inter ipsas sectiones: erunt per def. 17. duæ diametri AB, DC, diametri coniugatæ datarum sectionum oppositarum, vnaque erit coniugata alteri. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Eisdem datis, quæ in propositione: Recta illa linea ordinatim applicata transuerso lateri: (verbi gratiâ in figura & exemplo allato, Recta DC ordinatim applicata transuerso lateri AB datarum sectionum oppositarum per punctum eius medium C,) est diameter recta datarum sectionum oppositarum; & Recta AB, est earundem diameter transuersa.

Primum ostendimus per def. 15. in fine demonstrationis allatæ; Secundum verò manifestum ex def. 13. Nam recta AB quæ vocata fuit transuersum latus in hac propos. cùm ostensa sit diuidere bifariàm rectas omnes lineas æquidistantes ipsi DC, accommodatas intra ipsas sectiones; per cit. defin. 13. erit transuersa diameter duarum oppositarum sectionum datarum, curuas lineas habentium ex dictis in prop. 12. & 14.

COMMENTARIVS
IN DEFINITIONES SECVNDAS
LIBRI PRIMI
CONICORVM
APOLLONII PERGÆI.



AD intelligendas has definitiones secundas, quas ideò vocat Apollonius secundas, ad earum distinctionem ab primis statim initio huius libri primi propositis tanquam fundamentis primis totius tractatus conicorum.

Notandum est primò hasce definitiones secundas postpositas esse ab Authore propositionibus sexdecim primis præcedentibus; quia supponunt quædam demonstrata ac stabilita in illis. Exempli gratiâ quotupliciter secetur conus planis, & quo nomine particulari diuersæ sectiones ortæ ad distinctionem sint appellandæ, & quid sint singulæ.

Notandum est secundò, quintuplicem esse sectionem coni per plana. Primam, quando secatur plano per verticem eius acto, vnde oritur sectio quam vocat Triangulum, illudque rectilineum, quod ostendit propositione 3. Alteram, quando secatur plano parallelo basi circulari coni, probauitque in prop. 4. ex illa sectione produci circulum: vel quando secatur conus scalenus primum plano per axem, tùm altero plano secundo rectoque ad triangulum per axem resultans ab sectione coni plano primo per axem eius: ita vt ex hoc triangulo per axem auferat ex parte verticis triangulum simile ipsi per axem, subcontrariè verò positum; demonstrauitque in prop. 5. sectionem huiusmodi conicam ortam ab hoc plano secundo, esse circulum; sed ad maiorem distinctionem hanc sectionem circularem vocat sectionem subcontrariam. Tertiam, quando dissecatur conus plano primo per axem eius incedente, & altero secundo plano secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis, efficiente sectionem, cuius diameter originaria sit parallela vni laterum dicti trianguli: quam sectionem vocauit in prop. 11. Parabolam. Quartam, quando conus plano primo diuiditur per axem, & iterum secundo plano secante basim coni secundum

cundum rectam lineam orthogoniam basi trianguli per axem generati ab dicto plano primo; & sectionis effectæ ab dicto plano secundo diameter originaria producta cum vno latere dicti trianguli per axem conueniat extra verticem coni; quam sectionem nuncupauit propositione vndecima Hyperbolam. Quia verò superficies conica composita ex duabus circa verticem communem coaptatis iuxta defin. 1. inter primas, secari potest modo nunc explicato, ita vt in vtraque resultent sectiones hyperbolicæ, de quibus egit in prop. 14. vna in vna, altera in alia, oppositæ inter se respectu verticum, ideò ad maiorem claritatem eas noluit vocare hyperbolas duas, sed absolutè sectiones oppositas. Quintam denique & vltimam, quando conus primo plano secatur per axem, tùm altero plano secundo conueniente cum vtroque latere trianguli per axem resultantis ab sectione dicta prima, sed planum hoc secundum non sit æquidistans plano baseos circularis coni, neque auferat de triangulo prædicto per axem, triangulum ex parte verticis simile ei quod per axem & subcontrariè positum; planumque in quo est basis coni & secans planum secundum conueniant in recta linea communi quæ sit perpendicularis ad basim dicti trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: sectionem, inquam, coni cum hisce circumstantijs procreatam ab secundo plano, appellauit ellipsim in propositione 13.

Notandum est tertiò. Apollonium solummodò quatuor definitiones secundas proferre in medium, quæ sunt sequentes quatuor primæ: Reliquas verò ab quarta esse nostras, seu à nobis additas ad maiorem horum librorum intelligentiam, quas fortè Apollonius his propositionibus contentus è quibus desumuntur afferre neglexerat: nam definitio afferenda parabolæ ab vndecima propositione colligitur; hyperbolæ ab duodecima; ellipseos ab decimatertia; sectionum oppositarum ab decimaquarta; Laterum verò rectorum propriorum diametris proprijs in singulis prædictis sectionibus, paraboles, hyperboles, ellipseos, & oppositarum sectionum, petuntur etiam ab citatis propositionibus.

Notandum est quartò sectionis nomen absolutè in cono factæ per plana, Apollonium semper vsurpare, in parabola, hyperbola, & ellipsi solùm; nunquam tamen in triangulo per axem, neque in circulo effectis in cono: nam dum in omni sectione coni attribuit proprietates quasdam, illæ triangulo per axem eius communes esse nequeunt; neque de illo vnquam passiones demonstrat: & si quæ sint circulo communes, post nomen sectionis in genere, vel in particulari parabolam aut hyperbolam aut ellipsim, statim adiungit circuli circumferensiam: quæ signa sunt eum minimè sectionis nomine in cono, intelligere triangulum aut circulum. Sed neque etiam sub nomine sectionis in cono, sectiones oppositas subaudit; nam ipsæ potiùs sunt duæ sectiones, videlicet duæ hyperbolæ, non vna: & dum vult aliquid de illis demonstrare, nunquam proponit in textu duas hyperbolas oppositas, sed solùm sectiones oppositas.

His positis veniamus ad harum definitionum secundarum tàm Apollonij, quàm nostrarum explicationem.

I.

Punctum quod Hyperbolæ & ellipseos diametrum bifariam diuidit: centrum Sectionis dicatur.

PRo ellipsi consule figuram propositionis 15. & pro hyperbola consule figuram propositionis 16. Itaque in ellipsi sit recta AB diameter vtrimque terminata in A & B in circumferentia ipsius ellipseos: punctum C quod bifariàm diuidit diametrum AB, est centrum ipsius ellipseos. In hyperbola verò GAM, sit eius diameter AB seu transuersum latus, quatenus non ingreditur intra arcum hyperboles, & quatenus non extenditur vltra sectionem communem illius & lateris trianguli per axem producti vltra verticem; etiam punctum medium C erit centrum hyperboles GAM: & sic de omnibus alijs punctis medijs diametrorum hyperbolarum. Simili modo punctum medium C transuersi lateris AB, vel cuiuscumque diametri sectionum oppositarum, verbi gratiâ GAM, HBN, in figura prop. 16. cit. erit centrum oppositarum sectionum. Et sic erit explicata definitio tertia, quam nudam proponemus.

Ex his sequitur quod ellipseos centrum sit intra figuram ipsam, sicuti circuli: tùm quod hyperbolæ vel duarum oppositarum sectionum centrum sit extra areas ipsarum conceptas terminatas ex parte opposita verticum propriorum. quæ monueramus in fine definitionum primarum.

II.

Et quæ ex centro ad sectionem producitur: Vocetur ex centro sectionis.

VErbi gratiâ ex centro C, ellipseos in citata figura prop. 15. quælibet recta linea deducta ad circumferentiam eius ex vna tantum parte, vel ex vtraque: dicetur iuxta hanc definitionem, recta linea ex centro sectionis, vel simpliciter ex centro sectionis. Simili ratione in fig. prop. 16. recta linea ex centro C hyperbolæ GAM, emissa ad circumferentiam eius, eam tangendo in puncto, vel eam intersecando, vocari debet ex centro sectionis. Tùm etiam ex centro C sectionum oppositarum recta linea transmissa & vnam solùm sectionem

ex

ex oppositis, vel ambas contingens, vel secans; nuncupabitur secundum hanc definitionem, ex centro sectionis.

III.

Similitrr & punctum quod transuersum latus oppositarum sectionam bifariàm diuidit : centrum vocetur.

HÆc definitio iam explicata est In fine declarationis seu expositionis nostræ ad ptimam. Solumque superest vt moneamus, quamlibet diametrum sectionum oppositarum, ipsas atringens, dici ex mente Apollonij, transuersum latus ipsarum: nam punctum eius medlum centrum est, & vnicum, vt in ellipsi.

IV.

Quæ autem à centro ducitur æquidistans ei quæ ordinatim applicata est, mediamque proportionem habet inter figuræ latera, & bifariàm secatur à centro : secunda diameter appelletur.

ANtequam exponamus hanc definitionem, explico quidnam intelligat Apollonius per latera figuræ. Imprimis intelligit quamlibet diametrum sectionum transuersam quæ inrra areas ipsarum penetrat, vel penetrare potest producta, qualis est omnis originaria: tùm rectam lineam ad angulos rectos excitatam dictæ rransuersæ in vertice ipsius seu puncto quo attingir lineam curuam sectionis; quæ dicta est ab Authore linea recta iuxta quam possunt applicatæ ordinatim ad illam diametrum rransuersam in ipsa sectione. Quia verò sic duæ rectę lineę rectangulum efficiunt quod figuram vocat, ad quod respectum habet quadrarum rectæ lineæ applicatæ ad transuersam dictam diametrum; ideò dicta transuersa diameter, & recta illa linea ipsi perpendicularis prædicta, dicuntur latera figuræ. Ex quo intelligitur apposite rectas illas perpendiculares transuersæ diametro sectionum, à nobis esse appellaras in præcedentibus propositionibus recta latera, iuxta mentem Apollonij.

Præmoneo autem solam Parabolam inter sectiones conicas non obtinere secundam diametrum, quia centro caret in quo diametri transuersæ se mutuò interfecent, vti suo loco demonstrabimus: reliquas verò sectiones sibi vendicare videlicet, ellipsim, hyperbolam, sectionesque oppositas, quia ex definitionibus allatis centrum habent per quod transuersæ diametri seu transuersa latera figurarum incedant. Quare in explicatione sequente huius definitionis, exempla proferemus in ellipsi, hyperbola, & oppositis sectionibus, tantum, non autem in parabola.

In ellipseos figuratione allatâ in propos. 15. sit diameter AB transuersa seu transuersum latus, ad quod sit ordinatim applicata recta linea GX, & ab centro C ellipseos sit ducta recta DCE æquidistans ipsi GX, ac terminata vtrimque in D & E, in circumferentia ellipseos, & bifariàm diuisa in C centro; si fuerit ipsa DCE media proportionalis inter figuræ latera, hoc est AB & AN, ita vt AN sit latus rectum respectu transuersi AB: hæc recta DCE erit per hanc definitionem secunda seu coniugata diameter ellipseos, respectu alrerius diametri AB. Er sic de omnibus alijs huiusmodi rectis : Exempli gratiâ si recta DCE statuatur transuersum larus, & DF rectum, in eadem ellipsi; & ad rectam DCE ordinatim applicata sit recta linea GH; tùm per C centrum ellipseos acta sir recta linea AB parallela ipsi GH, bifariàmque diuisa in C centro, sueritque media proportionalis inter DCE, DF, figuræ lateta: ipsa recta ACB vtrimque terminata in circumferentia ellipseos, erit secunda eius diameter, iuxta hanc definitionem, respectu diametri DE, & simul coniugata eidem.

In hyperbola, & oppositis sectionibus consulendo delineationes propositionis 16. sit diameter KACBL, ad quam sit ordinatim applicata recta HL, & dictæ diametri rectum latus BF; & per centrum C, hyperbolæ HBN, vel oppositarum ipsarum sectionum HBN, GAM, incedat recta linea XCD parallela ipsi HL, bifariàmque diuisa vel potens diuidi in centro ipso C, sitque media proportionalis inter figuræ latera AB, BF: ipsa recta XCD, erit secunda diameter hyperbolæ HBN, vel oppositarum sectionum HBN, GAM, per istam definitionem. Et sic de omnibus alijs huiusmodi rectis lineis.

Colligo ex dictis, datam diametrum ad quam ordinatim datur applicata recta linea posse apposite vocari primam; respectu secundæ definitæ.

Hactenus explicauimus quatuor Apollonij definitiones secundas. Nunc verò pollicitas nostras numerum præcedentium quatuor augentes proponemus consequentes, & exponemus.

V.

Parabole seu Parabola. Est figura plana contenta linea curua & recta : Quando conus secatur plano primo per axem, vnde resultat triangulum rectilineum per axem; secaturque altero plano secundo secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim dicti trianguli per axem sit perpendicularis; & sit diameter originaria sectionis vni laterum trianguli prædicti per axem æquidistans, sectioque communis trianguli dicti per axem, & dicti plani secundi secantis : & cùm recta linea quæ à sectione coni facta per hoc secundum planum, hoc est ab linea curua ipsius parabola, ducitur æquidistans recta lineæ prædictæ per-

perpendiculari ad basim trianguli per axem, communique sectioni plani secundi secantis & baseos coni, vsque ad sectionis diametrum originariam prædictam; potest spatium æquale contento recta linea qua ex diametro abscissa, inter ipsam & verticem sectionis interijcitur, & alia quadam recta qua ad lineam inter coni angulum & verticem sectionis interiectam, eam proportionem habet, quam quadratum baseos trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus continetur.

HÆc definitio colligitur præcipuè ex propos.11. explicatque originem, & causas efficientes, & materialem ipsius Parabolæ definitæ, nonnullasque proprietates eiusdem. illam verò ex figuratione prop.11. sic enucleatiùs exponemus.

Conus BAC, verticem habens A, & basim circularem BDC, cuius O sit centrum, axemque AO obtinens, plano primo sectus sit applicato axi AO; vnde resultet pro sectione communi triangulum rectilineum BAC, per propos. 3. & recta linea BOC basis dicti trianguli, diameter circularis baseos BDC, dicti coni, secundum coroll.nost.t. ad cit.propos.3. Præterea idem conus vnà cum dicto triangulo BAC sectus sit plano secundo secantè basim BDC ipsius coni, secundum rectam lineam DGE perpendicularem diametro BOC dicti circuli, vel basi BC dicti trianguli; efficiatque per lemma 3. & 4. in superficie conica secta, lineam curuam DFE, spatium planum concludentem cum recta DGE; tùm sectio communis dicti plani secundi,& trianguli BAC per axem, sit recta linea FG per propos 3. lib.11. elem. parallelaque lateri AC dicti trianguli per axem, & diameter originaria sectionis DFE. Insuper recta linea KL ducta sit æquidistans ipsi DGE sectioni communi plani dicti secundi & plani circularis baseos BDG, ab aliquo puncto K lineæ curuæ dictæ sectionis DFE ad punctum aliquod puta L, diametri FG dictæ sectionis: possitque spatium dicta recta linea KL, æquale rectangulo contento linea FL, quæ ex diametro FG, inter ipsam KL & F verticem sectionis DFE interijcitur, & alia recta FH perpendiculari ipsi diametro F G in puncto eius seu vertice F, quæ recta FH iuxta lemma 6. eam proportionem habeat ad rectam FA (quæ est portio lateris BA dicti trianguli per axem, inter verticem F dictæ sectionis DFE, vel diametri FG, & A angulum coni secti constitutum est) quam habet quadratum rectæ BC seu baseos trianguli per axem prædicti, ad rectangulum sub reliquis duobus BA,CA,eiusdem trianguli, continetur. Et sic de omnibus alijs huiusmodi rectis lineis ducendis ab linea curua sectionis DFE ad diametrum eius FG, parallelis ipsi DGE, ad instar ductæ KL, philosophandum sit. Figura, inquam, plana DFE, contenta linea curua DFE, & recta DGE, iuxta lemma 4. Est Parabola definita, & explicata.

Ad huius definitionis explicationem euidentiùs intelligendam, soluendæ sunt quædam quæstiones seu querelæ.

Prima. Cur nos ad parabolam definiendam addiderimus ad Apollonij propositionem vndecimam, hæc verba. Est figura plana contenta sub linea curua DFE, & rectam DGE. Respondeo nos hæc addidisse consultò, quia dubitare quis posset an sectio prædicta DFE, conicæ superficiei curuæ & plani secundi secantia ipsam, esset angulosa, vel rectilinea; & an concluderet spatium, vel non sola; & an reciperetur in plano; & an necessaria esser recta linea DGE communia sectio plani secundi secantia & baseos circularis coni secti modo commemorato. Docuimus autem lemmate 3. dictam sectionem DFE in superficie curua conica effectam ab plano secundo secante, esse lineam curuam; & in corollario nostro ad lemma 4. quia planum secundum secans conum extra verticem, secat etiam basim eius circularem BDC, non productam, demonstrauimus sectionem communem resultare figuram planam contentam sub linea curua prædicta DFE, & recta DGE: Adde quod Archimedes Parabolam in quadratum illi isometrum peculiari libro conuerterit, quæ si lineâ rectâ simul cum curua non terminaretur; & si sola curua esset ipsa Parabola, cùm sit in infinitum versus partes oppositas vertici producibilis corollario nostro 3. ad prop.11. nulla ratione in quadratum transmutari posset, neque illi comparari iuxta defin.5. lib.5. elem. Igitur ex superadditis à nobis ad prop. 11. & citatis lemmatibus nostris & corollarijs, & Archimedis authoritate, rectè colligitur solutio dubitationum propositarum, quæ tenebras aliquas in propositione Autoris offundere poterant, penitùs dissipatas ab luce superadditarum particularum.

Secunda. cur definitio sectionis parabolicæ non sit sufficiens ex his, vt sit figura plana, contenta linea curua & recta, quando Conus plano primo secatur per axem eius, vnde resultat triangulum per axem rectilineum; secturque altero plano secundo secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim. dicti trianguli per axem sit perpendicularis, sitque diameter sectionis huius secundæ vni laterum trianguli per axem prædicti æquidistans. Sine additione rectarum linearum ab sectione secunda ductarum parallelarum rectæ lineæ quæ est sectio communis baseos coni & plani secundi secantis, ad diametrum sectionis, potentium rectangula sub portione dictæ diametri contenta inter verticem eiusdem sectionis & illas, & sub recta linea inuenienda per lemma 6. Nam per illam diametrum satis distinguitur ab hyperbola, cuius diameter per prop.11. secare debet ambo latera trianguli per axem, vnum

vnum non productum, alterum verò productum vltra verticem coni. Tùm per eandem diametrum satis distinguitur ab ellipsi, cuius diameter secat, vel secare debet, per prop. 13. ambo latera trianguli per axem producta vel non producta infra verticem. Tùm per eandem diametrum etiam separatur ab sectione quæ est circulus, cuius diameter secat ambo latera trianguli per axem ex dictis in prop. 4. vel 5. Respondeo Apollonium considerasse istas omnes sectiones, Parabolen, Hyperbolen, ellipsin, & circulum, non solùm in conis, sed etiam in plano exhibitas, vnà cum diametris earum, & rectis datis vel inuentis, iuxta quas possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum, seu quod idem est vnà cum lateribus illarum transuersis ac rectis: Tunc enim Parabola, Hyperbolaque separatæ ab cono, vel trianguli per axem coni, vix dignosci poterant, nisi comparando quadrata rectarum applicatarum ordinatim ad diametros earum, cum rectangulis applicatis ad illarum latera recta. Quæ causa fuit etiam vt eas diuersis nominibus eum relatione ad quadrata dictarum linearum comparata cum rectangulis prædictis, appellaret: ideò enim prop. 11. Parabolen appellauit sectionem commemoratam in illa prop. 11. si recta linea quæ à sectione coni facta per secundum planum ducitur æquidistans rectæ lineæ communi sectioni plani secundi & baseos coni, vsque ad sectionis diametrum; possit spatium æquale contento portione diametri inter eius verticem & ipsam rectam, rectoque latere ipsius diametri: hoc enim non conuenit hyperbolæ nec ellipsi: & ob hoc postremum, huic sectioni huiusmodi indidit nomen Parabolæ seu comparationis, quia quadratum dictæ rectæ ordinatim applicatæ illius diametro, æquale est dicto rectangulo sine excessu vel defectu: in hyperbola autem excedit, ideoque excessum eam vocauit: in ellipsi verò deficit, ac propterea defectum eam nuncupauit: denique in circulo æquale est rectangulo sub partibus diametri sine respectu necessario ad latus eius rectum.

Tertia. Cur in definitione præsenti fiat mentio rectæ lineæ FH reperiendæ per lemma 6. hoc est recti lateris respectu diametri FG in ipsa parabola. Respondeo, quia necessaria erat omnino ad componendum rectangulum cui debet esse æquale quadratum rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum Paraboles. Quæ ideò dicitur recta linea iuxta quam possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum Paraboles: quod intellige partialiter; nam alia recta linea requiritur ad componendum dictum rectangulum, videlicet diametri portio inter verticem eius & dictam rectam ordinatim applicatam. Quæ recta linea FH dicitur etiam rectum latus diametri est FG in ipsa parabola, quia semper & ad angulos rectos diametro propriæ FG in ipsa parabola, in eius vertice F. quæ vt clariùs elucescant addemus etiam peculiarem definitionem huiusmodi rectæ lineæ FH, sequentem ❧. VI.

Ex his intelliges proportione seruata eur in definitionibus Hyperboles, ellipseos, & sectionum oppositarum superaddamus similes particulas superadditis in Parabola, ad ea quæ docuit propositionibus proprijs Apollonius, ex quibus desumuntur propriæ earum sectionum definitiones proferendæ: Dubia enim huiusmodi orta in illis vt in parabola, ex resolutionibus allatis in parabolæ explicatione, dissolui poterunt.

VI.

Recta linea in Parabola, iuxta quam possunt partialiter recta linea ordinatim applicata ad diametrum eius originariam æquidistantes recta linea perpendiculari ad basim trianguli per axem coni, communiue sectioni baseos circularis coni & plani secundi secantis conum & efficientis parabolam: seu quod idem est, Rectum latus in Parabola. Est recta linea qua ad portionem lateris trianguli per axem coni secti plano primo, positam inter diametrum parabola & verticem coni, eam proportionem habet, quam quadratum baseos dicti trianguli per axem, ad rectangulum sub lateribus dicti trianguli per axem: constituiturque ad angulos rectos ipsi diametro, in verticis illius puncto.

Abundè hæc definitio manifesta est ab explicatione allata superioris definitionis Parabolæ.

VII.

Hyperbole vel Hyperbola. Est figura plana contenta sub linea curua & recta. Quando conus imprimis secatur primo plano per axem, vnde resultat triangulum rectilineum per axem; secaturque altero plano secundo secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem fit perpendicularis: & recta linea quæ est sectio communis huius trianguli per axem, & huius plani secundi secantis; estque sectionis effecta in superficie conica ab hoc secundo plano secante diameter, quæ producta vltra verticem cum vno latere trianguli per axem conueniat extra ipsum verticem: Rectaque linea, quæ à sectione ducitur æquidistans communi sectioni plani secundi secantis & basis coni, perpendicularis, inquam, rectæ basi trianguli per axem, vsque ad diametrum; poterit spatium adiacens lineæ ad quam ea quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangulum, eandem proportionem habet quam quadratum lineæ diametro æquidistantis à vertice coni vsque ad basim trianguli ducitur, ad rectangulum basis partibus quæ ab ea fiunt contentum, latitudinem habens lineam quæ ex diametro abscinditur inter ipsam & verticem sectionis interiectam, excedensque figura simili & similiter posita ei quæ continetur

tinetur linea angulo extra triangulum subtensa, & ea iuxta quam possunt quæ ad diametrum applicantur.

HÆc definitio colligitur præcipuè ex propos.12. traditque originem hyperbolæ, & causas efficientes & materialem ipsius, tùm etiam præcipuam proprietatem & relationes ad quædam necessaria ad illam.

Explicatur autem in particulari cum respectu ad figurationem exhibitam in prop.12. Est figura plana DFE contenta linea curua DFE, & recta DGE, (quarum originem & causas postmodum assignabimus, & cur plana sit figura.) Quando, inquam, conus verticem habens A, & basim circularem BDC, axemque AV ab vertice A ad V centrum baseos dictæ circularis extensum, plano primo secatur per axem, vnde resultat triangulum BAC per axem, basim habens BVC diametrum dicti circuli, per prop.3. & corollarium nostrum 1. ad illam: tùm secatur altero plano secundo secante basim BDC circularem coni, secundum rectam lineam DGE perpendicularem ad BC basim dicti trianguli ductam in eius plano; & secante etiam planum dicti trianguli per axem, secundum rectam FG lineam per prop.3. lib.11. element. quæ producta vltra F versus verticem A coni concurrat vltra ipsum verticem A cum latere altero CA dicti trianguli. Ex qua sectione secunda coni per hoc planum secundum resultat pro sectione communi plano secundo secanti, & conicæ superficiei sectæ conicæ, & baseos eius circularis, figura plana DFE comprehensa linea curua DFE, & recta DGE, iuxta coroll. nost.2. ad lem.4. cuius figuræ diameter est recta GF etiam producta vsque ad H, iuxta coroll. 1. ad prop.7. & originaria ex dictis in propos.12. & 16. Tùm etiam recta linea MN, quæ ab puncto M sectionis prædictæ DFE lineæ curuæ, ad diametrum FG prædictam ducitur æquidistans rectæ DGE quæ est communis sectio prædicti plani secundi secantis, & baseos circularis BDC, poterit spatium XF seu rectangulum adiacens rectæ lineæ FL positæ ad angulos rectos in F ipsi diametro FG; ad quam rectam FL recta FH in directum ipsi GF diametro iacens inter F verticem diametri FG, & punctum H concursus productæ GF vltra F, & lateris CA producti vltra verticem A, & subtendens angulum FAH vel BAH extra triangulum BAC per axem, eandem proportionem habet quam quadratum rectæ lineæ AK ab angulo A seu vertice A deductæ ad basim BC dicti trianguli, & æquidistantis ipsi FG diametro prædictæ, ad rectangulum sub BK, KC, partibus prædictæ baseos BC: spatium, inquam, XF seu rectangulum, latitudinem habens rectam lineam FN seu portionem diametri FG sitam inter ipsam MN & verticem F dictæ diametri FG, vel sectionis DFE; excedensque figura XL simili similiterque posita ei quæ continetur sub linea FH portione diametri FG productæ, inter eius verticem F & H dictum punctum concursus ipsius FG, & lateris CA, subtensaque angulo FAH prædicto extra triangulum BAC per axem, & recta FL iuxta quam possunt rectæ omnes lineæ quæ ab linea curua sectionis DFE ad diametrum eius FG ordinatim applicantur. Quomodo autem reperienda sit recta FL, dictum est in prop.12. per lemma 6. Quod verò spatium XL simile sit spatio sub FH, FL, explicauimus in prop. 12. ex prop.24. lib.6. elem.

Primæ particulæ, quod hyperbola sit figura plana contenta sub linea DFE curua & recta DGE, additæ à nobis ob rationes allatas in solutione primæ quæstionis ad præcedentem definitionem quintam parabolæ; sunt generis loco, quia conueniunt etiam parabolæ. Reliquæ verò particulæ sunt partim etiam genericæ, partim specificæ. Quando enim dicitur quod conus datus debet secari primo plano per axem, vnde resultet triangulum per axem, cùm hoc sit commune omnibus alijs conisectionibus, videlicet parabolæ & ellipsi, imò etiam circulo generato in cono; illud etiam erit generis loco. Quando verò secatur conus altero plano secundo assignato secundum rectam lineam perpendicularem basi trianguli abstrahendo ab eius productione, vel non productione ductam in plano baseos circularis productæ vel non productæ; hoc etiam genericum est sectionibus parabolæ & ellipseos. Quando autem secatur conus plano prædicto secundo applicato secundum rectam lineam prædictam perpendicularem basi trianguli per axem, tùm etiam consequenter secatur triangulum per axem secundum rectam lineam diametralem sectionis, ita vt hæc recta linea seu diameter sectionis factæ in cono per hoc planum secundum, producta vltra triangulum versus verticem, concurrat cum altero latere trianguli per axem, istud est iam differentiæ vnius loco; nam diameter sectionis parabolicæ cùm sit parallela lateri vni trianguli per axem, illud secare nequit; & diameter ellipseos per propos. 13. secare debet ambo latera actu vel potestate dicti trianguli per axem, nullumque productum vltra verticem coni; sed etiam diameter circuli generati in cono, eadem ambo latera intersecare debet trianguli per axem non producta vltra verticem coni particularis in quo fit ille circulus: Atque ita manifestum est differentiam assignatam esse legitimam in hyperbola. Præterea cùm dicitur, quod recta linea educta ab linea curua hyperboles ad diametrum eius parallela prædictæ lineæ perpendiculari ad basim trianguli per axem, possit spatium seu rectangulum applicatum rectæ lineæ inueniendæ per lem.6. perpendiculari ad dictam diametrum hyperbolæ

in

in vertice eius communique ipsi diametro; ad quam rectam alia recta linea quæ sit portio diametri sectionis producta vltra verticem, sitaque inter ipsum verticem sectionis & concursum producti lateris trianguli per axem vltra verticem coni; eam proportionem habeat quam quadratum rectæ lineæ ab vertice trianguli eductæ ad basim ipsius trianguli parallelæ dictæ diametro sectionis hyperbolicæ, ad rectangulum sub partibus baseos dicti trianguli per axem; ita tamen vt dictum spatium seu rectangulum latitudinem habeat portionem diametri dictæ hyperbolæ inter verticem eius sitam, & prædictam rectam productam parallelam lineæ rectæ perpendiculari ad basim dicti trianguli; excedatque figura simili similiterque posita illi quæ sub recta linea inter punctum concursus lateris producti & diametri sectionis versus seu vltra vertices proprios, & sub dicta recta linea inuenta per lemma 6. quæ dicitur iuxta quam possunt rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ ad dictam diametrum eductæ ab punctis lineæ curuæ hyperbolicæ; istud etiam est differentia altera huius sectionis hyperbolicæ, quæ non conuenit Parabolæ iuxta prop.11. neque ellipsi iuxta prop.13. vti ratiocinando & comparando conuenientia, aduertere facilè quis potest.

Porrò ex eo quòd spatium seu rectangulum XF applicatum ad rectam FL, cui æquale est quadratum rectæ MN ordinatim applicatæ ad diametrum FG modo explicato, excedat figurâ XL spatium NL contentum sub prædictis rectis FL, FN, figura simili ipsi LH, contenta sub FH, FL; denominata est ab Apollonio sectio DFE hyperbola, hoc est excessus.

VIII.

Recta linea, iuxta quam possunt omnes recta lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum hyperboles ab punctis illius lineæ curuæ æquidistantes sectioni communi secantis secundi plani conum & efficientis hyperbolen, & baseos circularis coni. Vel Rectum latus Hyperboles respectu diametri suæ particularis cuiuscumque. Est recta linea educta perpendicularis ab vertice hyperboles diametro illius, ad quam rectam diameter ipsa hyperboles sita inter eius verticem & punctum concursus illius & lateris trianguli per axem, extra verticem coni, proportionem habeat quam quadratum rectæ lineæ parallelæ diametro ipsi hyperboles quæ educitur ex vertice coni seu trianguli per axem ad basim dicti trianguli, ad rectangulum sub dicta baseos partibus factis ab dicta recta linea parallela.

Exempli gratiâ recognoscendo figuram prop. 12. Est recta linea FL, educta ab vertice F communi hyperbolæ & diametro eius FG, ad diametrum ipsam FG perpendicularis; ad quam rectam FL inueniendam per lemma 6. recta HF sita inter verticem F prædictum, & concursum H vltra verticem, ipsius diametri GF, & lateris CA trianguli BAC per axem coni, eam proportionem habeat, quam quadratum rectæ AK æquidistantis transmissæ ab vertice A dicti trianguli vel coni secti ad basim BC in K dicti trianguli per axem, habet ad rectangulum sub BK, KC, dictæ baseos BC partibus factis ab dicta recta AK.

Hoc rectum latus in hyperbola habet commune cum reliquis omnibus lateribus rectis in alijs omnibus coni sectionibus, vt sit perpendiculare diametro, cuius est latus rectum, in eius vertice sito in linea curua sectionis. Differentia verò eius specifica est, vt ad illud eam habeat rationem assignatam recta linea quæ est portio diametri sita inter eius verticem & punctum concursus dictæ diametri & lateris trianguli per axem, vltra verticem coni. Nam ex prop.11. alia est ratio specifica lateris recti in parabola, & alia in ellipsi ex prop.13.

IX.

Ellipsis. Est figura plana, vnica linea curua comprehensa vel comprehensibilis, quæ fit. Quando conus primo plano secatur per eius axem, vnde resultat triangulum per axem rectilineumque: & secatur altero plano secundo conueniente vtroque latere dicti trianguli, quod neque basi æquidistet, neque subcontrariè ponatur; planum autem in quo est basis, & secundum planum secans conueniant secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis vel ad basim dicti trianguli per axem, vel ad illam quæ in directum ipsi constituitur, seu quod idem est ad productam dictam basim dicti trianguli: Et recta linea quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni planorum vsque ad diametrum sectionis, potest spatium adiacens lineæ ad quam sectionis diameter eam proportionem habeat quam quadratum lineæ diametro æquidistantis à vertice coni vsque ad trianguli basim ductæ productam, habet ad rectangulum contentum basis productæ partibus quæ inter ipsam & rectas trianguli lineas seu latera interijciuntur; latitudinem habens lineam quæ ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis; deficiensque figura simili & similiter posita ei quæ diametro & linea iuxta quam possunt, vel recto latere iuxta quod possunt prædicta recta linea ordinatim applicata ad diametrum, continetur.

Hæc definitio ellipseos, vti aliæ traditæ sectionum conicarum parabolæ & hyperbolæ, continet causas efficientes & materialem ipsius ellipseos, & nonnullas affectiones illius, & quædam necessaria omnino ad intelligendam eius originem in cono. quam definitionem in exemplo explicabimus consulendo figurationem propositionis decimæ tertiæ, è qua potissimum dependet, nonnullis à nobis additis.

Ellipsis igitur in cono existens hoc est in eius superficie, ratione circumferentiæ suæ.

Eſt figura plana vnica linea curua comprehenſa vel comprehenſibilis,qualis eſt figura ELD; quæ fit quando conus BAC ſecatur primo plano per axem eius AV acto habentem vnum ſuum extremum A in vertice A coni ſecti, & aliud extremum V in centro circularis BQC baſeos coni; ex qua ſectione, per prop.3. & coroll. noſtrum 1. ad illam, reſultat triangulum BAC rectilineum per axem AV prædictum coni, cuius trianguli baſis BC eſt diameter BVC dictæ circularis BQC baſeos. Iam verò ſi ſecundum planum ſecans conum & dictum BAC triangulum, ſecaret baſim circularem BQC, ſecundum rectam ductam in plano dictæ circularis baſeos coni perpendicularem ad baſim BC dicti trianguli, in aliquo eius puncto ex intermedijs, ita vt etiam productum hoc planum ſecundum ſecans, ſecare poſſet etiam latus AC dicti trianguli etiam productum vltra C; tunc per coroll. 2. ad lemma 4. reſultaret pro ſectione communi conicæ ſuperficiei & plani huius ſecundi ſecantis, figura plana comprehenſa acta linea curua & recta: verùm quia ſuperficies conica in infinitum aucta ſeu producta verſus baſim circularem concipi poteſt iuxta def. 1. inter primas, & triangulum etiam prædictum augeri poteſt producendo latera eius AB,AC, vltra baſim BC, & planum etiam ſecundum ſecans intelligi poteſt productum vndequaque in infinitum, quod in hoc conceptu ſecabit duo latera AB, AC producta; & per coroll. 3. ad lemma citatum 4. reſultabit pro ſectione huiuſmodi ſuperficiei conicæ ab dicto plano ſecundo, figura plana vnica linea curua comprehenſa, quæ actu non eſt huiuſmodi, quia actu non eſt ſuperficies conica producta, ſed ſolum ſecta non producta ab dicto plano ſecundo; ideoque etiam linea ſola curua exiſtens in ſuperficie coni actu non claudet ſpatium planum, niſi addatur recta linea quæ eſt ſectio communis dicti plani ſecundi ſecantis & plani baſeos circularis non productæ: quare conſultò addidimus particulas illas,comprehenſa vel comprehenſibilis figura plana,vnica linea curua. Quod ſi dictum planum ſecundum applicatum rectæ lineæ FG ductæ in plano baſeos circularis BQC producto vel non producto, ad angulos rectos ipſi BC baſi dicti trianguli per axem,quæ vel incidat in extremum vnum puta C, dictæ baſeos BC, vel in aliquod punctum puta G, productæ baſeos BC vltra C extremum vnum è ſuis; ſecuerit ſuperficiem coni, neceſſariò etiam ſecabit ambo latera AB, AC, in his duobus caſibus, nam ſimul etiam ſecat ipſum triangulum BAC per axem in recta linea aliqua per propoſ.3. lib.11. elem. ideoque etiam eius latera AB, AC; vnde etiam ſupra hoc planum ſecundum ſecans imminebit ſuperficies conica & vertex, ſolidum conſtituens cum plani ſecundi parte penetrante intra ipſum conum; quare per coroll.4. ad lemma 3. ſectio communis plani huius ſecantis ſecundi & ſuperficiei conicæ ſectæ erit linea curua in plano ſecante recepta, ſpatium planum actu circumambiens, quale eſt ELD. eſſe ellipſim figuram planam commune eſt Parabolæ, Hyperbolæ terminatis linea recta, & etiam circulo procreato ex coni ſectione: eſſe verò terminatam vnica linea curua vel terminabilem, ſi comparetur cum Parabola & Hyperbola erit differentia eius; quod ſi comparetur cum circulo in coni ſectione facto, erit generis loco. Cauſa materialis ellipſeos, vti reliquarum ſectionum conicarum, erit conus. Cauſa efficiens illam ſicuti & reliquas ſectiones conicas, erit planum ſecundum ſecans; proxima cum conditionibus aſſignatis; hoc eſt in ellipſi cùm ſecatur conus plano ſecundo conueniente actu vel potentia cum vtroque latere AB, AC, trianguli per axem prædicti; quod planum ſecundum neque baſi æquidiſtet coni ſecti, nam per prop.4. reſultaret ex hac ſectione circulus; tùm etiam idem planum ſecundum non ſit ſubcontrariè poſitum ipſi circulari baſi coni ſcaleni, nam ex huiuſmodi ſectione reſultaret etiam per propoſ.5. circulus. Planum autem hoc ſecundum ſecans debet conuenire cum plano circularis baſeos coni ſecundum rectam lineam FG ductam perpendiculariter ad baſim BC trianguli per axem, in plano circularis baſeos BQC, productam vel non productam, hoc eſt vt dicitur in definitione, perpendiculariter ad eam rectam quæ in directum baſeos trianguli per axem conſtituitur. Et cùm recta linea LM ducta ab quolibet puncto lineæ curuæ ELD ellipſeos parallela ipſi FG rectæ prædictæ communi ſectioni planorum ſecundi ſecantis & circularis baſeos BQC, vſque ad rectam ED, quæ eſt per coroll. 1. prop.7. diameter ſectionis ELD, effecta in plano trianguli BAC per axem, ab plano ſecundo ſecante, iuxta prop.3. lib.11. elem. quando planum ſecundum ſecans applicatumque prædictæ rectæ FG, ſecat conum, efficitque ellipſim ELD; ſimulque eius diametrum ED prædictam,ſecando planum trianguli per axem: quæ recta ED ſecat ambo latera AB, AC, dicti trianguli, vel ſecare debet, efficitque actu vel poteſtate aliud triangulum EAD, verſus A verticem, non ſimile ipſi BAC, & ſubcontrariè poſitum, vti explicauimus in prop.7. vnde colligitur quomodo etiam planum ſecundum ſecans ſit ſubcontrariè poſitum reſpectu baſeos circularis BQC dicti coni, hoc eſt efficiat dictum triangulum EAD ſubcontrariè poſitum reſpectu trianguli BAC per axem. Cùm,inquam,dicta recta linea LM poteſt ſpatium hoc eſt rectangulum XE, adiacens lineæ EH perpendicularis ad dictam DE diametrum ſectionis ellipſeos ELD, in puncto ſeu vertice E, illius diametri DE: ad quam rectam EH,dicta diameter ED eam proportionem habeat, quam qua-

quadratum rectæ AK lineæ transmissæ ab A vertice coni ad rectam BC productam æquidistantis ipsi ED diametro sectionis ELD, ad rectangulum sub BK, KC, partibus rectæ BC productæ inter punctum K in quo ipsam secat prædicta recta AK, & extrema A & B, laterum AB, AC, dicti trianguli per axem; spatium, inquam, XE vel MO, adiacens prædictæ rectæ EH, latitudinem habens EM portionem diametri ED sitam inter ipsam rectam LM, & E verticem ellipseos ELD, & diametri eius ED; deficiensque figura ON simili ei quæ sub tota diametro ED, & prædicta recta EH, continetur. Quod figura ON, similis sit ei quæ sub ED, EH, comprehenditur, patet ex prop. 24. lib. 6. elem. nam ducta recta HD, erit diameter figuræ sub DE, EH, & ex puncto M, rectæ ED, ducta recta MXN parallela ipsi EH, secans obuiam HD diametrum in X, & parallelam HS in N, per prop. 1 r. Procli, sumex puncto X ducta alia recta XO parallela ipsi ME, vel NH, secansque rectam EH in O, per cit. prop. 1 1. Procli, resultabit per citatam prop. 24. lib. 6. elem. figura NO similis ipsi sub DE, EH. Vocatur autem hæc sectio ELD conica, Ellipsis seu defectus, eò quòd rectarum ordinatim applicatarum ad eius diametrum quadrata sint æqualia rectangulo cuidam applicato ad rectam EH prædictam, deficienti figura simili ei quæ sub tota diametro prædicta; & recta EH. Quomodo verò reperiatur illa recta EH, & aliæ huiusmodi; quas vocat Apollonius iuxta quas possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum, & vocantur etiam latera recta in ellipsi respectu diametri eius datæ, diximus in prop. 13. ex lemmate 6. datis diametro DE, ellipseos, & quadrato rectæ prædictæ AK, & rectangulo prædicto sub BK, KC. Assignauimus in particulari causam efficientem & materialem ellipseos; tum genera definitionis huius communia alijs sectionibus; vnumque genus commune circulo. Quod si comparetur cum alijs sectionibus conicis, Parabola videlicet & Hyperbola, erit differentia, quod sit comprehensa figura vel comprehensibilis vnica linea curua. Supersunt etiam duæ differentiæ adnotandæ & in superioribus summatim assignatæ; Prima est vt diameter eius ED secet actu vel secare debeat versus basim ambo latera AB, AC, trianguli BAC per axem, sed non sit parallela basi BC trianguli prædicti, neque subcontrariè posita respectu illius: quæ proprietas nulli alteri sectioni conuenit conicæ, neque circulo; nam parabolæ diameter vni laterum trianguli per axem debet esse æquidistans per def. 5. & diameter hyperbolæ secare quidem debet dicta duo latera, sed vnum productum vltra verticem & non versus basim, iuxta def. 7. Denique diameter circuli procreati in cono, licet secet ambo latera dicti trianguli versus basim, vel secare debeat, tamen vel est æquidistans basi dicti trianguli vel subcontrariè posita respectu dictæ basis, iuxta prop. 4. & 5. Altera est vt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad eius diametros possint spatia adiacentia rectis ipsarum lateribus proprijs deficientia spatio simili ei quod continetur sub dictis diametris & lateribus rectis proprijs; quod non conuenit Parabolæ neque Hyperbolæ. Tertia potest dari, vt latera recta in ellipsi propria diametris suis diuersa ratione inquirantur seu dependeant ab diuersis datis in alijs sectionibus conicis, vt consideranti facilè manifestum erit.

X.

Recta linea iuxta quam possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum Ellipseos; vel Rectum latus in ellipsi respectu transuersi seu diametri propriæ. Est recta linea educta ab vertice diametri ellipseos perpendiculariter ad illam diametrum quæ sit communis sectio plani secundi efficientis ipsam ellipsim in cono secto, & trianguli per axem eius; ad quam diameter prædictam eam proportionem habeat, quam quadratum rectæ lineæ ductæ ab vertice coni seu dicti trianguli per axem, ad trianguli dicti basim productam, parallela dictæ diametro ellipseos, ad rectangulum sub dictis baseos partibus quæ inter dictam rectam parallelam sitæ sunt.

Exempli gratiâ in eadem figura propositionis 13. Est recta linea HE inuenienda per lemma 6. ad quam diameter DE ellipseos EDL originaria, eam proportionem habeat, quam quadratum rectæ AK eductæ ex vertice A coni vel trianguli BAC per axem eius parallela ipsi diametro ED, ad rectangulum sub BK, KC, partibus baseos BC dicti trianguli BAC per axem coni, sitis inter punctum K sectionis communis rectæ AK, & baseos BC productæ, & inter extrema B & C, dictæ baseos BC.

Conferendo definitiones laterum rectorum in conicis prædictis sectionibus notanda erunt genera ac differentiæ. Genus est omnibus commune vt sint rectæ lineæ perpendiculares diametris proprijs ex puncto verticum propriorum qui sunt puncta in lineis curuis sectionum extrema dictarum diametrorum. Differentiæ verò erunt, respectus particulares aliarum rectarum linearum diuersarum in singulis quos habent ad illa recta latera; vel illa ad illas. Nam in hoc recto latere ellipseos, est respectus quem habet diameter eius ad illud, idem qui est quadrati rectæ lineæ eductæ ab vertice trianguli per axem ad basim eius productam parallelæ diametro ellipseos, ad rectangulum sub baseos dicti trianguli productæ partibus inter punctum commune illi basi & dictæ parallelæ, & puncta extrema laterum dicti trianguli. Et in parabola, est respectus quem habet portio lateris trianguli per axem

inter diametrum ipsius parabolæ & verticem coni seu dicti trianguli, ad illud latus rectum, idem qui est quadrati baseos dicti trianguli ad rectangulum sub lateribus ipsius trianguli per axem. In Hyperbola autem est respectus quem obtinet diameter eius vel transuersum latus eius situm inter verticem ipsius & hyperboles, & inter punctum concursus eius cum altero latere trianguli per axem producto vltra verticem coni vel trianguli prædicti, ad illud rectum latus, idem qui est quadrati rectæ lineæ emissæ ab vertice coni seu trianguli per axem eius ad basim dicti trianguli, parallelæ diametro hyperboles, ad rectangulum sub baseos partibus factis non productæ dicti trianguli ab prædicta recta linea parallela. Verùm quia hæc differentia lateris recti in hyperbola videtur eadem quæ assignata in recto latere ellipseos, explicemus ac demonstremus quomodo differant inter se; Sintque sequentia duo corollaria nostra dirimentia litem, & designantia differentias proprias.

COROLL. NOSTRVM I.

In hyperbola, Recta linea AK educta ex vertice A, coni, vel trianguli BAC per axem eius, parallela diametro GFH originariæ ipsius hyperboles DFE, versus BC basim dicti trianguli; eam secat non productam, in K puncto ex intermedijs inter B & C.

Esto enim si fieri possit, recta AK, iuxta prop. 11. Procli, secet basim BC, in extremo eius C, vel B; vel secet in Y productam BC. si primum, duæ rectæ AK, & AB; vel duæ AK & AC, congruent inter se per ax. 21. lib. 1. elem. & sic quia AB secat diametrum GFH in F, etiam recta AK ipsam diametrum secabit, contra naturam parallelarum rectarum: simili modo, quia recta CA producta secat diametrum GFH in H, etiam recta AK producta ipsam diametrum secabit in H, contra naturam parallelarum. Si secundum, cùm duæ rectæ AC, AY, angulum in A constituentes se mutuò secent in A, ab inuicem ex puncto A diuaricabuntur productæ vltra A, & ad partes diuersas tendent, iuxta 11. ax. lib. 1. elem. quare recta YA producta ingredietur intra trianguli FHA aream, & producta in infinitum infringet latus HF, in O per ax. 28. lib. 1. elem. seu quod idem est concurret recta YA seu AK cum diametro GFH, contra naturam parallelarum rectarum linearum explicatam in def. 34. lib. cit. 1. elem. Hæc absurda manifestas reddunt falsitates positionum inuectarum contradicentium assertioni huius corollarij: relinquitur ergo vt recta AK secet rectam BC in puncto K ex intermedijs rectæ BC.

COROLL. NOSTRVM II.

In ellipsi, Recta linea AK educta ex vertice A, coni, vel trianguli BAC per axem eius, parallela diametro originariæ ED, ipsius ellipseos, versus basim BC dicti trianguli; eam secat productam in puncto K, etiam vltra punctum G, in quo productam BC secat illam ipsa diameter ED producta vltra D.

Tres obtinet casus hoc nostrum coroll. 2. Aut enim diameter ED transuersa ellipseos originaria intersecat ambo latera AB, AC, trianguli per axem BAC supra basim BC, vt in prima figura aut vnum puta AC in puncto C communi cum base BC vt in secunda figura; aut vnum puta BC, infra basim AC, vt in tertia figura. Quod verò diameter originaria transuersa, illa latera secare debeat, manifestum est ex prop. 13. His positis demonstro rectam AK parallelam diametro illi transuersæ originariæ, intersecare basim BC productam vltra C, in puncto K. Imprimis eam basim BC intersecare debet ex dictis in propos. 13. in puncto G, diameter transuersa originaria ED, in quo est assumpta perpendicularis recta FG ad ipsam met basim BC siue productam vel non productam: ergo per propos. 11. Procli recta AK parallela ipsi ED eandem basim BC intersecabit in aliquo puncto, quod dico esse K vltra C ad partes contrarias ipsi B. Quod si non ita sit vti asserimus, conueniat si fieri possit recta linea ex puncto A ducta parallela diametro ED originariæ cum basi BC in extremo eius puncto C, vel B; tunc verò congruet cum alterutro latere AB vel AC per ax. 21. lib. 1. elem. hæc verò latera secantur, vti vult 13. prop. ab diametro ED, igitur parallelæ rectæ lineæ se mutuò intersecabunt contra def. 34. lib. 1. elem. Vel conueniat si fieri possit cum aliquo puncto V vel M ex intermedijs baseos BC, progrediendo intra aream trianguli BAC, vel extra eius aream, ad partes alterutrorum laterum AB, AC: si progrediatur intra illam aream, in primo & secundo casu, seu in prima & secunda figura, obuiam diametrum ED secabit in O, tùm etiam occurret dictæ diametro ED in eodem O puncto, in tertio casu vel tertia figura, per ax. 29. lib. 1. elem. contra naturam parallelarum rectarum: Quod si progrediatur extra trianguli aream ad partes lateris AC, recta illa AV non congruendo cum ipso latere AC vti ostendimus; ipsum latus AC productum, vltra C, ipsam secabit in P, & sic duæ rectæ lineæ figuram comprehendent, contra 14. ax. lib. 1. elem. si verò progrediatur modo prædicto ad partes lateris AB, illa recta AM; latus AB productum, ipsam secabit in R, & sic etiam duæ rectæ lineæ spatium claudent; (debent enim

per ax.11.lib.eiusdem 1. elem. duæ rectæ lineæ AB,BC, vel AC, BC, se mutuò interfecare in punctis A, C, & ad partes contrarias incedere.) Sed & etiam diameter DE producta vltra E ipsam rectam AM introductam interfecaret in N puncto, contra naturam parallelarum.

Aduersarius effugere non potest afferendo dictam rectam secare in H basim BC productam vltra B; nam cùm diameter DE, & latus AC se mutuò secent in E, & per ax. 11. cit. incedere debeat DE producta, intra trianguli HAB aream, secaret in N rectam AH sibi parallelam, per ax. 28. lib. 1. elem. contra naturam parallelarum.

Hæc absurda deducta ex positionibus aduersarijs contradicentibus assertioni nostræ, illas condemnant; & astruunt nostram assertionem.

COROLL. NOSTRVM III.

In omni triangulo rectilineo, puta BAC; si ducta fuerit recta linea FG secans vnum latus AB in F, & aliud latus CA in H productum vltra A angulum factum dictis lateribus, & basim BC in G puncto ex intermedijs illius BC: Recta linea AK posita parallela ipsi FG, ab angulo prædicto A, versus basim BC; ipsam basim BC secabit in K puncto ex intermedijs illius.

HOc demonstrauimus in corollario nostro primo, consulendo delinationem figuræ coroll. nostri 1. ad hanc def. 10.

COROLL. NOSTRVM IV.

In omni triangulo rectilineo, puta BAC; si recta linea ED fuerit inclinata ad basim BC, secans duo latera non producta AB, AC, trianguli, efficientia angulum A, illud in E, hoc in D, quod non sit extremum C: Recta linea BD producta versus D & inclinationem datam, secabit basim BC in G productam vltra C, & recta linea AK emissa ab angulo A æquidistans ipsi ED, secabit basim eandem BC productam vltra C, in puncto vlteriore K.

DEmonstratio huius corollarij est eadem quæ tradita est in demonstratione ad corollarium præcedens nostrum 2. consulendo figuram 1.

COROLL. NOSTRVM V.

In omni triangulo rectilineo, puta BAC; si recta ED secet ambo latera AB, AC, & basim BC non productam in puncto C: recta linea AK ducta parallela ipsi ED, ab angulo BAC facto ab dictis lateribus; secabit basim BC productam vltra C, in puncto K. Quod si dicta recta ED, secet actu latus AB in E, & potestate aliud latus BC producendum vltra C, & basim BC actu in aliquo eius G puncto ex intermedijs; prædicta recta AK ducta ab angulo BAC parallela ipsi ED, secabit basim BC productam vltra C, in puncto K.

HOc postremum corollarium demonstratum est in coroll. nostro 2. consulendo pro prima parte figuram 2. & pro secunda parte figuram 3.

Ex dictis in nostris corollarijs primo & secundo colligitur differentia inter respectum diametri in hyperbola ad rectum suum latus, & respectum diametri in ellipsi ad rectum suum latus: nam in hyperbola est respectus quadrati rectæ lineæ AK æquidistantis diametro FG illius hyperbolæ, ductæ ab A vertice trianguli BAC per axem coni, ad rectangulum baseos BC partibus BK, KC, factis ab recta linea AK parallela diametro FG; secante basim BC in puncto K ex intermedijs BC: At verò in ellipsi est relatio quadrati rectæ AK æquidistantis diametro ED ipsius ellipseos emissæ ab A vertice coni, vel trianguli BAC per axem eius, & secantis in puncto K, basim BC dicti trianguli productam, ad rectangulum sub partibus dictæ baseos productæ, inter punctum K, & extrema C & B, dictæ baseos BC; verbi gratiâ sub partibus seu rectis BK, KC. Itaque differentia rectorum laterum in hyperbola & ellipsi, erit quod in hyperbola recta linea AK ducta parallela diametro hyperboles semper secet basim BC dicti trianguli per axem, in punctorum eius vno ex intermedijs, puta K. In ellipsi verò quod hæc recta AK emissa ex A vertice coni vel trianguli BAC per axem eius parallela diametro DE ipsius ellipseos, semper secet productam basim BC, in puncto K.

X.

Sectiones oppositæ. Sunt duæ Hyperbolæ communè habentes latus transuersum situm inter earum vertices, & æqualia latera recta respectu dicti lateris transuersi seu diametri. Progenitæ ab sectione plani secundi secantis, de quo mentionem fecimus in def. 7. quandò secat duas superficies conicas communem habentes verticem effectas ab eadem recta linea iuxta def. 1. inter primas, vel duos conos terminatos prædictis duabus sectionibus conicis, & circularibus basibus parallelis, eodem modo quo secatur vnus in effectione vnius hyperboles.

HÆc definitio tradit originem oppositarum ipsarum sectionum, & causas ipsarum, & materiam: oriuntur enim ex conis sectis tanquam materia, & causæ ipsarum sunt duo plana secantia dictos conos; vnum per axem communem; alterum & secundum, quodque causa proxima est, iuxta formam traditam & explicatam tam in prop. 12. quàm in

def.7. Differentia autem ab alijs omnibus coni sectionibus est vt duæ sint planæ figuræ in eodem plano sustentatæ, singulæque hyperbolæ, terminatæ suis proprijs lineis curuis, & rectis, vti in vna explicauimus definitione citata 7. conrapositæ secundum vertices: & quod earum sit communis diameter, seu transuersum latus, modo explicato in prop. 16. èqua etiam desumitur ista definitio; tùm æqualia sint earum latera recta, vti explicatum est ac demonstratum in prop. 16. Quæ differentia nulli alteri sectioni coni conuenit, si comprehendas etiam circulum è coni sectione procreatum; de quo in def.15. dicemus.

XI.

Latera recta oppositarum sectionum, seu recta iuxta quas possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro ipsarum oppositarum sectionum: sunt duæ rectæ lineæ æquales perpendiculares diametro seu transuerso lateri communi dictis oppositis sectionibus, eandem naturam habentes atque vnum latus rectum vnius ex illis sectionibus explicatam in definitione 8. inter istas secundas.

HÆc definitio dependens ex propos. 16. definitione 8. & 10. procedentibus, manifesta est. & hæc duo latera recta satis distinguntur ab vnico in hyperbola vna, numero ipso binario.

XII.

Esse triangulum rectilineum in triangulo rectilineo, ex parte verticis simile quidem ei in quo describitur, sed subcontrariè positum. Est quando in dato triangulo rectilineo recta linea ducitur secans ambo eius latera comprehendentia angulum, minimè æquidistans basi; resultat aliud triangulum communem habens angulum prædictum; & anguli ad basim huius resultantis trianguli sunt æquales angulis ad basim dati trianguli, sinister dextro, dexter sinistro.

EXempli gratiâ in figuratione propositionis 5. Datum sit triangulum rectilineum BAC; & ducta recta GK minimè æquidistans basi BC, & secans in G, latus AB, & in K latus AC; (ambo, inquam, latera AB, AC, angulum BAC verticis efficientia) vnde resultat triangulum aliud GAK in dato BAC triangulo, communem habens angulum A verticis cum dato triangulo: & angulus AGK ad basim GK trianguli resultantis, sinister est æqualis angulo ACB dextero trianguli dati in base eius BC; & alter angulus dexter AKG ad basim GK trianguli resultantis, est æqualis angulo ABC sinistro ad basim BC trianguli dati. Quæ duo triangula erunt sic æquiangula; ideoque per 4. prop. lib. 6. elem. obtinebunt latera proportionalia circum angulos æquales; vnde per def.1. lib.cit.6. ele. erunt similia.

XIII.

Esse planum secans conum, applicatum rectæ lineæ perpendiculari in plano circularis eius baseos productæ vel non productæ, ad basim trianguli per axem dicti coni; minimè positum subcontrariè plano trianguli per axem. Est quando planum secans conum applicatum prædictæ rectæ lineæ, secat etiam triangulum prædictum per axem secundùm rectam lineam secantem latera dicti trianguli; resultatque aliud triangulum factum ab portionibus laterum trianguli secti, communem habens angulum cum secto triangulo versus verticem; & anguli ad basim resultantis trianguli non sunt æquales angulis secti trianguli ad basim, dexter sinistro, sinister dextero.

VIde pro explicatione huius definitionis figuram propositionis 13. Igitur sit conus BAC sectus plano aliquo per axem eius, vnde oriatur ex hac sectione iuxta propos. 3. triangulum rectilineum per axem eius BAC, cuius basis BC existens in plano circularis BQC baseos secti coni, erit diameter dicti circuli per coroll. nost.1. ad cit. prop.3. Sit verò in plano huius circuli producti vel non producti, recta linea FG ad angulos rectos basis BC productæ vel non productæ: & aliud planum concipiatur applicatum huic rectæ lineæ FG perpendiculari ad BC basim dicti trianguli BAC per axem, productam vel non productam; & secans etiam conum datum, & triangulum BAC etiam, secundum rectam lineam EDG, iuxta prop. 3. lib.11. element. quæ secet AB, AC, latera dicti trianguli continentia angulum BAC verticis seu oppositum basi, AB quidem latus in E, AC verò latus in D: vnde resultet triangulum EAD, communem angulum A habens cum secto triangulo BAC, contentum sub EA, DA, portionibus laterum AB, AC sectorum: Et comparando angulos AED, ADE, ad basim ED, trianguli EAD resultantis, cum angulis ABC, ACB, ad basim trianguli BAC secti; sit angulus AED sinister inæqualis angulo dextero ACB; & angulus ADE dexter sit inæqualis, angulo ABC sinistro. Planum secans conum applicatum rectæ lineæ perpendiculari ad basim trianguli per axem dicti coni in plano circularis eius baseos, & efficiens pro sectione communi ipsius & trianguli per axem coni rectam illam lineam secantem latera dicti trianguli per axem, vnde resultat triangulum aliud habens communem angulum verticis seu oppositum basi trianguli per axem; & illius ad basim anguli sint inæquales angulis ad basim huius, sinister dextero, dexter sinistro: dicitur planum non subcontrariè positum basi circulari coni dati secti.

XIV.

XIV.

Sectio subcontraria in cono. Est quando conus scalenus 1. plano per axem eius secatur ad rectos angulos ipsi basi; secaturque altero plano secundo ad triangulum per axem recto, quod ex parte verticis triangulum abscindat simile ei quod per axem, subcontrariè verò positum: circulus, inquam, resultans ab hac sectione coni per secundum planum.

HÆc definitio desumpta est ab propositione quinta, lucemque sumet ab definitione 12. inter has secundas. Et pro eius declaratione, recognoscenda erit figura prop. cit. 5. Itaque conus BAC scalenus sectus sit primo plano per axem eius AN, rectaque ad eius basim BLC circularem, resultetque per prop. 3. triangulum BAC per axem AN: sectusque sit altero plano secundo perpendiculari ad hoc triangulum BAC per axem, quod etiam secet triangulum BAC prædictum, secundum rectam lineam GK per prop. 3. lib. 11. elem. quæ triangulum GAK abscindat ex parte verticis A coni vel dicti trianguli BAC per axem, simile ipsi triangulo per axem prædicto BAC, subcontrariè verò positum iuxta def. 12. inter has secundas: resultetque ex hac sectione coni per hoc secundum planum circulus iuxta prop. 5. hæc sectio erit subcontraria.

XV.

Circulus in cono procreatus beneficio plani secantis ipsum conum. Est figura plana vnica linea curua comprehensa: quando conus scalenus primo plano secatur per axem eius, ad angulos rectos ipsius basi circulari, vnde resultat triangulum rectilineum per axem; tùm altero plano secundo secatur perpendiculari ad dictum triangulum, quod ex dicto triangulo abscindat versus verticem dicti trianguli vel coni, aliud triangulum simile ei prædicto quod per axem, subcontrariè verò positum: vel quicumque conus secatur plano secundo parallelo circulari basi coni. Et recta omnes lineæ ab dicta linea curua perpendiculares eductæ ad diametrum eius, seu ad rectam lineam quæ est sectio communis dicti trianguli per axem & plani secundi secantis conum, possunt spatia contenta sub duabus partibus dictæ diametri sitis inter dictas perpendiculares rectas lineas proprias.

PLacuit hoc loco definire circulum generatum ab sectione coni per planum secans illum, ad instar aliarum sectionum conicarum Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, & sectionum oppositarum. Pro explicatione vide figuras propositionum quartæ & quintæ. Definitio verò hæc lucem mutuabitur ab citatis propositionibus, & definitionibus etiam 12. & 14. inter has secundas.

Itaque si conus BAC propositionis 5. plano primo secetur per axem eius AN; & perpendiculari ad basim BLC circularem eius; vnde per propos. 3. resultet triangulum BAC per axem AN: tùm altero plano secundo etiam perpendiculari ad dictum triangulum; cuius plani secundi & dicti trianguli sectio communis recta linea GK iuxta prop. 3. lib. 11. elem. secans latera AB, AC, dicti trianguli in G & K, efficiat triangulum GAK, ex parte verticis A, simile dicto triangulo BAC, subcontrariè verò positum, secundum definitionem 12. inter has secundas. Vel consulendo figuram propositionis quartæ, planum hoc secundum secans conum sit parallelum basi circulari BLC ipsius coni secti. Efficiat verò hoc planum secundum in cono sectionem GHK in figura prop. 5. & in figura propos. 4. sectionem DHE, & rectam lineam DE pro sectione communi dicti trianguli per axem & plani secundi secantis. Quæ duæ rectæ GK, DE, erunt per coroll. prop. 7. diametri dictarum duarum sectionum; ipsa quidem GK in figura prop. 5. illa verò DE in figura prop. 4. Porro prædictæ duæ sectiones GHK, DHE, terminabuntur linea vnica curua iuxta lemmatis tertij coroll. 4. Et rectæ omnes lineæ eductæ ab dicta linea curua ad diametrum GK vel DE perpendiculares, verbi gratiâ instar omnium in figura prop 5. recta HO, possit spatium sub GO, OK, partibus diametri GK, factis ab dicta perpendiculari recta OH; & in figura prop. 4. recta HG possit spatium sub DG, GE. Tunc sectio GHK, vel DHE, erit circulus procreatus ab sectione coni per planum, modo explicato.

In hac definitione genus est, esse figuram planam, quod commune est omnibus antecedentibus sectionibus conicis definitis præsertim ellipsi. Esse verò figuram vnica linea comprehensam, genus est commune ellipsi: sed si conferatur cum parabola & hyperbola, erit loco differentiæ; impossibile enim est vt linea curua parabolæ sola concludat spatium, nam per coroll. nost. 3. ad prop. 11. in infinitum extenditur ex parte opposita vertici, & extrema eius semper ab inuicem magis diuaricantur; quod etiam conuenit hyperbolæ per coroll. nost. 4. ad propos. 12. Atoma autem huius sectionis definitæ differentia est in eo quòd rectæ omnes lineæ perpendiculares ad diametrum eius originariam eductæ ab punctis lineę eius curuæ, possint spatia contenta sub segmentis proprijs ab ipsis effectis in diametro seu recta linea angulum efficiente cum curua: nam si conueniret id alijs sectionibus definitis, Parabolæ, hyperbolæ, & ellipsi ipsæ essent circuli per lemma 5. quod repugnat; nam parabolæ linea sola curua ostensa est non claudere spatium; tùm etiam hyperbolæ linea sola curua: ellipsis verò dum fit in cono iuxta prop. 13. vel def. 9. inter has secundas, planum eam efficiens secundum, non debet esse subcontrariè positum basi circulari coni, neque parallelum illi, quod

quod tamen requiritur ad hanc sectionem quæ circulus est.

XVI.

Rectum latus in circulo; vel recta linea iuxta quam possunt recta omnes lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum circuli ab punctis circumferentiæ illius. Est recta linea educta perpendiculariter ad diametrum circuli, ab vno extremo eius, æqualisque ipsi diametro; ita vt quadratum cuiuslibet ex prædictis rectis ordinatim applicatis ad diametrum ipsam, possit rectangulum applicatum dicto lateri recto, sub portione diametri inter prædictam rectam ordinatim applicatam, & dictum latus rectum, & sub recta ipsa ordinatim applicata producenda si opus sit, inter ipsam diametrum, & rectam aliam ductam ab extremo lateris recti altero, ad extremum aliud diametri prædicta; deficiens figura simili ei qua sub diametro & latere recto comprehenditur.

PRo explicatione huius definitionis, consule figuram lemmatis 8. In qua in extremo A, diametri AB circuli, est perpendicularis ipsi diametro AB, in eius extremo vno A, recta AC æqualis ipsi diametro AB: hæc recta AC erit rectum latus in circulo AEB, seu recta iuxta quam possunt rectæ lineæ omnes ordinatim applicatæ diametro AB, ab circumferentia circuli. Exempli gratiâ instar omnium sit recta linea ED ordinatim applicata diametro AB: hæc si concipiatur producta vltra D, ad circumferentiam circuli; quia per def. 10. inter primas bifariàm ab diametro AB diuiditur, erit per prop. 3. lib. 3. elem. ad angulos rectos ipsi diametro. Ducta verò recta CB vniente extremum C dicti lateris cum extremo alio B dictæ diametri, efficiet triangulum rectangulum CAB, isosceles: producendo autem rectam DE si opus sit vltra E, secabit in F rectam CB, per prop. 11. Procli; vel secabit ipsam obuiam CB, antequam applicata sit ad diametrum AB; vel simul etiam in eodem puncto circumferentiæ ipsam CB intersecabit: & sic quia duo anguli in A & D, sunt recti, erunt parallelæ rectæ lineæ AC, DF, per prop. 28. lib. 1. elem. ergo quia in triangulo CAB isosceli, recta linea DF est parallela lateri AC, erit recta DF æqualis ipsi DB segmento diametri AB, inter ipsam rectam DF & B extremum diametri AB, per coroll. nostrum ad lemma cit. 8. tùm per 43. lemma, ipsa DF recta erit minor quàm latus AC rectum cui est parallela ostensa. Quare per prop. 3. lib. 1. elem. poterimus de maiore recta AC detrahere rectam AH æqualem minori DF; quocirca si ducatur recta HF, erit æqualis & parallela ipsi AD segmento diametri inter latus rectum AC & rectam DE ordinatim applicatam diametro AB, idque per prop. 33. lib. 1. elem. eritque resultans rectangulum AF, sub dicto segmento AD, & sub DEF ordinatim applicata; sumendo ipsam DF compositam ex ordinatim applicata DE, & productione eius EF: quod parallelogrammum AF erit rectangulum, per lemma 13. ob angulum in A rectum, & erit applicatum dicto AC lateri recto, deficiens parallelogrammo FC, simili ei verbi gratiâ BC, sub CA, AB, hoc est sub latere recto AC, & diametro AB, iuxta def. 6. & prop. 24. lib. 6. elem. Porrò cùm sint ostensæ rectæ DF, DB, æquales, erit per lemma 49. rectangulum AF sub AD, DF, æquale rectangulo sub AD, DB, partibus diametri AB factis ab recta DE ordinatim applicata. Est verò per lemma 47. rectangulum sub AD, DB, æquale quadrato rectæ ED ordinatim applicatæ diametro AB ad angulos rectos; ergo per ax. 1. lib. 1. elem. quadratum ipsius rectæ ED erit æquale rectangulo prædicto AF, sub AD, & DF, applicato ad rectum latus AC, deficiens figura CF, simili figuræ sub CA, AB, latere videlicet recto AC, & diametro AB. Atque ita explicata remanet hæc definitio.

Genus ad omnia recta latera, est esse rectam perpendicularem diametro in extremo vno illius. Differentia atoma est huius lateris recti, est vt sit æquale latus rectum cuicumque diametro circuli, quod non competit alijs lateribus: & quod rectangulum cui comparatur quadratum rectæ lineæ ordinatim applicatæ in genere æqualitatis, habeat duo latera æqualia segmentis diametri factis ab recta linea ordinatim applicata, angulum rectum comprehendentibus. Præterea in parabola est æqualitas huiusmodi inter quadratum & spatium, sine vllo excessu vel defectu; & in hyperbola est cum excessu. In ellipsi verò est cum defectu in quo genericè conuenit; sed in alio primo assignato differt.

XVII.

Diameter originaria sectionum conicarum. Est recta linea, sectione communis plani secundi efficientis in cono sectionem conicam, & plani trianguli per axem coni secti plano primo.

HÆc definitio manifesta est inductione per omnes sectiones conicas commemoratas, in vniuersum quidem in coroll. 1. prop. 7. In particulari verò in parabola, propos. 11. In hyperbola, prop. 12. In ellipsi prop. 13. In oppositis sectionibus, prop. 14. etiamque in circulo, prop. 4. & 5.

XVIII.

Transuersum latus, seu diameter transuersa sectionum conicarum. Est recta linea quæ producta saltem, intra locum sectionum ingreditur, vel etiam extra locum producta egreditur, & ordinatim applicatas rectas omnes ad illam ex punctis quibuslibet

bet linea curuæ sectionis, bifariàm diuidit.

APollonius in definitione 13. inter primas, solùm meminit transuersæ diametri seu transuersi lateris duarum linearum curuarum, quales sunt sectiones oppositæ de quibus agit propos. 14. & 16. ex quibus & nostro commentario in illas constat transuersum latus seu diametrum transuersam ipsarum oppositarum sectionum conicarum, esse & accipi non solùm pro ea parte diametri originariæ ipsarum, quæ inter vertices ipsarum sita est; sed etiam pro tota dicta diametro originaria producta intra locum linearum curuarum vtriusque sectionum oppositarum. Nos verò in hac definitione attendentes ad ea omnia quæ docet ipse Author de transuerso latere seu transuersa diametro, statuimus esse rectam lineam quæ saltem producta intra locum quarumlibet conicarum commemoratarum sectionum ingreditur; vel existens intra locum prædictum, producta etiam egreditur & secat ipsas lineas sectionum curuas: verùm vti diameter debet per def. 10. vel 13. inter primas, bifariàm diuidere rectas omnes lineas ordinatim applicatas ad hanc transuersam diametrum vel latus transuersum sectionis aut sectionum conicarum. nam diametros sectionum sæpe producit extra lineas curuas ipsarum, totasque vocat diametros transuersas vel transuersa latera; vt videre erit in sequentibus.

XIX.

Rectum latus sectionum conicarum. *Est recta linea perpendicularis diametro transuersæ vel transuerso lateri sectionum educta ad vnam partem illius diametri ex vertice eius; cuius recti lateris magnitudo in singulis sectionibus peculiari modo erit determinanda, vt vnà cum transuerso latere vel diametro sectionum prædicta vel eius portione, rectangulum efficiat applicatum ipsi lateri recto; ad quod rectangulum quadrata rectarum linearum ordinatim applicatarum ad dictum latus transuersum vel transuersam diametrum rationem habeant vel æqualitatis, vel excessus, vel defectus.*

HÆc definitio explicanda est, ex dictis in propositionibus proprijs dictarum sectionum, tùm ex definitionibus secundis earumdem sectionum. nam constat semper debere esse perpendiculare rectum latus diametro seu lateri transuerso: & in parabola quadratum rectæ lineæ ordinatim applicatæ eius diametro vel lateri transuerso, esse æquale rectangulo sub portione dicti transuersi lateris & eius latere recto proprio: in hyperbola verò esse æquale rectangulo applicato ad latus rectum excedenti, comprehenso sub portione lateris transuersi & recta maiore quàm sit latus rectum: quod etiam proportione seruata intelligendum est in oppositis sectionibus: & in ellipsi esse æquale rectangulo applicato ad latus ipsum rectum, deficienti, comprehenso sub portione transuersi lateris, & portione ipsius lateris recti.

XX.

Spatium ad quod comparatur quadratum rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro transuersæ seu transuerso lateri sectionis. Est rectangulum sub portione dictæ diametri, vel lateris transuersi, & sub toto latere recto proprio, vel eius parte, vel sub ipso producto, contentum.

IN omnibus sectionibus conicis vidimus spatia quibus comparantur quadrata rectarum linearum ordinatim applicatarum ad transuersa earum latera esse parallelogramma sub portionibus dictorum transuersorum laterum, & rectis lateribus ipsorum proprijs positis ad angulos rectos ipsis transuersis, siue adæquatis rectis lateribus, siue partibus eorum, siue etiam productis: quare per lemma 13. ipsa spatia parallelogramma erunt rectangula. Igitur similia spatia proposita in hac definitione, rectè vocantur à nobis rectangula. Reliqua verò manifesta sunt ex adductis in declaratione superioris definitionis 19. qua constat vnum latus dictorum rectangulorum esse partem transuersi, aliud verò esse vel adæquatum ipsum latus rectum vt in parabola; vel ipsum productum, vt in hyperbola; vel partem eius, vt in ellipsi. Ex quibus sequitur hoc corollarium nostrum.

COROLL. NOSTRVM I.

Ex his duabus definitionibus postremis explicatis aperte colligitur quare diameter transuersa sectionum conicarum, & recta linea iuxta quam possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametros ipsas transuersas in singulis sectionibus denominentur latera: nam sunt latera rectangulorum ad quæ comparantur quadrata dictarum rectarum linearum ordinatim applicatarum ad ipsas diametros.

COROLL. NOSTRVM II.

Ex dictis in singulis sectionibus conicis, colligitur seu confirmatur cur vnum latus rectangulorum ad quæ comparantur quadrata rectarum linearum ordinatim applicatarum diametris ipsarum sectionum, vocetur latus transuersum, aliud rectum. Transuersum quidem quia per locum sectionum transmittitur seu incedit: Rectum verò quia est ad angulos rectos ipsi transuerso.

IN sequentibus alijs definitionibus agemus præsertim de lineis curuis sectionum conicarum, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, & sectionum oppositarum, tum circuli, quatenus in plano recipiuntur, sine respectu immediato

ad

ad sectionem coni: tùm etiam de lateribus eorum rectis ac transuersis. Nam ex his definitionibus infinitæ praxes facilitatem maximam & claritudinem demonstrationis nanciscentur. Verumtamen ex demonstratis in superioribus propositionibus præsertim 4.5.11.12.13. & corollarijs nostris ad illas dependebunt.

XXI.

Parabola. Est linea curua in plano recepta, qua figuram se sola continere nequit: ad cuius diametrum transuersam recta quæuis linea ordinatim applicata, est media proportionalis inter portionem dictæ diametri transuersa terminatam suo vertice proprio & prædicta recta ordinatim applicata, & rectum eiusdem diametri latus.

XXII.

Hyperbola. Est linea curua in plano recepta, qua figuram se sola continere nequit: ad cuius diametrum transuersam recta quæuis linea ordinatim applicata, est media proportionalis inter portionem dicta diametri transuersa terminatam suo vertice proprio & prædicta recta ordinatim applicata, & rectum eiusdem diametri latus productum; ita vt rectangulum sub dicta portione diametri transuersa & recto eius latere producto, sit æquale quadrato recta linea ordinatim applicata.

XXIII.

Ellipsis. Est linea curua in plano recepta, qua figuram se sola continet vel continere potest: ad cuius diametrum transuersam recta quæuis linea ordinatim applicata, est media proportionalis inter portionem dicta diametri transuersa terminatam suo vertice proprio & prædicta recta ordinatim applicata, & recti eiusdem diametri lateris portionem; ita vt rectangulum sub dicta portione diametri; & portione lateris eius recti, sit æquale quadrato recta linea prædicta ordinatim applicata.

XXIV.

Sectiones oppositæ. Sunt duæ curuæ lineæ hyperbolicæ singula, in plano recepta eodem, & separata, & opposita secundum vertices, qua seipsis singula figuram includere nequeunt: ad quarum diametrum communem transuersam recta quæuis linea ordinatim applicata in earum vtriuslibet locis, est media proportionalis inter portionem dicta diametri transuersa terminatam vertice suo proprio existente in linea curua sectionis intra cuius locum applicata est dicta recta ordinatim applicata, est dicta recta ordinatim applicata, & inter latus rectum in eadem sectione proprium dicta diametri productum; ita vt rectangulum sub portione dicta diametri transuersa, & recto latere producto, sit æquale quadrato prædicta recta linea ordinatim applicata.

XXV.

Circulus. Est curua linea in plano recepta, figuram claudens, vel quæ claudere possit: ad cuius diametrum transuersam, quæuis recta linea ordinatim applicata, semper ad angulos rectos, est media proportionalis inter dicta diametri segmenta facta ab dicta recta linea ordinatim applicata.

Necesse fuit præmittere dictas definitiones, ad assignanda genera & differentias illarum.

Moneo autem me sumere hoc loco Parabolam, Hyperbolam, Ellipsim, sectiones oppositas & circulum, solummodò pro lineis curuis; seu quod idem est me solùm definire lineas curuas illarum, seu lineas illarum ortas in superficie conica secta plano secundo: & assumere me proprietatem singulis dictis sectionibus propriam, quâ vna distinguatur ab alia.

Itaque genus est commune Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipsi, sectionibus oppositis, etiam circulo, esse lineas curuas in plano receptas, per lemma 3. sunt enim vti habent prop. 11.12.13. 14. & 4. & 5. sectiones communes conicarum superficierum sectarum plano minimè acto per verticem coni, & plani ipsius secantis; quare erunt receptæ in plano, illæ lineæ curuæ. Genus etiam erit commune ellipsi & circulo, esse lineas curuas figuram claudentes, aut quæ possint comprehendere spatium, iuxta ea quæ ostendimus in prop. 4.5. & 13. Aliud genus erit commune tantùm Parabolæ & Hyperbolæ, & sectionibus oppositis, vt sint lineæ curuę se ipsis non valentes claudere spatium, vti probauimus in corollarijs nostris, 3. quidem ad prop.11. pro Parabola. 4. ad prop. 12. pro hyperbola. 5. ad prop.14. pro sectionibus oppositis.

Differentia in Parabola erit, vt quælibet recta linea ordinatim applicata diametro eius, sit media proportionalis inter portionem huius diametri terminatam prædicta recta linea ordinatim ad illam applicata, & vertice ipsius diametri, & inter latus eius rectum adæquatum. Et huiusmodi recta linea ordinatim applicata diametro transuersæ in hyperbola est media proportionalis inter portionem quidem diametri prædictæ sitam inter verticem eius & prædictam rectam lineam ordinatim applicatam, & latus eius rectum non adæquatum sed productum; ita vt rectangulum sub dicta portione diametri transuersæ, & latere recto producto sit æquale quadrato rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad prædictam diametrum transuersam. Simili etiam modo in sectionibus oppositis. In ellipsi verò inter eodem modo terminatam portionem diametri transuersæ, & lateris eius recti portionem minimè producti; ita vt rectangulum sub portione diametri transuersæ, & sub portione lateris recti sit æquale

æquale quadrato rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad prædictam diametrum. In circulo denique inter segmenta diametri eius transuersę, modo sit semper ad angulos rectos ordinatim applicata diametro. Et sic differentiæ huiusmodi assignatæ ita sunt propriæ singulis, vt nulli huiusmodi alteri sectionum conicarum conueniant.

XXVI.

Rectum latus in parabola. Est tertia recta linea proportionalis, datis duabus hoc ordine; primâ, portione diametri transuersæ illius inter verticem eius, & rectam lineam ordinatim applicatam dictæ diametro transuersæ; secundâ verò, ipsamet recta linea ordinatim applicata prædicta: tertia, inquam, illa proportionalis, vel illi æqualis, perpendicularis diametro transuersæ ex eius vertice ad vnam partem.

Exempli gratiâ. In Parabola dato latere transuerso AB, & recta linea CB ordinatim applicata illi lateri transuerso AB; siue ad angulos rectos, quando ipsum latus transuersum est axis; siue ad angulos obliquos, quando latus transuersum non est axis. Rectum latus respectu transuersi AB, erit recta linea AD perpendicularis ipsi lateri transuerso AB, ad vnam eius partem, ex puncto verticis A; quæ sit tertia proportionalis, vel æqualis ipsi tertiæ proportionali; datis duabus rectis; prima AB, portione videlicet lateris transuersi AB, sita inter verticem eius A, & rectam lineam CB ordinatim applicatam ipsi transuerso lateri; secunda verò, ipsamet recta CB ordinatim applicata prædicta.

Hæc definitio recti lateris Parabolæ desumpta est ab propos. 11. & corollar. nostro 1. ad illam.

XXVII.

Rectum latus in Hyperbola. Est recta linea minor, tertia recta linea proportionali perpendiculari lateri transuerso ex puncto ipsius, in quo applicatur ordinatim recta linea: datis duabus; prima, portione diametri transuersæ terminata vertice eius. & ipsa recta linea ordinatim applicata ad dictam diametrum; secunda verò, ipsa recta linea ordinatim applicata prædicta: minor, inquam, recta linea tertia proportionali; perpendicularis etiam dicto lateri transuerso, in puncto verticis eius, ac terminata ipso puncto verticis ex vna parte, & ex alia parte puncto intersectionis communis recta linea deducta ab altero extremo transuersi lateris per extremum tertia proportionalis inuenta perpendiculariterque posita ad vnam partem lateri transuerso ex puncto eius & recta linea prædicta ordinatim applicata ipsi.

Exempli gratiâ in Hyperbola, dato eius latere transuerso quocumque BAE, & recta linea GE ordinatim applicata ad illud, siue ad angulos rectos quando ipsum latus transuersum est axis, siue ad angulos obliquos quando ipsum latus transuersum non est axis; Rectum, inquam, latus eius est recta HA perpendicularis ad latus transuersum BAE, ex eius vertice A, quod etiam vertex est Hyperboles, ad vnam tantùm partem ipsius lateris transuersi BAE; minorque quàm tertia recta linea ED proportionalis & perpendicularis dicto transuerso lateri ad partem rectæ AH, ex puncto E transuersi dicti lateris sito intra locum Hyperboles, quodque etiam est punctum in quo applicatur ordinatim recta aliqua linea GE ad ipsum latus transuersum prædictum; tertia, inquam, recta linea proportionalis, datis duabus; prima, portione AE diametri transuersæ BAE, terminata vertice eius A, & ipsamet recta GE ordinatim applicata ad illam diametrum transuersam; secunda verò ipsa recta GE ordinatim applicata prædicta. Quæ recta AH seu rectum latus minus quàm prædicta tertia recta proportionalis ED, determinatur duobus punctis; vno A vertice tam Hyperboles, quàm transuersi lateris; altero verò puncto H intersectionis communis ipsius, & rectæ lineæ DB transmittendæ ab D puncto extremo sito extra latus transuersum BAE, ad aliud extremum B dicti lateris transuersi BAE.

Quod hæc recta DB intersecet in H rectam AH, iuxta prop. 11. Procli; manifestum est, quandoquidem ambæ rectæ AH, ED, sunt parallelæ inuicem, per prop. 28. lib. 1. elem. vt pote singulæ ad angulos rectos lateri transuerso BAE, ad vnam eandemque eius partem; & alteram earum ED, secat recta DB maior quàm AH iuxta lemma 43. Vnde assumimus in definitione præsenti, rectum latus AH minus quàm prædicta tertia recta proportionalis ED, datis duabus AE, EG. Et quia sunt tres rectæ lineæ proportionales, hoc ordine, prima AE, secunda GE, tertia DE; rectangulum sub extremis AE, DE, erit æquale quadrato mediæ rectæ GE: est verò illud rectangulum sub AE, DE, iuxta lemma 45. applicatum lateri recto AH, excedensque figura simili sub BA, AH, lateribus in Hyperbola; ergo per ax. 1. lib. 1. elem. etiam quadratum rectæ GE, erit æquale rectangulo illi applicato ad latus rectum AH, excedenti figura prædicta simili sub recta BA, AH. Quare hæc definitio rectè colligitur ex prop. 12. huius libri.

XXVIII.

Rectum latus in ellipsi. Est recta linea maior quàm tertia recta linea proportionalis, datis duabus, prima, portione diametri transuersæ, terminata vertice eius & ellipseos ad partem lateris recti, & recta linea ordinatim applicata ad dictam diametrum; secunda verò, ipsamet recta linea ordinatim applicata: dispo-

sitis ad angulos rectos sibi inuicem in extremo communi quod est punctum transuersi lateris ad quod applicata est recta linea ordinatim, duabus prædictis rectis lineis, prima & secunda: vel prædicta recta linea, tertia proportionalis inuenta, debet esse ad angulos rectos ad latus transuersum in eius puncto in quo illud secat dat[a] recta linea ordinatim applicata: tùm etiam recta linea maior quàm ista tertia proportionalis, debet esse ad partes tertia ipsius proportionalis, ad angulos rectos transuerso lateri, ex puncto eius extremo seu vertice. Determinatur autem quantitas huius rectæ lineæ maioris quàm tertia prædicta lineæ proportionalis, duobus punctis; primo vertice transuersi lateris, è quo educta est ad angulos rectos ipsi lateri transuerso; altero, sectione communi illius, & rectæ lineæ transmissæ ab altero extremo transuersi lateris per extremum tertiæ prædictæ lineæ proportionalis quod extra transuersum latus est.

EXempli gratiâ. Sit in ellipsi datum transuersum latus AB, & recta linea CD ordinatim illi applicata in puncto eius C; siue ad angulos rectos quando transuersum latus AB est axis; siue ad angulos obliquos, cùm transuersum latus AB, non est axis: tùm datis duabus rectis AC, CD; prima quidem, portione AC, transuersi lateris AB, sita inter eius verticem A, & punctum C rectæ lineæ ordinatim applicatæ CD, ad ipsum latus transuersum; inuenta sit recta linea tertia proportionalis CF, per prop.11. lib.6. elem. & constituta ex dicto puncto C, perpendicularis ad vnam partem, ipsi lateri transuerso AB. Præterea ex puncto A verticis assumpto, posita sit per prop.11. lib.1. elem. alia AG recta linea perpendicularis eidem lateri transuerso AB, ad partem rectæ CF: (hæ duæ rectæ lineæ CF, AG, erunt per prop.28. lib.1. elem. parallelæ, ob angulos rectos quos efficiunt cum transuerso latere AB.) Insuper ex puncto B, altero extremo dicti transuersi lateris, per extremum F, rectæ CF prædictæ tertiæ proportionalis, transmittatur recta linea BF, quæ producta vltra F secabit in G rectam AG, per propos.11. Procli. Hæc autem AG recta linea, punctis A, & G, terminata, quæ maior erit quàm tertia prædicta linea proportionalis CF, per lemma 43. est iuxta hanc definitionem traditam, latus rectum in ellipsi, respectu lateris eius recti AB.

Hæc definitio desumpta est ab prop.13. rectangulumque sub AC, CF, erit per prop.17. lib.6. elem. æquale quadrato rectæ DC ordinatim applicatæ transuerso lateri AB, cùm sint illæ duæ rectæ AC, CB, extremæ, respectu mediæ proportionalis DC: & per lemma 44. rectangulum illud sub AC, CF, applicatum erit recto lateri AG, deficiens figura similis sub AB, AG, lateribus figuræ; vti exigit citata propositio 13. Apollonij.

XXIX.

Recta latera in oppositis sectionibus. Sunt duæ rectæ lineæ æquales inter se; quarum singulæ sunt partes rectarum tertiarum proportionalium; datis duabus in singulis hyperbolis oppositis: prima, portione diametri transuersæ intra locum proprium hyperboles, terminata vertice proprio, & recta linea ordinatim applicata ad dictam diametrum transuersam; secunda verò, ipsamet recta linea ordinatim applicata prædicta diametro; perpendiculares diametro ipsi transuersæ in verticibus proprijs ad easdem partes vel diuersas: determinata verò singulæ vti in Hyperbola vnica.

EXplicatur in exemplo. In oppositis sectionibus sit diameter transuersa seu latus transuersum AB; ad quod in singulis sit recta linea KI, GE, ordinatim applicata in punctis I, E; vna in vna hyperbola, altera in alia opposita; ad angulos quidem rectos, quando diameter transuersa AB est axis; ad obliquos verò angulos, quando diameter AB transuersa non est axis. Tùm ex punctis I, & E, sint ad easdem partes eductæ rectæ lineæ IM, ED, perpendiculares diametro transuersæ AB, æquales tertijs proportionalibus proprijs, datis duabus BI, IK, tùm AE, EG, inueniendis per prop.11. lib.6. elem. Insuper ex verticibus A & B, diametri datæ transuersæ AB, sint ad partes rectarum IM, ED, eductæ aliæ rectæ lineæ BN, AH, ad angulos rectos diametro transuersæ AB, quæ erunt parallelæ inuicem per prop.28. lib.1. elem. Denique recta ex A vertice per M extremum rectæ IM, transmittatur recta linea AM, secabit in N rectam BN; & alia recta ex puncto B, verticeque altero diametri AB, agatur altera recta BD, per extremum D rectæ ED, hæc recta BD secabit in H rectam AH, sicuti altera AM secauit rectam BN in N, per propos.11. Procli. determinataque erunt latera recta AH, BN, oppositarum sectionum, sicuti in vna Hyperbola, vti constat ex def.27. inter has secundas; eruntque æqualia per prop.14. & reliqua consequentur in singulis sectionibus seorsim quæ requirit propos.12. & quæ innuimus in definit.27.

XXX.

Rectum latus in circulo. Est recta linea æqualis diametro cuicumque eius, ad angulos rectos insistens dictæ diametro ad vnam solùm partem, in extremorum eius vno.

SIcuti est recta AC perpendicularis diametro AB circuli, æqualisque ipsi diametro, & ad angulos rectos ipsi in extremo eius A, & ad vnam eius tantummodo partem. Cùm verò diametri omnes sint æquales inter se, & rectum latus sit æquale diametro cui est ad angulos rectos; erit per 1. ax. lib.1. elem. æquale cuilibet diametro circuli eiusdem dati.

Age,

Age, proferamus genera rectorum laterum istorum definitorum, in sectionibus conicis, Parabola, Hyperbola, Ellipsi, & Circulo.

Primum genus est, vt sint rectæ lineæ. Alterum vt sint ad angulos rectos diametris proprijs transuersis ex vertice illarum, ad vnam solum partem transuersi proprij lateris.

Sunt alia genera rectorum laterum, communia solùm Parabolæ, Hyperbolæ & Ellipsi, tùm etiam sectionibus oppositis. Primum, vt referantur ad alias rectas lineas proportionales; primam, portionem diametri transuersæ inter illa & rectam lineam ordinatim applicatam dictæ diametro transuersæ; secundam, ipsammet rectam lineam ordinatim applicatam; vt determinentur eorum quantitates seu longitudines. Nam in Parabola, est ipsamet tertia recta proportionalis datis prædictis duabus: In Hyperbola, est minus quàm tertia illa proportionalis: In ellipsi est maius quàm tertia illa proportionalis. Alterum vt prima ex illis datis rectis sit semper portio diametri transuersæ propriæ inter ipsum latus rectum,& ordinatim applicatam rectam dictæ diametro transuersæ. Tertium vt secunda recta è duabus illis datis, sit recta linea ordinatim applicata propriæ diametro transuersæ.

Sed & sunt alia genera communia solùm lateribus rectis Hyperbolæ, ellipsi, & oppositis sectionibus. Primum, vt tertia recta linea proportionalis, è qua dependet eorum longitudo, sit semper perpendicularis diametro transuersæ ad vnam eius partem, ex puncto dictæ diametri in quo applicatur ordinatim recta linea secunda. Alterum, vt longitudo lateris recti in illis, determinetur duobus punctis; vno verticis; altero sectionis communis eius, & rectæ lineæ emissæ ab altero extremo lateris transuersi per extremum tertiæ rectæ proportionalis constitutæ ad angulos rectos dicto transuerso lateri ad partem lateris recti, ex puncto transuersi cui applicatur ordinatim recta linea quæ est secunda recta proportionalis prædicta. Tertium, vt sint parallelæ rectæ lineæ, latus rectum, & prædicta recta linea proportionalis.

Porrò differentiæ laterum rectorum à nobis definitorum, conicarum sectionum, sunt huiusmodi. In Parabola, tertia proportionalis inuenta est latus ipsum rectum, seu æquale ipsi; inuenta, inquam, modo assignato, duabus datis: quod non conuenit Hyperbolæ, nec ellipsi, nec circulo; nam in Hyperbola & ellipsi, ostendimus esse inæqualem tertiæ ipsi proportionali: & in circulo licet possit alia ratione reperiri latus æquale diametro transuersæ, & coniugatæ illi alteræ diametro seu secundæ proportionali; tamen quia modus assignatus inueniendi tertiam illam rectam proportionalem dependet ex duabus datis; prima, portione diametri transuersæ inter eius verticem seu ipsum latus rectum, & rectam lineam ordinatim applicatam dictæ diametro transuersæ; secunda verò ipsa recta linea ordinatim applicata: minimè conuenit circulo; ideò differentia assignata lateris recti in Parabola, legitima est. In Hyperbola autem, latus rectum cùm minus semper sit tertia illa recta proportionali; & in Parabola sit illi rectæ tertiæ proportionali æquale; & in ellipsi sit maius ipsa tertia proportionali; & in circulo sit semper æquale modo explicato: rectè distinguitur ab aliarum sectionum conicarum lateribus rectis. At verò in ellipsi latus rectum est maius tertia recta prædicta proportionali; quod nulli lateri aliarum sectionum competit. Denique in sectionibus oppositis latera recta respectu eiusdem diametri transuersæ sunt æqualia inter se, & singula semper minora quàm tertia illa proportionalis recta linea, sicuti in vnica Hyperbola. Quoad differentiam lateris recti in circulo: quod sit semper æquale diametro eius transuersæ, tùm etiam cuilibet eius diametro, nam per def. 15. & ax. 2. lib. 1. elem. diametri omnes in eodem circulo sunt æquales inter se: nulli alteri recto lateri ex definitis conuenit; recta enim omnia latera prædicta sunt finitæ rectæ lineæ; diametri autem transuersæ in Parabola, Hyperbolaque sunt infinitæ ex parte opposita verticibus earum, vti monuimus in coroll. nostris ad propos. 11. & 12. quod etiam applicandum est diametris transuersis oppositarum sectionum: At verò in ellipsi; quia constat ex def. 4. inter has secundas, rectam lineam mediam proportionalem inter diametrum eius quamcumque transuersam, & latus eius rectum proprium, esse diametrum secundam seu coniugatam alteri cum ordine ad latus eius rectum proprium; si per impossibile darentur latera rectum & transuersum in ellipsi semper esse æqualia, sequeretur per coroll. nost. 6. ad prop. 19. lib. 6. elem. secundam diametrum quamlibet in ellipsi æqualem esse diametro eius cuilibet primæ transuersæ; quod apertè falsum est in duabus diametris prima & secunda coniugatis, quæ sint ellipseos axes coniugati; quorum vnus semper est altero minor: nam ellipsis, circulus est imperfectus, ex vna parte longior, & ex alia strictior; vnde vnus axis longior esse debet seu maior, alter verò breuior seu minor; hoc verò demonstrauimus geometricè ex principijs ipsius Apollonij, in coroll. nostro 16. ad prop. 13. hoc absurdum deductum ex positione quod rectum latus quodlibet in ellipsi sit æquale transuerso suo lateri seu diametro, manifestam reddit falsitatem positionis. quare differentia producta lateris recti in circulo non competit lateri recto ellipseos.

Hæ differentiæ sunt proprietates in dictis sectionibus explicatæ & propositæ ab Apollonio propositionibus proprijs. Ex eo enim quod propositione vndecima docuit rectas lineas ordinatim applicatas diametro Paraboles, posse

spatia, hoc est rectangula sub recto latere & portionibus diametri inter eius verticem & prædictas rectas lineas ordinatim applicatas; erunt per prop.17. lib.6. elem. tres rectæ lineæ proportionales, mediaque latus quadrati seu recta linea ordinatim applicata, æqualis rectangulo sub recto latere & portione diametri prædicta; reliquæ verò duæ erunt latus ipsum rectum & portio diametri sita inter verticem vel latus rectum, & rectam lineam ordinatim applicatam: igitur latus rectum in Parabola, erit tertia recta proportionalis, seu æquale illi, datis duabus; prima portione diametri transuersæ assignata; secunda verò, ipsa recta linea ordinatim applicata.

In Hyperbola autem, cùm propositione duodecima posuerit, quamlibet rectam lineam ordinatim applicatam diametro eius transuersæ, posse rectangulum applicatum ad eius latus rectum sub portione diametri ipsius inter verticem seu latus rectum, & ipsam rectam ordinatim applicatam, excedensque; erunt per prop.17. lib.6. elem. tres rectæ lineæ proportionales; mediaque latus ipsum quadrati æqualis dicto rectangulo, seu ipsamet recta linea ordinatim applicata; primaque portio assignata diametri transuersæ; tertiaque maior quàm rectum latus, & latus ipsum rectum minus quàm tertia illa proportionalis. Qui discursus oppositis sectionibus erit applicandus circa sua latera recta ptoptia, quæ debent esse æqualia iuxta prop.14.

At verò in ellipsi, quandoquidem statuit propositione decimatertia, quadratum cuiuslibet rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro transuersæ, esse æquale rectangulo applicato ad latus eius rectum, latitudinem habenti portionem dictæ diametri transuersæ inter ipsum latus rectum & rectam ipsam lineam ordinatim applicatam, ac deficienti; erunt per prop.17. lib.6. elem. tres rectæ lineæ proportionales; mediaque ipsa recta ordinatim applicata seu latus quadrati æqualis dicto rectangulo; primaque erit portio diametri transuersæ inter latus rectum & ipsam ordinatim applicatam; secunda verò ipsamet tertia recta proportionalis minor quàm rectum latus, ipsumque rectum latus maius quàm dicta tertia recta proportionalis.

Quoad circuli rectum latus attinet, de quo nihil Apollonius protulit in medium; etsi respectu illius rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ diametris eius transuersis, possint spatia propria sub portionibus diametri transuersæ proprijs inter ipsum latus & rectas proprias ordinatim applicatas, & rectas alias proprias minores latere recto, applicata ipsi lateri recto, ac deficientia figura simili sub diametro transuersa, & latere recto; vti colligi potest ex lem. 8. ideoque latus eius rectum sit maius tertia proportionali recta linea, datis duabus; prima portione prædicta diametro transuersæ; secunda, recta linea ordinatim applicata ipsi diametro: in quo sapit naturam lateris recti ellipseos: tamen quia semper in circulo illud latus rectum est æquale diametro transuersæ, & in ellipsi non semper: propterea assumere voluimus pro differentia lateris recti in circulo, esse semper æquale diametro transuersæ, in quo distinguitur ab latere recto in ellipsi. Præterea in circulo, quælibet recta linea ordinatim applicata potest rectangulum sub partibus factis ab illa in diametro, vti constat ex lẽmate 48. quod repugnat rectis lineis ordinatim applicatis diametro transuersæ in ellipsi: si enim quælibet recta linea ordinatim applicata ab linea ellipseos ad diametrum transuersam eius, posset rectangulum sub segmentis illius diametri factis ab ipsa recta linea ordinatim applicata; curua linea ellipseos esset circularis per lemma 5. quod esse non potest, cùm specie differant.

XXXI.

Figuram vocat Apollonius agendo de potestate linearum rectarum ordinatim applicatarum ad diametros sectionum, tum de lateribus earum rectis: Rectangulum contentum sub diametro transuersa sectionum, & sub eius proprio latere recto.

HÆc definitio abundè explicata est in definitione quarta inter has secundas; solùm moneo Apollonium solere etiam vocare figuram, excessum vel defectum rectangulorum applicatorum rectis lateribus sectionum conicarum; tùm etiam ipsam sectionem conicam. Quæ figuræ satis ex discursu distinguentus ab figura nunc definita.

XXXII.

Sectiones opposita coniugata. Sunt quatuor Hyperbola, in eodem plano recepta, quarum duæ sunt oppositæ, & alia duæ opposita, & quarum diametri transuersa se mutuò bifariàm diuidunt in centro communi illis quatuor hyperbolis, suntque sibi inuicem diametri coniugata; & quarumlibet diameter transuersa potest figuram aliarum oppositarum definitam in præcedente definitione, hoc est rectangulum sub diametro transuersa aliarum duarum oppositarum sectionum è datis, & sub vno latere recto ipsarum contentum.

HÆc definitio dependet ab propositione vltima huius libri primi. Sintque exempli gratiâ duæ hyperbolæ oppositæ HCK, FAG; & aliæ duæ etiam oppositæ MDN, OEX: Primarumque diameter communis transuersa ABC, tum aliarum duarum communis transuersa DBE, quatenus terminantur ambæ diametri proprijs verticibus sectionum oppositarum; seque mutuò secent bifariàm in communi centro B, sectionum, sintque sibi inuicem diametri coniugatæ: Tùm dia-

diameter transuersa ABC possit rectangulum sub altera diametro transuersa DBE & latere recto alterutro sectionum oppositarum MDN, OEX; etiamque diameter transuersa DBE possit rectangulum sub altera diametro transuersa aliarum duarum oppositarum sectionum HCK, FAG, & alterutro latere recto illarum. Quatuor illæ Hyperbolæ erunt sectiones oppositæ coniugatæ. Sed quatuor illæ Hyperbolæ debent recipi in eodem plano. Dicuntur autem coniugatæ ad similitudinem diametrorum coniugatarum; quia particularem respectum inter se habent diametrorum coniugatarum, obtinentium naturam ipsarum.

De his sectionibus oppositis coniugatis multas ac præclaras proprietates proponet libro præsertim secundo demõstrandas Apollonius.

CONSIDERATIONES
NOSTRÆ
IN DEFINITIONES SECVNDAS
LIBRI PRIMI
CONICORVM
APOLLONII PERGÆI.



EX dictis in his definitionibus secundis tàm Apollonij Pergæi, quàm nostris superadditis, deducemus sequentes considerationes, quæ etiam vti definitiones secundæ, supponent primas; & propositiones Authoris intermedias. Considerationes autem erunt circa hactenus dicta de sectionibus conicis, & nonnulla quæ ad illas pertinent, conglobamus in summa præsertim earum naturas, ortum, genera ac differentias.

CONSIDERATIO NOSTRA I.

Solùm quintuplex est differens specie coni sectio per planum: Triangularis, circularis, parabolica, hyperbolica, elliptica.

SI enim conus quilibet secetur plano per verticem eius acto; sectio communis erit triangulum rectilineum, per prop. 3. quod vocatur ab Apollonio triangulum per axem, si planum secans conum per verticem, applicatum intelligatur axi coni: quod si planum secans conum per verticem, non applicetur axi coni, dicetur sectio communis, triangulum rectilineum extra axem ipsius coni: si verò ex centro baseos coni scaleni, concipiatur erecta recta linea perpendicularis ipsi plano circuli, per propos. 12. lib. 11. elem. quæ erit diuersa ab axe coni scaleni, qui per defin. 9. inter primas non est perpendicularis plano circularis baseos coni scaleni, terminaturque in centro ipsius circuli per def. 6. inter primas; porrò ambæ istæ lineæ angulum efficient in centro circuli, (eò quòd non sint in directum, alioqui eadem recta linea esset perpendicularis eidem plano, & obliqua, quæ pugnant inuicem; qui angulus rectilineus erit in vno plano, per prop. 2. lib. 11. elem. quod si planum istud concipiatur secare conum ipsum; resultabit etiam per prop. 3. triangulum rectilineum per axem coni; rectumque vti ipsum planum secans, plano baseos circularis, per prop. 18. lib. 11. elem. Insuper si planum secans conum incesserit, per axem, & ex consequenti necessitate per verticem, ex quo axis defluit per centrum baseos coni iuxta def. 6. cit. inter primas, basis trianguli resultantis ex hac sectione, erit per coroll. nostrum ad prop. 3. cit. diameter circularis baseos coni secti. Denique si planum secans conum per verticem, non applicatum fuerit axi, basis trianguli resultantis ex hac sectione, non erit diameter circularis baseos coni, sed alia chorda eius: si enim esset diameter incederet per centrum circuli, per quod etiam planum secans transiret; & quia datur etiam vertici coni applicatum, duo

 puncta

puncta extrema axeos, videlicet vertex, & centrum circularis baseos coni, existerent in ipso plano secante; atque adeò per 2. coroll. nostrum ad prop.7. lib.11. elem. totus axis coni etiam sustentaretur in ipso plano secante; vnde planum secans conum per verticem datum minimè applicatum axi eius, applicaretur ipsi axi, quæ duo pugnant inuicem: igitur sectio communis plani dati & circularis baseos coni secti per verticem eius, & extra axem eius, non erit diameter circularis baseos coni, sed alia eius chorda.

Si Conus quilibet plano secetur parallelo basi eius circulari; sectio communis resultabit circulus, per prop.4. Etsi conus tantum scalenus plano primo secetur per axem, rectoque ad eius basim, vnde triangulum resultat rectilineum per axem eundem, per prop. 3. & ad angulos rectos ipsius basi circulari, sicuti ipsum planum primum secans conum, & efficiens dictum triangulum per axem: tùm altero plano secundo secetur idem conus perpendiculari ad prædictum triangulum per axem; quod ex parte verticis triangulum abscindat simile ei quod per axem, subcontrariè verò positum. Sectio communis plano isti secundo secanti, & secto cono, erit circulus: quæ sectio ad differentiam alterius modò allatæ circularis, nuncupatur ab Apollonio sectio subcontraria, in prop. 5. qua docuit sectionem huiusmodi esse circulum.

Quod si conus plano primo secetur per axem, & secundo secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; sitque diameter sectionis resultantis ex sectione communi huius plani secundi, & coni, vni laterum trianguli prædicti per axem parallela. Sectio prædicta communis plano secundo secanti & cono secto, erit Parabola, per prop.11.

Et si conus plano primo per axem diuidatur, & secundo secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis: & sectionis effectæ ab hoc plano secundo in cono, diameter producta vltra verticem cum vno latere trianguli prædicti producto extra verticem coni conueniat. Sectio illa effecta ab plano secundo in cono, erit Hyperbola per prop.12. Tùm etiam si superficies duæ conicæ quæ ad verticem sunt communem iuxta def. 2. inter primas, plano aliquo non per verticem secentur: sectio erit effecta ab hoc plano in vtraque superficierum dictarum conicarum, Hyperbolæ, per prop. 14. quæ communem obtinent diametrum, ideoque vti Hyperbola vnica se habebit, videlicet productis lateribus triangulorum per axem communem conuenient cum dicta diametro communi extra verticem communem ipsis triangulis vel ipsis superficiebus duabus conicis. Vocantur autem hæ duæ sectiones ab Apollonio, prop.cit.14. sectiones oppositæ.

Denique si conus plano primo per axem secetur, tùm altero secundo plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, infra verticem, siue actu, siue potestate, hoc est sectio communis huius plani secundi, & plani trianguli per axem, quæ est diameter sectionis effectæ per corollar. prop. 7. non sit parallela basi dicti trianguli, neque abscindat de triangulo per axem prædicto, aliud simile triangulum versus verticem, subcontrariè positum, secetque actu vel potestate latera dicti trianguli per axem, infra verticem: Planum autem in quo est basis coni & hoc secundum planum secans conum conueniant secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis ad basim dicti trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur. Sectio resultans in cono per hoc planum secundum, erit per prop.13. Ellipsis.

Demonstratio. Sectio coni per planum, aut est per verticem eius, aut extra verticem eius. Si per verticem, aut est per axem, aut extra axem; tunc verò ex dictis in primo paragrapho, ex prop.3. sectio resultans in cono erit triangulum rectilineum. Si secetur conus extra verticem; secto ipso cono per axem primo plano, secans conum ipsum planum secundum extra verticem coni, secabit etiam dictum triangulum per axem, sectioque communis huius plani secundi & trianguli prædicti, quæ est diameter sectionis resultantis in cono secto per planum secundum iuxta coroll. 2.prop. 7. vel secabit vnum solum latus dicti trianguli per axem, alteri verò lateri erit parallela: vel secabit ambo latera dicti trianguli in rriplici differentia; prima, secando vnum latus infra verticem, alterum verò productum vltra verticem; secunda, secando quidem ambo latera infra verticem, sed parallela erit basi dicti trianguli, vel subcontrariè posita; tertia secando ambo latera dicti trianguli infra verticem actu vel potestate, sed non erit parallela basi dicti trianguli, neque subcontrariè posita. Altera sectio resultans in cono, per planum secundum, extra verticem coni incedens, quando eius diameter vnum solum latus trianguli per axem intersecat, alteri verò lateri est parallela; est per prop.11. Parabola. Prima verò differentia diametri secantis ambo latera trianguli per axem, vnum quidem non productum, aliud verò productum vltra verticem, erit per prop.12. Hyperbola. Secunda verò erit circulus, per prop. 4. vel 5. Tertia verò Ellipsis. Cùmque non sit alter assignabilis modus secandi conum, præter hos quinque assignatos differentes specie, pro diuersis assignatis definitionibus: solùm quintuplex erit sectio coni differens specie, Triangularis, Parabolica, Hyperbolica, Elliptica, & circularis. Quod erat demonstrandum.

CON-

CONSIDER. NOSTRA II.

Etsi triangulum & circulus oriantur ab sectione conica superficiei per planum secundum mentem Apollonij in prop. 3. 4. & 5. nihilominus tamen deinceps, nomine sectionis conicæ intelliget solùm Parabolam, Hyperbolam & Ellipsim; ita vt etiam antonomasticè sumat nomen sectionis, pro tribus prædictis sectionibus conicis.

IMprimis enim nullam triangulorum rectilineorum proprietatem demonstrabit ortorum ab sectione conicarum superficierum per plana: & cùm proponet proprietates demonstrandas in sectionibus conicis, communes etiam circulo, addet in propositionibus suis post nomen conicæ sectionis (intelligendo semper tres commemoratas sectiones parabolam, hyperbolam, ellipsim, vel vnam aut duas illarum, nomine sectionis) in communi, vel alicuius è prædictis tribus, circulum vel circuli circumferentiam. Quod signum est nunquam nomine sectionis conicæ intelligere deinceps triangulum, & circulum.

CONSIDER. NOSTRA III.

Lineæ sectionis conicæ nomine intelligit Apollonius, lineas curuas ipsarum; & deinceps solùm intelliget lineas curuas parabolæ, hyperbolæ, & ellipseos: quas lineas vocat etiam absolutè sectiones.

NAm in demonstratione prop. 4. & 5. curuam lineam circuli factam in superficie conica vocat lineam sectionis; vel sectiones. Sed etiam in propositionibus præcedentibus post quintam vsque ad 16. exclusiuè, sectionam vocat, lineas curuas assignatarum parabolę, vel hyperbolæ, vel ellipseos; & constans erit in sequentibus eodem modo vtendi nomina lineæ & sectionis.

CONSIDER. NOSTRA IV.

Ortus & generatio quinque assignatarum sectionum conicarum specie differentium in consideratione prima; non vnica est sectio coni per planũ: sed aliæ esse possunt.

TRiangularis enim oritur ex inclinatione ad inuicem trium rectarum linearum in plano, quarum duæ quælibet sint maiores reliqua tertia, vti constat ex prop. 22. lib. 1. elem. tùm etiam ex praxi illius propositionis, & primæ eiusdem libri. Sed & etiam originem habere potest ex sectione prismatis secti plano parallelo basibus proprijs oppositis triangularibus, vel non parallelo dictis basibus triangularibus; vel etiam ex sectione pyramidis terminatæ quatuor planis, per planum secans tria buiusmodi plana; vel ex sectione cuiuslibet parallelepipedi, plano secante tria eius plana vnum angulum solidum constituentia: semper enim tria plana secabuntur ab tertio plano, coniunctaque sunt duo simul ex illis tribus sectis planis, mediante recta linea etiam secta ab illo tertio plano; & sic resultabunt per 3. prop. lib. 11. elem. pro sectionibus illorum communibus, tres rectæ lineæ ad inuicem inclinatæ binę & binæ in vno puncto; & sic exurget triangulum rectilineum pro sectione communi, prædictorum trium planorum, & tertij secantis, existens in plano secante, in quo existunt dicta tria puncta, & dictæ tres rectæ lineæ prædictæ ad inuicem inclinatæ binæ & binæ in illis tribus punctis, quæ sunt sectiones communes dicti plani secantis & trium rectarum linearum vnientium bina & bina plana ex dictis tribus sectis.

Præterea circulus originem sumere potest ex reuolutione rectæ lineæ in plano, circa vnum suum punctum immobile, redeunte altero extremo moto in prædicta reuolutione ad idem plani punctum è quo cæperat moueri, iuxta descriptionem circuli traditam ab Aristotele initio suarum quæstionum mechanicarum. Sed & etiam circulus ortum suum babere potest ab sphæra plano per centrum & extra centrum suum secta, vti docuimus coroll. nost. 1. ad prop. 17. lib. 12. elem. & in vniuersum constat ax prop. 1. lib. 1. Sphæricorum Theodosij, circulum fieri in Spbæra secta plano siue per centrum eius siue extra centrum transeunte: & coroll. nostro ad prop. 53. lib. 11. elem. docuimus ex sectione cylindri plano basibus eius parallelo, gigni circulum; docuitque Serenus prop. 5. lib. sui de sectione cylindri; tùm propos. 6. quandò secatur cylindrus scalenus plano subcontrariè posito. Adbæc modò demonstrabimus circulum produci ab sectione plano facta in corporibus effectis ab reuolutione parabolæ, vel hyperbolæ, vel ellipseos, circa suos proprios axes, plano, inquam, acto perpendiculariter axibus dictorum solidorum: si enim concipiamus rectam vnam lineam ordinatim applicatam cuilibet axi dictarum sectionum, hæc erit perpendicularis continuò ad axem, dùm circa illum immotum reuoluitur integro motu ipsa sectio conica, quia per def. 18. inter primas, rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ axi sectionum, sunt ad ipsum perpendiculares; igitur concipiendo istam ordinatim applicatam in suo motu infinitis in locis, illæ omnes rectæ repræsentantes prædictam ordinatim applicatam existent in vno plano per prop. 5. lib. 11. elem. in quo cùm gyret prædicta recta eadem ordinatim applicata circa suum vnum punctum immobile quod existit in axi etiam immobili, alio extremo suo quod etiam semper situm est in linea curua paraboles, vel hyperboles, vel ellipseos, circuli circumferentiam describet in superficie solidi facti existentem, vti existit per def. circuli allatam ab Aristotele in superficie plani: Iam verò si concipiatur planum

applicatum huic plano circulari vel in quo existit prædicta recta linea concepta multiplicata in infinitis locis, productum vndequaque secabit solidum illud, sectioque communis erit circulus.

Quod si solida huiusmodi facta ab reuolutione integra Paraboles, Hyperboles, & ellipseos circa suos proprios axes immobiles; secentur plano per ipsos axes; cùm ipsæ prædictæ figuræ sint plana, vel receptæ in plano, sectio communis huius plani secantis & corporum prædictorum sectorum, erit ipsamet vel Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis, quæ effecit illud corpus seu solidum; alioqui ipsamet linea curuá efficiens superficiem solidi, si conciperetur quiescere, in plano non existeret, vel non terminaret partem superficiei effectæ. Igitur sectio corporum prædictorum per planum applicatum axi illorum, erit ipsamet Parabola, vel Hyperbola, vel ellipsis, quæ illa effecit.

Quoad circulum attinet & ellipsim, Serenus ait ac demonstrat originem posse habere ab cylindro quolibet secto per planum parallelum basibus eius circularibus, prop. 5. libri sui de sectione cylindri, & prop. 6. ab cylindro scaleno secto per planum non parallelum basibus eius, sed subcontrariè positum, circulum etiam resultare. Ellipsim denique constat produci in cylindro recto dum secatur planis non parallelis basibus eius; & in scaleno quando secatur planis obliquis ad bases eius & non subcontrariè positis: ex doctrina eiusdem Sereni, propositionibus suis diuersis, 9. 11. 13. 14. 15. 16. 17. lib. sui primi citati.

Atque ita demonstrauerimus, sectiones quinque conicas differentes specie, videlicet, Triangulum rectilineum, circulum, Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsim originem suam trahere posse aliunde, quàm ab sectione coni per planum.

CONSIDER. NOSTRA V.

Tres conicæ sectiones, Triangulum rectilineum, circulus & ellipsis, originem suam ducere possunt independenter ab omni consideratione coni etiam remota.

Constat enim triangulum rectilineum per considerationem præcedentem quartam, describi posse in plano sine vllo respectu ad conum; tùm oriri etiam ex sectione prismatis, pyramidis, & parallelepipedi, planis terminatorum, sectione facta per planum, quod planum & prædicta solida nulla ratione respectum habent ad conum.

Sed & circulum describi in plano manifestum ex consideratione citata, sine vllo respectu ad conum: tum etiam produci ab sectione cylindri per planum basibus parallelum, vel ab sectione cylindri scaleni per planum subcontrariè positum basibus. planum autem & cylindrus quicumque naturam suam & ortum habent independenter ab cono.

Denique constat ex cit. consid. præced. ellipsim enasci posse ab cylindri recti, tùm etiam scaleni sectione per planum facta non subcontrariè positum basibus scaleni: cylindri autem natura & plani non dependet ab cono.

Igitur vti proposuimus in hac consideratione quinta, tres conicæ sectiones, Triangularis, & elliptica, originem suam trahere possunt independenter ab natura & consideratione coni etiam remota.

CONSIDER. NOSTRA VI.

Duæ sectiones conicæ, Parabolica, & Hyperbolica, quatenus earum origo tradita est ab Geometris, dependet ab cono saltem remotè.

Præter duas origines Parabolæ & Hyperbolæ, ab cono iuxta propositiones 11. & 12. Apollonij; & ab corporibus effectis ab reuolutione integra ipsius Paraboles vel Hyperboles circa suum axem, sicuti ostendimus in consideratione nostra 4. nullus Geometrarum aliam prodidit originem. Et quia corpora prædicta supponunt ipsam parabolam vel hyperbolam pro causa efficiente, & nemo hactenus Geometrarum aliud ab his corpus, si conum excipias, introduxit in quo produceretur Parabola vel Hyperbola: ideò rectè addidimus in nostra præsenti consideratione, generationem Parabolæ & Hyperbolæ quatenus tradita est ab Geometris tàm antiquis quàm recentioribus quos legerim, saltem remotè dependere ab cono.

CONSIDER. NOSTRA VII.

Necesse habuit Apollonius ad naturas declarandas sectionum trium conicarum, Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipseos, tùm etiam circuli: primum mentionem facere sectionis triangularis per axem coni, plano facto per axem coni applicata; tùm etiam diametri ipsarum sectionum.

Cum enim naturam illarū coni sectionum propositam in propositionibus antecedentibus 4. 5. 11. 12. 13. ex quibus deduximus definitiones secundas 5. 7. 9. 15. declaret ex proprietatibus diuersis ac proprijs rectarum linearum in illis sectionibus applicatarum ad diametrum propriam illarum; quam diametrum in prop. 7. & eius corollario primo, ostendit esse sectionem communem trianguli per axem coni, & secundi plani secantis conum, & efficientis in cono sectiones prædictas: quis non concludat necesse Apollonio fuisse ad naturas dictarum sectionum conicarum, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, & etiam circuli in cono generati, introducere sectio-

sectionem triangularem per axem coni ipsius secti primo plano secante ipsum per axem; tùm etiam diametros dictarum sectionum conicarum.

CONSIDER. NOSTRA VIII.

Necesse fuit Apollonio ad naturas sectionum trium conicarum Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, etiamque circuli in cono scaleno procreati; introducere rectam lineam in plano circularis baseos non producto vel producto ductam ad angulos rectos basi trianguli per axem productæ vel non productæ.

QVia enim in citatis propositionibus 5.11. 12. ac 13. differentias dictarum sectionum specificas explicat ex diametris illarum, quæ sunt sectiones communes trianguli per axem coni, & secundi plani efficientis in cono ipsas sectiones conicas commemoratas; vt ostendat ipsas esse diametros iuxta def. 10. inter primas, opus habuit rectam illam lineam ducere ad angulos basi trianguli per axem; nam alias rectas in plano earumdem sectionum conicarum ductas & applicatas prædictæ diametro sectionum parallelas ei quæ est in eodem plano dictarum sectionum conicarum ad angulos rectos basi trianguli per axem ostendit bifariàm secari ab recta linea quæ est sectio communis plani trianguli per axem & plani secundi efficientis dictas sectiones conicas, idque per prop. 7. vnde concludit prædictam rectam lineam ad quam applicantur rectæ illæ lineæ æquidistantes illi orthogoniæ ad basim trianguli per axem, esse diametrum sectionum prædictarum conicarum, in corollario suo primo ad prop. 7. per definitionem decimam inter primas.

CONSIDER. NOSTRA IX.

Necesse fuit Apollonio assignanti differentias specificas trium conicarum sectionum, Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipseos; mentionem facere rectarum linearum iuxta quas possunt rectæ lineæ ordinatim applicatæ in dictis sectionibus ad diametrum illarum.

NAm ex differentijs specificis illarum assignatis in prop. 11. 12. ac 13. tùm etiam in def. secundis 5. 7. 9. constat quadrata rectarum linearum ordinatim applicatarum in dictis sectionibus ad diametrum illarum propriam, esse æqualia rectangulis applicatis ad illas rectas lineas perpendiculares diametro in vertice illius & ad vnam partem illius, quæ vocantur etiam recta latera; sed diuersa ratione in singulis sectionibus; in parabola enim latus vnum rectangulorum prædictorum, est integra illa linea iuxta quam possunt; in hyperbola verò latus illud excedit longitudine illam rectam lineam; in ellipsi verò minus est latus illud quàm dicta recta linea: quæ sunt diuersa specie ad determinandas differentias dictarum sectionum. Quare rectè asseruimus necesse fuisse Apollonio ad determinandas species dictarum sectionum conicarum, mentionem facere rectarum linearum, iuxta quas possint rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum ipsarum sectionum.

CONSIDER. NOSTRA X.

In propositionibus Apollonij explicantibus naturas proprias sectionum conicarum, Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipseos; tùm etiam in definitionibus illarum propositis inter definitiones secundas: nihil est otiosum & superfluum.

NOn triangulum rectilineum per axem coni, vti patet ex consideratione nostra 7. Non diameter ipsarum sectionum, per considerationem 7. Non rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum; sed neque etiam recta linea perpendicularis in plano baseos circularis coni ducta ad basim trianguli per axem coni productam vel non productam; vti manifestum est, ex considerationibus 7. 8. & 9. Non denique rectæ lineæ iuxta quas possunt prædictæ rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum; vti videre est ex consideratione 9. Cùmque nihil aliud proferatur in dictis propositionibus & definitionibus secundis; & determinent species ipsarum sectionum propositarum, secundum varias rationes; concludere debemus nihil otiosum esse ac superfluum in citatis propositionibus ac definitionibus.

CONSIDER. NOSTRA XI.

Assignans genericas rationes quinque sectionum conicarum commemoratarum in consideratione prima.

IMprimis sunt omnes figuræ planæ, si in Parabola & Hyperbola assumatur basis quæ est sectio baseos circularis ipsius coni & plani secundi secantis ipsum, & generantis ipsam Parabolã & Hyperbolam; vt constat ex earũ definitionibus allatis inter definitiones secundas. Et licet minimè definierimus triangulum rectilineum; constat aliunde esse figuram planam, ex def. 20. lib. 1. elem. tùm ex prop. 2. lib. 11. elem.

Oriuntur omnes ex sectione coni facta beneficio planorum; licet aliunde originem suam ducere possint, vti ostendimus in consideratione 4.

Hæ solæ duæ rationes genericæ conueniunt omnibus quinque sectionibus.

CONSIDER. NOSTRA XII.

Producens alia genera communia quatuor sectionibus conicis, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipsi, & circulo.

Sup-

SVpponunt ante productionem illarum, conum sectum plano primo per axem eius, vnde resultet triangulum per axem ipsius coni.

Producuntur ab secundo plano secante conum & triangulum per axem eius, secundum rectam lineam perpendicularem basi dicti trianguli productam vel nō productam, ductam, inquam, perpendicularem in plano baseos circularis coni producto vel non producto, hoc est abstrahendo ab eius productione vel non productione.

Diametros obtinent originarias, quæ sunt sectiones communes plani secundi secantis conum, & efficientis ipsas sectiones datas conicas, & trianguli per axem præmissi.

Earum termini vel terminus, existentes in superficie coni curua sunt lineæ curuæ receptæ etiam in plano secante superficiem curuam coni, & efficiente ipsas.

Diametri earum transuersæ transeunt intra locum ipsarum, & concipi possunt extensæ vltra vertices.

CONSIDER. NOSTRA XIII.

Circa genericas alias rationes, Parabolæ & Hyperbolæ, ortarum ab sectione coni.

PRoduci ad partes oppositas verticibus proprijs in infinitum possunt.

Se ipsis lineæ curuæ illarum claudere spatium planum non possunt.

CONSIDER. NOSTRA XIV.

Circa genericas alias rationes, Ellipseos & circuli sectionum conicarum.

LIneæ curuæ illarum; continent actu, aut continere possunt spatium planum.

Lineæ curuæ illarum produci in infinitum nequeunt; nam spatium actu claudunt, vel claudere possunt.

Centrum obtinent intra spatium ipsarum.

CONSIDER. NOSTRA XV.

Proferens genericam aliam rationem communem Hyperbolæ, Ellipsi, & Circulo, productis ab coni sectione.

TRes istæ sectiones centrum sibi vendicant in quo diametri ipsarum omnes particulares se mutuò intersecant.

CONSIDER. NOSTRA XVI.

Circa specificas rationes sectionis conicæ, quæ vocatur Parabola.

EIus diameter originaria secat vnum latus trianguli per axem coni, & alteri lateri efficienti cum prædicto angulum ad verticem coni, est æquidistans.

Quælibet recta linea ordinatim applicata ad eius diametrum, potest rectangulum sub portione diametri prædictæ terminata vertice eius, & prædicta recta linea ordinatim applicata, & sub recto latere adæquato dictæ diametri.

Rectum latus in Parabola, seu recta linea iuxta quam possunt rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum ipsius, habet ad portionem lateris trianguli per axem, quod secat ipsa diameter, situm inter verticem ipsius diametri, & verticem coni, eam rationem quam obtinet quadratum basis dicti trianguli ad rectangulum sub alijs duobus lateribus dicti trianguli.

CONSIDER. NOSTRA XVII.

Circa differentias specificas sectionis Conicæ, quæ vocatur Hyperbola.

HYperbolæ diameter originaria secat vnum latus trianguli per axem non productum, & aliud latus productum vltra verticem, quæ duo latera continent angulum in puncto verticis coni secti primo plano.

In hyperbola qualibet recta linea ordinatim applicata ad eius diametrum potest rectangulum contentum sub portione diametri ad quam applicatur prædicta recta linea ordinatim, & sub maiore recta quàm sit rectum latus dictæ diametri.

In hyperbola rectangulum cui æquale est quadratum rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum ipsius hyperbolæ, est applicatum quidem ad rectum latus diametri, excedens figura simili ei quæ continetur sub recto latere, & transuerso; transuerso quidem quatenus terminatur vertice hyperboles, & puncto concursus dictæ diametri productæ vltra verticem, & alterius lateris trianguli per axem producti vltra verticem coni.

In hyperbola, latus transuersum quatenus terminatur vertice diametri cuius est pars, & puncto concursus dictæ diametri cum latere trianguli per axem producto vltra verticem, habet ad latus suum rectum eam proportionem, quam quadratum rectæ lineæ eductæ ab vertice coni seu trianguli per axem, parallelæ diametro hyperboles, ad basim trianguli per axem coni, habet ad rectangulum sub partibus basens dicti trianguli per axem factis ab dicta recta linea parallela diametro prædictæ, secante basim trianguli per axem.

In hyperbola. Recta linea prædicta educta ab vertice coni seu trianguli per axem, ad eius basim, parallela diametro, semper secat basim trianguli per axem, in puncto vno ex intermedijs ipsius baseos. hoc demonstrauimus in coroll.nost.1. ad def.10. inter secundas.

CON-

CONSIDER. NOSTRA XVIII.

Circa communia genera sectionibus oppositis, & alijs sectionibus conicis.

IMprimis eadem sunt quæ assignauimus in consideratione 11. nam quælibet illarum sectionum oppositarum est hyperbola. Et propter hanc rationem genera communia sibi vendicabunt, quæ assignauimus in consid. 11. Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipsi, & circulo. Tùm etiam alia quæ in consid. 13. attribuimus communia Parabolæ & Hyperbolæ generatis in cono. Denique aliud genus commune Ellipsi & circulo, quod in consideratione 15. designauimus.

CONSIDER. NOSTRA XIX.

Circa specificas rationes sectionum oppositarum conicarum.

AMbæ sunt hyperbolæ: quod nulli sectionum conuenire potest, vti ostendimus in defin. 7. inter has secundas, & oppositæ secundum vertices.

Commune transuersum latus obtinent terminatum verticibus ipsarum, quarum vnus est in vna superficierum conicarum, alter in alia, contrapositarum modo explicato in prima defin. inter primas.

Latera obtinent recta æqualia perpendicularia communi diametro seu transuerso lateri.

CONSIDER. NOSTRA XX.

Circa differentias specificas circuli generati in cono secto ab plano; etiamque ellipseos.

PLanum secundum secans conum, & circulum procreans, vel est parallelum basi circulari coni cuiuscumque secti siue sit rectus conus aut scalenus.

Vel hoc Planum secundum secans conum scalenum, & circulum producens, est subcontrariè positum iuxta prop. 5.

Planum secundum secans conum scalenum, & circulum generans, supponit planum primum secans ipsum conum scalenum, & producens triangulum, esse perpendiculare semper basi coni circulari, iuxta prop. 5. & defin. 15. inter secundas. Quod non semper est necessarium in alijs sectionibus, & solum in vno casu euenit, vt diameter originaria sit axis, vti monuimus in nostris corollarijs ad prop. proprias aliarum conicarum sectionum, parabolæ, hyperbolæ, & ellipseos.

Quadrata rectarum ordinatim applicatarum ad diametros circuli, sunt semper æqualia rectangulo sub segmentis ipsius diametri factis ab proprijs illis rectis lineis ordinatim applicatis.

Omnes rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad quaslibet diametros circuli, sunt semper ad rectos angulos ipsis: quia per prop. 3. lib. 3. elem. bifariàm ab illis diametris diuiduntur per defin. 10. inter primas.

Omnes diametri circuli sunt axes per defin. 18. inter primas, quia diuidunt bifariàm omnes rectas lineas ordinatim applicatas ad illas, & ad angulos rectos.

Quoad ellipsim attinet. Imprimis recta linea quæ ab eius linea curua ducitur æquidistans communi sectioni plani secundi ipsam ellipsim efficientis, & baseos coni secti, ad diametrum ipsius ellipseos originariam; potest spatium adiacens lineæ seu recto eius lateri ad quod ipsa diameter originaria eam proportionem habet quam quadratum lineæ rectæ diametro prædictæ originariæ æquidistantis ab vertice coni vsque ad trianguli per axem coni ductæ productam, habet ad rectangulum contentum basis productæ partibus quæ inter ipsam & latera prædicti trianguli intercipiuntur.

Planum secundum producens in cono ellipsim seu recto seu scaleno, semper secat obliquè duo latera trianguli per axem producti ab primo plano secante ipsum conum, non producta, vel producta ad partes solum contrarias vertici, & non est parallelum basi coni.

CONSIDER. NOSTRA XXI.

Complectens genericas rationes communes diametris originarijs sectionum conicarum, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, etiamque circuli.

SVnt sectiones communes plani trianguli per axem coni, resultantis ab sectione coni plano primo secante conum per axem, & secundi plani secantis conum, & in eo efficientis sectiones conicas assignatas. hoc verò constat ex propositionibus proprijs Apollonij.

Bifariàm diuidunt rectas omnes lineas ordinatim applicatas ad ipsas proprias diametros.

Penetrant seu ingrediuntur intra locum commemoratarum sectionum; vnde dicuntur transuersæ diametri.

Vertices ipsarum diametrorum, existunt in lineis curuis assignatarum sectionum proprijs.

Partes earum terminatæ verticibus proprijs ad partes laterum propriorum rectorum, & lineis rectis ordinatim applicatis ad ipsas, sunt latitudines ex Apollonio, vel vnum è lateribus rectangulorum quibus sunt æqualia quadrata rectarum linearum applicatarum ad illas ipsas diametrum.

Eædem partes prædictæ diametrorum, sunt vna è tribus rectis proportionalibus, quarum media est ipsa recta ordinatim applicata ad illas; & tertia vel altera reliqua è tribus, est rectum latus ipsarum diametrorum adæquatè, vel

vel maius ipso latere recto, vel minus eodem latere recto.

Ad earum extrema quę sint vertices earumdem, constituitur latus rectum ipsarum ad angulos rectos ad vnam partem ipsorum; vel quod est idem, recta linea secundum quam possunt ordinatim applicatæ rectæ lineæ ad ipsas diametros in proprijs sectionibus, est perpendicularis diametro ad vnam partem eius, in puncto verticis proprij.

CONSIDER. NOSTRA XXII.

Circa rationes genericas communes diametris Hyperbolæ, Ellipseos, & circuli, sectionum conicarum.

EX centris proprijs ipsarum profluunt & extenduntur vtrimque. Tùm etiam sibi vendicant alias superiores genericas assignatas in consideratione præcedente 21.

Secant ambo latera trianguli per axem coni, producta vel non producta.

CONSIDER. NOSTRA XXIII.

Circa rationes genericas communes diametris transuersis Parabolæ & Hyperbolæ, sectionum conicarum.

PRæter assignatas rationes genericas in consideratione 21. aliam sibi vendicant communem, vt solum in vno puncto secent ipsas sectiones conicas proprias. Si enim secarent in duobus punctis suas proprias sectiones conicas; ductis ad eas multis rectis lineis ordinatim applicatis ad ipsasmet parallelis alicui tertiæ rectæ, possemus ex secundo vltimo puncto alteram rectam parallelam ducere eidem tertiæ rectæ, quæ per prop. 7. secaretur bifariàm ab ipsamet diametro; verum sic non secaretur nisi in extremo suo sito in ipsamet linea sectionis curua: quare hoc absurdum consequens indicat ipsas diametros Parabolæ & Hyperbolæ solummodò secare suas sectiones proprias in vno puncto.

Ex hac proprietate generica sequitur, vt in infinitum productæ diametri sectionum conicarum Parabolæ & Hyperbolæ, ad partes oppositas verticibus suis proprijs, nunquam concurrant cum lineis curuis ipsarum propriarum sectionum.

Sed & alia deriuatur proprietas generica, ex prædicta, vt solum sibi vnum verticem vendicent, punctum scilicet intersectionis mutuæ ipsarum cum lineis curuis sectionum suarum.

CONSIDER. NOSTRA XXIV.

Circa rationes genericas communes diametris transuersis ellipseos, & circuli, sectionum conicarum.

IMprimis obtinent rationes genericas commemoratas in consideratione 21. tùm etiam productas in consideratione 22.

Præterea secant actu vel potentia duobus in punctis suas sectiones conicas proprias.

Secant ambo latera trianguli per axem coni, infra verticem.

Insuper duos habent vertices vel habere possunt in suis proprijs sectionibus conicis, duo videlicet puncta in quibus secant suas sectiones proprias.

CONSIDER. NOSTRA XXV.

Circa differentias specificas diametri Hyperboles transuersæ.

PRocedit è centro hyperboles quod est extra eius locum vel aream.

Eius pars quatenus intra ipsam hyperbolam est, est latus vnum rectanguli applicati ad eius latus rectum; excedentis figura simili ei quæ continetur sub ipsamet diametro hyperboles sita extra ipsam, & sub recto eius latere, rectanguli, inquam, æqualis quadrato rectæ lineæ ordinatim applicatæ in hyperbola ad ipsamet diametrum productam intra eius locum.

Secat vnum latus trianguli per axem, & aliud productum vltra verticem coni.

CONSIDER. NOSTRA XXVI.

Circa differentias specificas diametri Parabolæ.

EIus pars est latus vnum rectanguli applicati ad eius latus rectum adæquatè, æqualis quadrato cuiuslibet rectæ lineæ ad ipsammet diametrum ordinatim applicatæ.

Secat vnum solum latus trianguli per axem, & alteri est parallelum.

CONSIDER. NOSTRA XXVII.

Circa differentias specificas diametri ellipseos.

EIus pars est latus vnum rectanguli applicati ad eius latus rectum æqualis quadrato cuiuslibet rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad ipsam, deficientis figura simili ei quæ sub ipsa tota diametro & recto eius latere continetur.

Secans ambo latera trianguli per axem, infra verticem, non aufert ab ipso triangulum simile illi.

CONSIDER. NOSTRA XXVIII.

Circa differentias specificas diametri sectionis conica quæ vocatur circulus.

QVælibet eius diameter est axis, per defin. 18. inter primas; quia semper ad angulos rectos secat rectas omnes lineas ordinatim

ad

ad illam applicatas, per prop. 3. lib. 3. elem. quas per defin. 10. inter primas bifariàm diuidit.

Segmenta eius facta ab qualibet recta linea ordinatim applicata ad illam, sunt latera rectanguli æqualis quadrato rectæ ipsius lineæ ordinatim applicatæ ad illam.

Secando latera trianguli per axem infra verticem in cono scaleno, aufert ab eo triangulum simile illi triangulo subcontrariè positum.

Secando ambo latera trianguli per axem, est æquidistans in cono recto basi trianguli prædicti.

CONSIDER. NOSTRA XXIX.

Circa rationes genericas communes lateribus rectis sectionum conicarum, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, & circuli.

Sunt perpendicularia diametris proprijs in puncto verticum propriorum, ad vnam partem ipsarum.

Ad ipsa applicantur rectangula æqualia quadratis rectarum linearum ordinatim applicatarum ad ipsorum diametros particulares.

CONSIDER. NOSTRA XXX.

Circa differentias specificas lateris recti in Parabola.

Habet ad portionem lateris vnius trianguli per axem quod secat, sitam inter ipsam diametrum & verticem coni vel trianguli per axem, proportionem, quam habet quadratum baseos dicti trianguli, ad rectangulum sub duobus eius reliquis lateribus.

Est vnum adæquatè sumptum è lateribus rectanguli applicati ad ipsummet, cui æquale est quadratum rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum seu transuersum latus proprium.

Est æquale tertiæ rectæ lineæ proportionali, datis duabus; prima, portione diametri inter verticem eius & rectam semiordinatim applicatam dictæ diametro; secunda, ipsa semiordinatim applicata.

CONSIDER. NOSTRA XXXI.

Circa specificas rationes lateris recti in sectione conica, quæ dicitur Hyperbola.

Productum, est vnum è lateribus rectanguli applicati ad ipsummet, & excedentis, æqualis quadrato rectæ lineæ ad transuersum latus proprium ordinatim applicatæ.

Ad ipsum habet proportionem eandem, transuersum eiusdem latus situm inter verticem sectionis conicæ, & punctum in quo secat alterum latus trianguli per axem coni productum vltra verticem, quam obtinet quadratum rectæ lineæ eductæ parallelæ ab vertice coni diametro eius originariæ seu transuerso dicto lateri, ad basim trianguli per axem non productam, ad rectangulum sub dictæ baseos trianguli factis ab dicta recta linea educta parallela.

Est minus tertia recta linea proportionali, datis duabus; prima, portione diametri transuersæ inter ipsius verticem & semiordinatim applicatam dictæ diametro; secunda, ipsa semiordinatim applicata.

CONSIDER. NOSTRA XXXII.

Circa specificas rationes lateris recti in sectione conica, quæ dicitur Ellipsis.

Eius pars est vnum è lateribus rectanguli applicati ad ipsummet, deficientisque, æqualis quadrato rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum propriam, vel transuersum latus proprium in ellipsi.

Ad ipsum habet eandem rationem diameter eius propria seu transuersum latus proprium, quam obtinet quadratum rectæ lineæ eductæ ab vertice trianguli per axem coni ad basim eiusdem trianguli per axem productam, parallelæ dictæ diametro, ad rectangulum contentum sub dictæ baseos productæ partibus quæ inter ipsam parallelam ductam, & extrema laterum reliquorum dicti trianguli sitæ sunt.

Est maius tertia recta linea proportionali, datis tribus; prima, portione diametri transuersæ inter ipsius verticem & semiordinatim applicatam dictæ diametro; secunda, ipsa semiordinatim applicata.

CONSIDER. NOSTRA XXXIII.

Circa specificam rationem lateris recti in sectione conica, quæ nuncupatur circulus.

Est semper æquale cuilibet diametro circuli: quod ostendimus in explicatione definitionis 30. inter secundas.

CONSIDER. NOSTRA XXXIV.

Circa rationes genericas rectarum linearum semiordinatim applicatarum ad diametros transuersas sectionum conicarum, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, & circuli circumferentiæ.

Sunt omnes rectæ lineæ ab vno puncto linearum curuatum dictarum sectionum propriæ ductæ parallelæ cuidam rectæ lineæ, ac terminatæ in ipsa diametro.

In singulis proprijs sectionibus conicis sunt parallelæ inuicem, ipsæ applicatæ ordinatim

ad eandem diametrum, per prop. 30. lib. 1. elemenr. quia sunt parallelæ cuidam tertiæ rectæ.

Sunt mediæ proportionales inter portiones diametrorum terminatas ipsis & lateribus proprijs rectis, & inter ipsa niet latera recta adæquatè vel producta, vel partes ipsorum.

Ipsarum quadrata sunt æqualia rectangulis proprijs applicatis ad recta lateri diametrorum propriarum, adæquatè, vel excedentibus, vel deficientibus.

Si concipiantur productę vltra diametrum, incurrent in aliud punctum sectionum propriarum, & bifariàm diuidentur singulæ ab diametris quibus ordinatim sunt applicatæ.

CONSIDER. NOSTRA XXXV.

Circa rationes specificas rectarum linearum semiordinatim applicatarum ad diametrum in Parabolica sectione conica.

QVadrata illarum sunt æqualia rectangulo contento sub latere recto adæquatè sumpto, & sub portione ipsius diametri inter ipsas & prædictum rectum latus.

Sunt mediæ proportionales inter latera prędicti rectanguli sub recto latere adæquatè sumpto, & portione diametri ipsius inter ipsas & prædictum latus rectum.

CONSIDER. NOSTRA XXXVI.

Circa rationes specificas rectarum linearum semiordinatim applicatarum ad diametrum in sectione conica, quæ dicitur Hyperbola.

QVadrata illarum sunt æqualia rectangulo applicato excedentique ad latus rectum latitudinem habenti portionem diametri inter ipsas & rectum prædictum latus.

Sunt mediæ proportionales inter portionem prædictam diametri transuersæ, & inter latus productum rectum, quæ duæ rectæ lineæ seu duo latera rectangulum comprehendunt prædictum.

CONSIDER. NOSTRA XXXVII.

Circa rationes specificas rectarum linearum semiordinatim applicatarum ad diametrum sectionis conicæ quæ dicitur Ellipsis.

QVadrata illarum applicatarum ad diametrum modò ad angulos rectos modò ad obliquos, sunt æqualia rectangulo applicato ad latus rectum deficientique, & latitudinem habenti portionem diametri sitam inter ipsas & latus rectum.

Sunt medię proportionales inter latera prædicti rectanguli applicati ad latus rectum.

CONSIDERATIO XXXVIII.

Circa rationes specificas rectarum linearum semiordinatim applicatarum ad diametrum sectionis conicæ quæ sit circulus.

QVadrata illarum applicatarum semper ad angulos rectos ipsis diametris, sunt æqualia rectangulo sub portionibus diametri factis ab ipsis.

Sunt mediæ proportionales inter dicta segmenta diametri, & perpendiculares ipsi diametro.

CONSIDER. NOSTRA XXXIX.

Si in hyperbola, vel Ellipsi, vel circuli circumferentia, datis torum lateribus recto at transuerso, ducatur recta linea nectens dictorum laterum constitutorum ad angulos rectos inuicem, iuxta naturam laterum rectorum, duo extrema non communia; & qualibet recta linea ordinatim applicetur ad latus transuersum propriæ sectionis conicæ. Erit in illis sectionibus proprijs quadratum semissis rectæ lineæ illius ordinatim applicatæ, æquale rectangulo contento sub portione transuersi lateris inter ipsam & verticem propria sectionis, seu latus rectum, & sub recta linea parallela lateri recto educta ab eodem puncto diametri seu transuersi lateris in quo illud secat prædicta recta linea ordinatim applicata, ad prædictam rectam producendam si opus sit, nectentem prædicta duo extrema non communia lateribus transuerso & recto datis.

SVppositio. In hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, sint data latera, AB transuersum, & rectum AC, constituta sibi inuicem perpendiculariter iuxta naturam laterum rectorum in A, vertice; rectaque BC vniat illorum extrema B & C non communia; & ad latus AB transuersum producendum si opus sit, intra locum datarum sectionum, sit semissis FG, ordinatim rectæ lineæ applicatæ; tùm ex puncto G per propos. 31. lib. 1. elem. acta sit recta linea GK parallela recto lateri AC, quæ secabit in K, rectam CB per 11. prop. Procli, Dico quadratum rectæ FG, esse æquale rectangulo sub KG, GA. & sic de omnibus alijs semissibus rectarum linearum ordinatim applicatarum transuerso lateri AB.

Apparatus & demonstratio in Hyperbola. Quia per ax. 19. lib. 1. elem. recta GB maior est quàm AB, & in triangulo rectangulo BGK, (nam cùm sint rectæ AC, GK positæ parallelæ, sitque angulus in A rectus, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli in A & G, æquales, ideoque angulus in G rectus) est recta AC parallela ipsi GK basi; erit per lem. 50. BG ad GK, sicut BA ad AC; prima verò GB ostensa est maior quàm tertia BA; ergo per prop. 54. lib. 5. elemen. secunda GK eris

erit maior quàm quarta AC. Peracto igitur rectangulo GE sub BG, GK, per lemma 1. ad lib. 2. elem. latus BE æquale ipsi GK per prop. 34. lib. 1. elem. etiam erit maius quàm AC, per 1. ax. lib. cit. 1. elem. latus ergo AC non attinget latus EK, (alioqui in parallelogrammo AE, latera opposita BE, AC, essent æqualia, ostensa inæqualia; quod verò sit parallelogrammum AE, probatur; nam in rectangulo GE, sunt parallela latera BG, EK; tùm per prop. 28. lib. 1. elem. BE, AC, erunt parallelæ propter angulos rectos in B & A; igitur parallelogrammum erit AE.) Ergo recta AC produci poterit, & secabitur in D ab recta EK, sicuti eius parallela GK secatur in K, per prop. 11. Procli. Ducendo autem per prop. 31. lib. 1. elem. per punctum C, rectam lineam parallelam ICH, ipsi BG, vel EK, secabit parallelas BE, GK, illam in I, hanc in H, per cit. prop. 11. Procli; & per lemma 2. ad lib. 2. elem. resultabunt alia tria rectangula GD, HD, GC; quorum primum GD, erit applicatum ad rectam AC, excedens tertium GC, figura GD, simili figuræ GE sub GB, GK vel AD, iuxta def. 6. & prop. 24. lib. 6. elem. Quare per prop. 12. quadratum rectæ FG semissis rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro BAG, in hyperbola, erit æquale rectangulo sub AG, & GK vel AD.

Apparatus, & demonstratio in ellipsi. Quandoquidem per 19. ax. lib. 1. elem. recta AB est maior quàm GB, & in triangulo rectangulo CAB est recta GK æquidistans lateri AC, erit per lem. 50. vt AB ad AC, sic GB ad GK; prima verò AB maior est ostensa quàm tertia GB, ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secunda AC erit maior quàm quarta GK. Peracto autem rectangulo AI sub CA, AB, per lem. 1. ad lib. 2. elem. erunt per prop. 34. lib. 1. elem. latera eius opposita AC, BI, æqualia; sed GK minor est ostensa quàm AC, ergo etiam minor erit quàm BI, per ax. 1. lib. 1. elem. Anguli autem G & A sunt æquales per prop. 29. lib. 1. elem. & angulus A est rectus, ergo etiam in G erit rectus; sed rectus est etiam angulus in B ob rectangulum AI factum, ergo per prop. 28. lib. 1. elem. parallelæ erunt rectæ GK, BI. Portò recta GK non attinget latus CI, alioqui per prop. 34. lib. 1. elem. in parallelogrammo GI, essent æqualia latera GK, BI, opposita, contra id quod demonstrauimus: igitur produci poterit recta GK vltra K, & secabitur in H ab recta CI, per prop. 11. Procli, quia secatur in I, recta BI, ab ipsa CI. Sed & per prop. 31. lib. 1. elem. potetimus agere per punctum K rectam lineam æquidistantem ipsi CI, quæ secabit in D & E, rectas AC, BI parallelas ipsi GKH, per cit. prop. 11. Procli, & 30. prop. lib. 1. elem. vnde per lem. 2. ad lib 2. element. resultabunt parallelogramma rectangula CG, GD, KC, quorum secundum GD sub KG, GA, adiacet lateri recto AC, deficitque ab primo GC sub GA, AC, rectangulo KC tertio simili ei quod sub BA, AC, lateribus datis continetur, idque per prop. 24. & def. 6. lib. 6. elem. Quare per prop. 13. quadratum rectæ FG, erit æquale rectangulo sub KG, GA. Quod erat concludendum in ellipsi.

Apparatus & demonstratio in circulo. Quia per considerationem 30 omnes rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametros circuli sunt perpendiculares ipsi; producendo rectam FG vsque ad punctum aliud D circumferentiæ circuli, secabit obuiam rectam CB in K, vel etiam producendo illam si opus sit vltra D, secabit ipsam CB in K, per prop. 11. Procli: eruntque parallelæ rectæ AC, GK, per prop. 28. lib. 1. elem. ob angulos rectos in A & G; vel per prop. 14. lib. eiusdem 1. elem. ob angulos rectos in G puncto rectæ AB, quas efficiunt duæ rectæ FG, GK, erunt in directum ipsæ FG, GK; & vti diximus erunt parallelæ rectæ AC, GKD. Quare cùm in circulo recta DG æqualis ipsi FG, vel per defin. 10. inter primas, vel per prop. 3. lib. 3. elem. sit perpendicularis diametro AB circuli, & parallela ipsi AC æquali diametro AB & ipsi ad angulos rectos: erit per lemma 8. rectangulum sub KG, GA, æquale quadrato rectæ GD, vel rectæ FG, per prop. 16. Procli, & ax. 1. lib. 1. elem. quod erat in circulo probandum. Tum etiam rectangulum sub AG, GB, erit æquale quadrato rectæ FG, vel rectæ GD, ex dictis in lemmate citato.

CONSIDER. NOSTRA XL.

Ex datis lateribus transuerso ac recto in circulo; curuam eius lineam in plano delineare, per puncta innumera sine opera centri.

Svppositio, & apparatus. Per prop. 11. lib. 1. elem. ad angulos rectos disponantur datum transuersum AB latus, & rectum AC, in puncto A, ita vt latus rectum AC sit totum ad vnam partem transuersi AB; & recta linea BC transmittatur. Tùm per cit. prop. 11. lib. 1. elem. ex infinitis punctis diuersis intermedijs lateris transuersi AB, educantur rectæ lineæ perpendiculares vtrimq; ad ipsum; quæ erunt parallelæ ipsi AC lateri recto, per prop. 28. lib. 1. elem. propter angulos rectos in ipso latere transuerso AB; Quæque etiam secabuntur ab recta BC, per prop. 11. Procli, si producantur vti opus est. Nos exempli gratiâ duximus solum tres rectas DNE, FOG, HPI; quasque si opus sit oportebit producere vltra rectam BC. Insuper per prop. 13. lib. 6. elem. reperiatur media recta linea proportionalis inter AN, NE; & per 3. prop. lib. 1. elem. resecentur ex puncto N, hinc & inde ex recta DNE, duæ singillatim ND, NK, æquales

mediæ inuentæ proportionali. Eodem modo ponantur rectæ OF, OL, æquales mediæ inuentæ proportionali inter rectas AO, OG: tùm aliæ duæ PH, PM, æquales mediæ inuentæ proportionali inter duas AP, PI: & sic de reliquis omnibus. Dico circuli circumferentiam incedere per extrema D,F,H,K,L,M, positarum rectarum ND, OF, PH, NK, OL, PM; etiamque per extrema A & B, dati lateris transuersi AB: Itaque si constanti manu curua linea transmittatur per dicta extrema, sine vllo angulo; ipsa erit circumferentia circuli quæsiti.

Demonstratio. Cùm enim per apparatum fiat sibi inuicem perpendicularia data latera circuli, transuersum AB, AC rectum, in vno puncto extremo A communi, & ad vnam solum partem; rectaque BC vniat eorum extrema non communia C, B; & ad latus transuersum sint ordinatim applicatæ rectæ lineæ DNK, FOL, HPM; & sic de alijs, sunt enim parallelæ tertiæ rectæ AC, & ad angulos rectos ipsi transuerso lateri seu diametro AB, vnde per 3. prop. lib. 3. elem. diuiduntur bifariàm; quare ipsæ rectæ prædictæ erunt per definitionem 12. inter primas ordinatim applicatæ ad transuersum latus vel diametrum AB. Igitur per prop. 17. lib. 6. elem. cùm sint tres lineæ proportionales AN, DN vel NK, NE, erit rectangulum sub AN, NE æquale quadrato rectæ ND, vel NK: similiter erit rectangulum sub AO, OG, æquale quadrato rectæ OF, vel OL: denique erit rectangulum sub AP, PI, æquale quadrato rectæ PH, vel PM, per cit. prop. 17. lib. 6. elem. & sic de alijs omnibus huiusmodi. Quod si circuli circumferentia non incedat per extrema puncta assignata D, F, H, K, L, M, positarum mediarum proportionalium rectarum, incedat si fieri possit per alia vlteriora productarum, vel viciniora lateri transuerso seu diametro seu axi AB; tunc per præcedentem considerationem 39. quadratum rectæ inæqualis ipsi ND, vel NK, erit æquale rectangulo sub AN, NE, cui rectangulo probauimus esse æquale quadratum rectæ ND vel NK; igitur per 1. ax. lib. 1. elem. quadrata rectæ ND, vel NK, & rectæ, inæqualis ipsi ND vel NK, erunt æqualia inter se; & per prop. 16. Procli, ipsæ rectæ inæquales, erunt æquales inter se. quæ duo sibi contradicunt; falsa igitur erit positio vnde procedunt hæc pugnantia; videlicet quod circuli circumferentia non incedat per designata puncta A, D, F, H, B, I, L, K, & sic de alijs. Quod verò diximus de rectangulo sub AN, NE, comparando illud cum quadrato inæqualium rectarum ipsis ND, NK, æqualium inter se; quæ etiam maiores vel minores, vnam constituent bisariàm diuisam in N, per 3. prop. lib. 3. elem. ab diametro AB secante ipsam ad angulos rectos: idem dicendum erit de rectangulis alijs sub AO, OG, & sub AP, AM, & reliquis si sint. Igitur in plano ex datis lateribus transuerso ac recto circuli, curuam lineam circuli descripserimus, & rectè delineatam per puncta inuenta sine ope centri demonstrauerimus.

Alia ratione idem præstabimus ex sola diametro data AB, & demonstrabimus praxim ex definitione 25. inter has secundas.

Apparatus. In diametro data AB, sumantur ex intermedijs infinita puncta N, O, P, & sic de reliquis, distincta: tùm per prop. 11. lib. 1. elem. ex illis educantur vtrimque perpendiculares ad ipsam diametrum infinitæ vtrimque rectæ lineæ DNK, FOL, HPM, & sic de reliquis. Insuper per prop. 13. lib. 6. elem. reperiantur inter segmenta duo diametri AB, facta ab dictis perpendicularibus, mediæ rectæ lineæ proportionales: exempli gratiâ, inter duo segmenta AN, NB, diametri AB, facta ab perpendiculari DNK, sumatur media proportionalis; & per prop. 3. lib. 1. elem. detrahantur vtrimque ex puncto N diametri, de recta DNK, rectæ lineæ ND, NK, æquales ipsi mediæ proportionali rectæ inuentæ: Eodem modo de recta FOL, rectæ lineæ OF, OL, æquales mediæ proportionali inter segmenta AO, OB, diametri, facta ab recta FOL: tùm de recta HPM, rectæ lineæ PH, PM, æquales mediæ proportionali inuentæ, inter segmenta AP, PB, diametri AB, facta ab recta HPM: & sic de alijs omnibus. Dico circuli circumferentiam describendam in plano, transituram non solum per extrema A & B, diametri datæ, sed etiam per extrema D,F,H,M,L,K, positarum rectarum.

Demonstratio. Si circuli circumferentia diametrum habentis datam AB, non incedat per extrema designata puncta D, F, M, L, K; transeat si fieri possit per alia vlteriora, vel viciniora ipsi diametro AB, rectarum DNK, FOL, HPM, & sic de reliquis, positis per apparatum perpendicularibus diametro AB, & secantibus ex positione aduersarij circumferentiam circuli introducti: tunc verò per defin. 25. inter has secundas, ipsæ rectæ inæquales positis in apparatu erunt mediæ proportionales inter segmenta diametri AB propria; sunt enim totæ parallelæ inuicem per prop. 28. lib. 1. elem. & bisariàm sectæ ab diametro AB, per propos. 3. lib. 3. elem. eo quod secentur ab ipsa ad angulos rectos; quare ipsæ erunt ordinatim applicatæ ipsi diametro AB, per def. 12. inter primas: igitur per lemma 47. quadrata ipsarum semissium, erunt æqualia rectangulis sub segmentis proprijs duobus diametri: exempli gratiâ, quadratum rectæ inæqualis ipsi ND, erit æquale rectangulo sub AN, ND: sed est media proportionalis ND recta inter dicta eadem duo segmenta AN, NB, per apparatum, ergo per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ ND erit æquale rectangulo sub AN, NB: cùm igitur quadratum

tum rectæ ND, & quadratum rectæ inæqualis ipsi ND, sint æqualia ostensa eidem rectangulo sub AN, NB; ipsa quadrata duo seorsim sumpta, erunt per 5. ax. lib. 1. elem. æqualia inter se; ideòque per prop. 16. Procli, ipsæ rectæ ND, & altera ipsi inæqualis, erunt æquales inter se, totum & pars, contra 8. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum deductum ex positione aduersarij introducentis circuli circumferentiam circa AB datam diametrum, non transire per designata puncta D, F, H, M, L, K, & sic per alia huiusmodi, falsa erit & repugnans ratioñi, & vera nostra assertio. Quare ad praxim aliam reduxerimus propositum in hac consideratione nostra, & rectè factam esse demonstratione allata confirmauerimus.

CONSIDER. NOSTRA XLI.

Ex datis lateribus incognitæ Paraboles, transuerso quod sit axis, & recto: describere per puncta innumera inuenienda lineam curuam ipsius Paraboles, in plano.

SVppositio. Datum sit latus transuersum AB, quod sit axis, & rectum latus eius AC, Paraboles ignotæ. Oporteatque ex his datis ipsam delineare in plano, seu eius lineam curuam, per innumera puncta inuenienda.

Apparatus. Per prop. 11. lib. 1. elem. constituantur perpendiculariter in puncto communi A, latera data, transuersum AB, & rectum AC, ita vt tota sint ad vnam partem alterius. Præterea per cit. prop. 11. lib. 1. elem. constituantur rectæ lineæ innumeræ diuersæ perpendiculares vtrimque lateri transuerso seu axi AB: nos exempli gratiâ ponimus tres GDH, IEK, LFM, quæ erunt parallelæ, & lateri recto AC, ob angulos rectos quos efficiunt cum axe AB, per prop. 28. lib. 1. elem. Insuper per prop. 13. lib. 6. elem. inter rectas CA, AD, reperiatur recta linea media proportionalis, cui de recta GDH, resecentur per 3. prop. lib. 1. elem. æquales rectæ lineæ DG, DH, ex puncto D axeos, vtrimque; simili modo, ipsi mediæ proportionali inueniendæ inter rectas CA, AE; sumantur de recta IEK, vtrimque æquales EI, EK, ex puncto E axeos, tùm de recta LFM, ex puncto F axeos, sumantur vtrimque FL, FM, ex puncto F axeos, æquales inuentæ rectæ mediæ proportionali inter rectas CA, AF: & sic de reliquis. Dico curuam lineam Paraboles incedere debere ex vertice A, per puncta inuenta L, I, G, A, H, K, M, & sic de reliquis, delineandam in plano rectarum positarum & datarum, sine vllis angulis.

Demonstratio. Si ita non sit vti asserimus; linea curua Paraboles proueniens ex vertice A, incedat si fieri possit per alia puncta vlteriora vel viciniora respectu axeos, dictarum rectarum perpendicularium GDH, IEK, LFM. Tunc per def. 12. & 18. inter primas, prædictæ rectæ erunt ordinatim applicatæ ad axem AB; igitur per def. 21. inter secundas, recta linea inæqualis ipsi GD, erit media proportionalis inter CA, AD; ideoque per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum ipsius rectæ inæqualis ipsi GD, erit æquale rectangulo sub CA, AD: & sic de reliquis inæqualibus ipsis IE, LF, philosophandum erit. Verùm quia per apparatum recta ipsa GD est media proportionalis inter CA, AD, erit per citatam propos. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ GD æquale rectangulo sub CA, AD: cùm ergo probauerimus eidem rectangulo sub CA, AD, esse æqualia, quadratum rectæ GD, & quadratum rectæ inæqualis ipsi GD; erunt per ax. lib. 1. elem. æqualia dicta quadrata, & per pos. 16. Procli, ipsæ rectæ inæquales, erunt æquales, quæ repugnant inuicem. Sic vero erit discurrendum in reliquis rectis inæqualibus, & deducetur idem absurdum. Igitur falsa erit positio aduersarij vnde procedunt necessariò hæc absurda: ideòque assertio nostra illi positioni contradicens vera. Descripserimus igitur in plano lineam curuam paraboles, ex datis eius lateribus transuerso quod sit axis, & recto.

CONSIDER. NOSTRA XLII.

Ex datis lateribus Hyperboles incognitæ, transuerso quod sit axis, & recto: describere per innumera puncta inuenienda lineam curuam ipsius Hyperboles, in plano.

SVppositio. Datum sit latus transuersum AB hyperboles incognitæ, quod sit axis eius; & rectum AC latus. Oporteatque in plano inuenire innumera puncta, per quæ incedat linea curua hyperboles.

Apparatus. Latera duo data AB, AC, per prop. 11. lib. 1. elem. constituantur ad inuicem sibi perpendicularia in communi puncto A, sintque tota ad vnam alterius: & extrema non communia B, C, datorum laterum vniantur recta linea BC producenda vltra C in infinitum: & similiter latus BA transuersum producatur in infinitum vltra A. Insuper sumantur innumera puncta in productione BA, vltra A, instar omnium assumimus punctum G, ex quo per propos. 31. lib. 1. elem. agatur versus BC productam rectam vltra C, recta linea GK parallela lateri recto AC, quæ secabitur in K ab recta BCK, per propos. 11. Procli. Ad hæc per prop. 13. lib. 6. elem. inter duas rectas AG, GK, reperiatur media recta proportionalis; & de producta vtrimque recta GK, sumantur vtrimque ex puncto G dati axeos BAG, duæ rectæ GF, GD, æquales singulæ ipsi mediæ proportionali inuentæ: & sic erit præstandum in alijs innumeris punctis axeos BA producti vltra A, sumendis. Dico autem lineam curuam hyperboles dedu-

ctam ex vertice A, transituram per extrema puncta F, & D, rectarum GF, GD; & sic per alia extrema puncta aliarum huiusmodi rectarum perpendicularium vtrimque axi BAG, æqualium medijs proportionalibus rectis inueniendis inter portionem axeos producti terminatam vertice A, & rectis lineis eductis ab eiusdem punctis axeos BAC parallelis lateri AC, & rectas ipsas parallelas proprias terminatas in recta BC producta vltra C.

Demonstratio. Si non ita sit vt asserimus, transeat per puncta remotiora, vel viciniora rectarum GF, GD, respectu axeos: eruntque ipsæ interiectæ inter lineam curuam hyperboles & eius axem ABG, semisses æquales rectæ ordinatim applicatæ ad axem, propter angulos rectos in G: quare per considerationem 39. quadratum rectæ lineæ inæqualis ipsi GF, vel GD, erit æquale rectangulo sub AG, GK: Verùm quia per apparatum recta GF, vel GD, est media proportionalis inter AC, GK; ideò per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ GF, vel GD, erit æquale rectangulo sub AG, GK. Igitur quandoquidem ostendimus eidem rectangulo sub AG, GK, æquale esse quadratum rectæ GF, vel GD, & quadratum rectæ inæqualis cuilibet ipsarum; ipsa quadrata per ax. 1. lib. 1. elem. erunt æqualia inter se: quare per prop. 16. Procli, etiam ipsæ rectæ GF, & illi inæqualis, vel rectæ GD, & illi inæqualis, erunt æquales inter se, totum & pars, contra 8. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum deductum ex positione aduersarij contradicente assertioni nostræ, indicat ipsam positionem aduersarij esse falsam, & nostram assertionem veram. fecerimus ergo imperatum, & rectè factum esse probauerimus.

CONSIDER. NOSTRA XLIII.

Ex datis lateribus Ellipseos ignotæ; Transuerso quod sit axis, & recto: describere in plano lineam Ellipseos curuam, per innumera puncta inuenienda in ipso plano.

Svppositio. Data sint latera AB transuersum & axis, AC rectum. Oporteatque in plano reperire innumera puncta, per quæ linea curua ellipseos describenda incedat.

Apparatus. Data duo latera AB, AC, per prop. 11. lib. 1. elem. constituantur in communi A puncto, ad angulos rectos, ita vt sint tota ad vnam partem alterius; & eorum extrema C, B, non communia coniungantur recta linea BC. Præterea, per cit. prop. 11. ex puncto aliquo E ex intermedijs axeos AB, educatur vtrimque ad ipsum axem perpendicularis recta linea DEG infinita, hæc erit ob angulos rectos in A & E, parallela ipsi AC, per prop. 28. lib. 1. elem. quare ab recta AB secante AC rectam, secabitur ipsa EG in F, per 11. prop. Procli. Eodem modo ducantur infinitæ huiusmodi lineæ perpendiculares ad axem AB, vtrimque, & secantes rectam BC; de quibus idem erit discursus faciendus, atque de recta DEG. Insuper reperiatur datis duobus rectis AE, EF, per prop. 13. lib. 6. elem. media recta linea proportionalis; & per prop. 3. lib. 1. elem. ex puncto E axeos vtrimque de recta infinita DEG, sumantur æquales rectæ ED, EG, æquales singulæ ipsi rectæ mediæ proportionali inuentæ. Dico lineam curuam ellipseos quæsitæ incessuram per extrema puncta D, G, mediarum singularum proportionalium inter AE, EF; tùm per alia infinita huiusmodi pũcta extrema aliarum rectarum sumendarum in ducendis rectis perpendicularibus ipsi AB axi, ab earum punctis & axeos proprijs, mediarum proportionalium inter portiones axeos, eius vertice A terminatas, & ipsis rectis perpendicularibus, & portiones ductarum ab axeos puncto communi dictis perpendicularibus, inter axem & rectam BC.

Demonstratio. Si non ita sit vti asserimus, transeat si fieri possit circumferentia curua ellipseos sub axe AB, habente rectum latus AC, per alia puncta remotiora aut viciniora respectu axeos AB; nihilominus per coroll. nost. ad def. 18. inter primas illa recta per E transiens punctum axeos AB, erit ordinatim applicata: ergo per considerationem 39. quadratum rectæ lineæ inæqualis ipsi DE, vel EG, erit æquale rectangulo sub AE, EF: Verùm quia recta ED, vel EG, est per appatatum media proportionalis inter AE, EF, erit per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ ED, vel rectæ EG, æquale rectangulo sub AE, EF. Igitur quia eidem rectangulo sub AE, EG, ostensa sunt æqualia quadrata rectæ ED, vel EG, & rectæ inæqualis cuilibet ipsarum; erunt inter se æqualia per 1. ax. lib. 1. elem. ideoque etiam per prop. 16. Procli, rectæ ED, EG, & inæqualis cuilibet ipsarum, erunt æquales inter se, contra 8. ax. lib. 1. elem. quod est absurdum; ergo & positio aduersarij vnde procedit, videlicet quod linea curua ellipseos circa axem AB datum, non incedat per extrema puncta D & G, inuenta; & sic per alia inuenienda modo explicato. Ergo per illa incedet, & ex datis lateribus AB transuerso & axe, & recto AC, ignotæ ellipseos, descripserimus in plano lineam eius curuam per innumera puncta inuenta, sicuti fuit imperatum; & rectè delineatam esse ostenderimus.

CONSIDER. NOSTRA XLIV.

Ex datis lateribus sectionum incognitarum oppositarum, transuerso quod sit axis, & recto: inuenire in plano infinita puncta, per quæ lineæ curuæ illarum sectionum oppositarum delineatæ in eodem plano incedant in ipso plano.

PEr considerationem quadragesimam secundam, seorsim vna describatur hyperbola

bola ex datis lateribus eius, in plano: tùm etiam alia in eodem plano ex eisdem datis lateribus: nam per defin.24. inter secundas, communem habent axem qui est ex datis latus transuersum, & æqualia obtinent recta lateræ: ideoque per cit. def. erunt sectiones oppositæ descriptæ in plano per innumera puncta inuenta in ipso plano.

CONSIDER. NOSTRA XLV.

Si ex vno vertice, puta A, recta linea data AB, ponantur duæ rectæ lineæ æquales, quarum vna AC sit orthogonia, altera vero obliqua AD, ipsi AB, & ab extremis C, D, punctis non communibus, ductarum AC, AD; ad alterum verticem B datæ AB, transmittantur rectæ lineæ CB, DB, producendæ si opus sit vltra C, D, vnà cum data AB vltra A: & in ipsa data AB sumatur quodcumque punctum, veluti E, ex intermedijs, vel in productione eius vltra A: ex quo E puncto emissæ sint duæ rectæ EG, EH; quarum prima EG sit parallela ipsi AC, & occurrat in puncto G rectæ CB productæ aut non productæ vltra C; & secunda EH sit æquidistans ipsi AD, & occurrat in puncto H rectæ BD productæ aut non productæ vltra D. Dico primò quod illæ duæ rectæ EG, EH, eumdem E terminum obtinentes, vel inter extrema A, B, rectæ AB, vel in productione rectæ AB vltra A, (vt in prima & secunda figuris videre est) sint æquales. Dico secundò quod ad illas EG, EH, eandem habeat rationem recta AE. Dico tertiò, quod in prima figura, in qua punctum E est ex intermedijs rectæ AB, rectangulum sub AE,EG, sit æquale rectangulo sub AE,EH: & quod in secunda figura, in qua punctum E est in productione rectæ BA vltra A, & sunt etiam productæ rectæ BC.BD, vltra suos vertices C, D, ad partes puncti E, rectangulum sub AE, EG, sit æquale rectangulo sub AE, EH.

Apparatus. Ex datis resultant duo triangula, vnum in prima figura rectangulum BAC, aliud obliquangulum BAD in secunda figura. Sed etiam ex datis, quia sunt rectæ AC,EG, parallelæ; & aliæ duæ rectæ AD,EH parallelæ: resultabunt per coroll.prop.4.lib.6. elem. in singulis figuris prædictis, duo triangula BAC, BEG, rectangula similia; tùm etiam alia duo triangula BAD,BEH, obliquangula similia in singulis prædictis figuris.

Demonstratio primæ assertionis. Dantur duæ rectæ AC,AD, æquales, ergo per 7.prop. lib.5.elem.erit vt BA ad AC; sic BA ad AD: Datur etiam in triangulo BAC recta linea EG parallela ipsi AC, vel in triangulo BEG recta linea AC parallela ipsi EG: igitur per lemma 50. ad lib. 1. Apoll. erit vt BA ad AC, sic BE ad EG; & paulò ante ostendimus esse vt BA ad AC sic BA ad AD; ergo per 11. prop. lib.5. elem. erit vt BA ad AD, sic BE ad EG. Præterea quoniam datur in triangulo BAD recta linea EH parallela ipsi AD, vel in triangulo BEH recta linea AD parallela ipsi EH; erit per lemma 50.cit.vt BA ad AD sic BE ad EH; & quia probauimus esse vt BA ad AD sic BE ad EG; erit per 11.prop. lib.5. elem. vt BE ad EG, sic BE ad EH: quapropter iuxta 9. propos. lib.5. elem. erunt duæ rectæ EG,EH æquales.

Demonstratio secundæ assertionis. Cùm sint ostensæ duæ rectæ lineæ EG,EH, æquales, in prima assertione: ad illas per 7.prop. lib.5.elem. eadem recta AE, eandem habebit rationem, eundem E terminum obtinentes vel inter extrema A,B, rectæ datæ AB, vel in productione rectæ BA vltra A.

Demonstratio tertiæ assertionis. Per lem.49. ad lib. 1. Apoll. in prima figura rectangulum sub AE, EG, erit æquale rectangulo sub AE, EH; vel in secunda figura rectágulum sub AE, EG, erit æquale rectangulo sub AE. EH.

Hanc considerationem 45. minimè addimus in gratiam Tyronum, sed ad scrupulum dubitationemque tollendam è mentibus Geometrarum in Apollonianis quatuor primis conicorum libris versatorum. Cur nimirum in definitionibus nostris ad secundas libri huius primi Apollonij additis, & in consequentibus eiusdem Authoris propositionibus exponendis, constanter latera omnia recta diametrorum conicarum sectionum, seu transuersorum laterum earumdem sectionum, ipsis lateribus transuersis vel diametris perpendicularia dicamus & efficiamus, licet ipsa latera transuersa non sint axes. Nam multi Geometræ latera recta propria transuersorum in conicis sectionibus solummodò agnoscunt orthogonia ipsis transuersis, quando ipsa transuersa sunt axes; minimè verò perpendicularia, quando ipsa transuersa sunt diametri diuersæ ab axibus, sed inclinata secundum rectilineum angulum datum vel electum, iuxta quem debent semiordinatim applicari ipsi transuerso lateri rectæ lineæ potentes rectangula determinata, adæquatè, vel excedentia, vel deficientia; de quibus Apollonius agit in primis suis huius libri propositionibus ab vndecima ad decimam quartam inclusiuè. Et quia recta omnia linea ex puncto cuiuscumque diametri sectionis conicæ sito in linea curua, educta parallela ordinatim vel semiordinatim applicatæ rectæ ipsi diametro, factaque æqualis dato recto lateri, est per 17. proposition. huius libri, contingens ipsam sectionem in dicto puncto, totaque ab illo procedit extra ipsam sectionem; angulumq; rectilineum efficit cum dicta diametro, æqualem dato & effecto angulo ab recta linea ordinatim vel semiordinatim applicata prædicta, & ipsa diametro, iuxta 29. propos. lib. 1. elem. Tùm quoniam pro comperto habent per 18. defin. inter primas lib.1. Apoll. axem sectionis conicæ diuidere bifariàm rectas omnes lineas ordinatim ad ipsum applicatas,

& ad angulos rectos, rectum latus huius axeos positum ad angulos ipsi axi in eius puncto etiam sito in linea curua sectionis, erit per prop. 18. lib. 1. elem. parallelum cuicumque rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad hunc axem; ideoque per cit. prop. 17. lib. 1. Apollonij totum ab illo puncto procedet extra sectionem, eamque continget vero contactu in dicto puncto. Præterea transuersum latus agnoscentes procedere intra locum sectionis secundum se totum, vel secundum aliquam sui partem; rectum verò latus ex dictis contingere sectionem & procedere totum extra ipsam. Insuper aduertentes transuersum latus quod semper est diameter sectionis, prius natura concipi quàm rectum eius latus. Denique conuicti demonstratione huius considerationis 45. fatentur posse constitui rectum latus cuiuscumque diametri sectionis, (etiamsi non sit axis eius illa diameter seu transuersum latus) perpendiculare modo explicato suo transuerso lateri. Ideo fatentur primo loco posse rectum latus proprium cuiuscumque transuersi lateris sectionis, nuncupari perpendiculare, suo transuerso lateri. Fatentur secundo loco posse rectum latus esse inclinatum cuicumque suo lateri transuerso, etiamsi sit axis. Sed contendunt primum posse etiam transuersum latus dici internum, & rectum eius latus externum, vel contingens ipsam sectionem: tùm etiam posse rectum latus esse orthogonium transuerso suo lateri si fuerit axis; inclinatum verò cuicumque alteri transuerso quod non sit axis: denique volunt posse transuersum latus appellari primum, rectum verò latus denominari secundum.

Hæc omnia licet posse dici & constitui concedamus, & ab Apollonio minimè ignorata: tamen sicuti liber fuit in modo loquendi, ita & nos liberè eum sequimur tanquam Magistrum: nam aduertimus eum duas datas rectas lineas necessarias vel vtiles ad conicarum sectionum descriptionem in plano, quarum linearum vna est latus transuersum, altera latus rectum, semper supponere esse ad inuicem sibi perpendiculares; siue illa quæ est latus transuersum, sit axis, vel quæcumque alia diameter sectionis describendæ: vt constat ex prop. 53. libri huius primi, in figuratione hyperbolæ; & ex prop. 54. in effectione ellipseos; & ex prop. 55. in formatione sectionum oppositarum: in quibus etiam propositionibus rectangulorum æqualium vel excedentium vel deficientium facit commemorationem, quæ possint rectæ lineæ ipsis proprijs diametris semiordinatim applicatæ in dato angulo, factorum ab determinatis portionibus transuersi lateris, & ab recto latere perpendiculariter constituto suo proprio lateri transuerso, in Parabola quidem ex prop. 52. vel in hyperbola, ellipsi & sectionibus oppositis, iuxta propositiones 53. 54. 55. citatas, ab rectis parallelis ipso lateri recto perpendiculari suo transuerso lateri, & occurrentibus modo explicato in hac consideratione 45. Quapropter in definitionibus nostris, & in propositionibus tantum Magistrum ac Ducem secuti, semper constanterque assumimus latera recta perpendicularia suis proprijs transuersis.

PROPOSITIO XVII.

Si in coni sectione, à vertice ipsius ducatur recta linea æquidistans ei quæ ordinatim applicata est: extra sectionem cadet.

QVandoquidem datur vertex sectionis conicæ, idem punctum verticis erit etiam extremum diametri ipsius conicæ situm in ipsamet linea curua sectionis conicæ datæ, per def. 11. inter primas: igitur poterimus animo concipere diametrum conicæ sectionis ad quam ordinatim applicata datur recta linea in ipsa sectione conica, deductam ab ipso puncto verticis dato. Et hæc sint loco apparatus.

Demonstratio. Si recta linea ab vertice conicæ sectionis, seu ab extremo puncto diametri conicæ sectionis quod in ipsa eius linea curua est, ducta æquidistans rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad hanc diametrum, non cadat tota extra sectionem conicam; ipsam secabit duobus in punctis tantum; nam producta vltra illa, progreditur extra sectionem in infinitum, per prop. 10. Igitur poterimus considerare hanc rectam æquidistantem ordinatim applicatæ ad hanc diametrum, prouenire ex alio puncto sectionis curuæ in quo eam secat diuerso ab vertice, & incurrentem in diametrum ipsam; & sic per prop. 7. bifariàm secabitur ab ipsa diametro in puncto occursus mutui, quod est absurdum, nam secatur in extremo suo vno nimirum in vertice diametri & conicæ sectionis, quatenus est terminata duobus punctis lineæ curuæ sectionis conicæ. hoc absurdum indicat positionem aduersarij contradicentem assertioni huius propositionis esse falsam, & ipsam assertionem veram.

Hæc demonstratio vniuersalissima est, & potest applicari etiam circulo considerato vt sectio conica.

Sed age, propositum etiam demonstremus in circulo, alia ratione. Imprimis cùm omnis recta linea ordinatim applicata diametris curuarum linearum bifariàm secetur per definitiones 10. ac 12. inter primas; data recta linea ordinatim applicata diametro circuli proueniente ex verticis sui puncto in circumferentia eius sito, bifariàm secta ab ipsa diametro, erit secta ad angulos rectos per prop. 3. lib. 3. element. quare recta linea educta ab vertice prædicto seu extremo vno diametri circuli, paral-

parallela dictę rectæ ordinatim applicatæ huic diametro, erit ad angulos rectos ipsi diametro circuli in extremo eius vno, per prop. 29. lib. 1. elem. ergo per prop. 16. lib. cir. 3. elem. prædicta recta linea ab extremitate diametri circuli, æquidistans rectæ ordinatim applicatæ in illo ad ipsam diametrum eius, tota extra ipsum cadet. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Recta linea ducta ab vertice sectionis conicæ, seu ab extremo diametri eius sito in linea curua sectionis conicæ, æquidistans rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad ipsam dictam diametrum: sectionem ipsam conicam contingit in vno tantùm puncto, nimirum verticis.

SI enim aliquid aliud haberet commune cum linea curua sectionis, maximè esset aliud punctum dissitum, (nam immediatum non datur; & recta linea nihil potest habere commune cum curua, quàm puncta dissita, nam partes non possunt habere communes, eo quod specie differant.) tunc verò per prop. 10. dicta recta linea caderet intra sectionem, contra hanc prop. 17. quare falsa erit positio vnde procedit hoc absurdum, & vera assertio corollarij nostri contradicens illi positioni.

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea sectioni coni occurrens, productaque in vtramque partem extra sectionem cadat; sumatur verò punctum aliquod intra sectionem, & per ipsum ei quæ sectioni occurrit æquidistans ducatur: ducta recta linea, & producta, ex vtraque parte sectioni occurret.

SVppositio. Sit recta linea AFB, sectioni conicæ occurrens, eamque contingens in vnico solùm puncto F; quod idem est atque producta in vtramque partem, cadens extra sectionem datam conicam; sumptumque sit punctum aliquod D intra ipsam sectionem conicam, & per hoc punctum D, ducta sit per propos. 31. lib. 1. elem. recta linea DG intra ipsam sectionem conicam, parallela ipsi AFB contingenti ipsam sectionem conicam. Dico istam rectam lineam DG, producendam in infinitum, vtrimque, occurrere datæ sectioni conicæ ex vtraque parte, vna in I, altera in H.

Demonstratio facillima est in circulo prout est sectio conica, tùm etiam in ellipsi; nam per 28. ax. lib. 1. elem. cùm area circuli vel ellipseos sit finita & circumscripta, & recta linea DG vtrimque producatur in infinitum, occurret ex vna parte in I, & ex alia in H, circumscribentibus lineis curuis ipsas areas finitas circuli vel ellipseos. Iam verò propositum demonstremus in parabola vel hyperbola.

Apparatus in parabola & hyperbola. Ex puncto F contactus rectæ lineæ AFB, & lineæ curuæ paraboles vel hyperboles, per D punctum datum intra illas transmittatur recta linea FDK. Præterea à dextris & sinistris rectæ lineæ FDK, in linea curua hyperboles vel paraboles sumatur aliquod punctum E, per quod & punctum F, immittantur rectæ lineæ FE, vna à dextris, alia sinistris dictæ rectæ FDK, quæ productæ vltra E, procedent per prop. 10. extra sectiones parabolæ vel hyperbolæ. Denique vtrimque in infinitum extendatur recta DG.

Demonstratio in hyperbola vel parabola. Recta DG parallela ipsi AFB, extensa vtrimque in infinitum, secabitur in G, verbi gratiâ per prop. 11. Procli, ab rectis FE; vel intra vel extra sectiones datas parabolæ, vel hyperbolæ. Si primum, vti videre est in figura proposita, à dextris rectæ FDK; quandoquidem vltra G producta est in infinitum, transiliet extrema figuræ terminatæ compositæ ex recta FGE, & curua linea FIE; rectam quidem FGE intersecando, & in partes contrarias progrediendo per 10. ax. lib. 1. elem. hoc est intra figuram terminatam prædictam; ideòque per ax. 28. lib. eiusdem 1. elem. incurrendo in punctum I, curuæ lineæ paraboles vel hyperboles. Si secundum, vti videre est in recta FEG à sinistris rectæ FDK; quandoquidem curua linea paraboles vel hyperboles produci in infinitum potest ad partes oppositas vertici, per prop. 8. ipsa recta GD producta in infinitum ad partes istas sinistras, & incurrens in punctum G rectæ FEG extra sectiones datas, infringet obuiam lineam curuam paraboles vel hyperboles, in puncto H. Atque ita probauerimus rectam lineam ductam parallelam contingenti rectæ sectiones conicas, ex puncto aliquo dato intra illas, productam in infinitum vtrimque, ex vtraque parte sectionibus conicis occurrere.

COROLL. NOSTRVM I.

Si recta linea sectionem conicam secet duobus in punctis, & sumatur punctum intra sectionem, & extra lineam prædictam, per quod recta linea æquidistans ipsi secanti agatur: producta etiam ex vtraque parte in infinitum, sectioni eidem conicæ occurret vtrimque. Idem accidet si punctum sumatur in linea curua sectionis, quod non sit extremum datæ secantis, aut vertex diametri ad quam data recta secans sit ordinatim applicata.

Demon-

Demonstratio primæ partis in ellipsi & circulo facilis est; nam cùm sint figuræ terminatæ, recta illa parallela datæ secanti, producta vtrimque in infinitum, secabit per ax. 28. lib. 1. elem. ex vtraque parte lineas curuas ellipseos & circuli spatium finitum concludentes.

Suppositio in parabola vel hyperbola, pro prima parte. Data sit recta HI, secans ex vtraque parte, lineam curuam paraboles vel hyperboles in H, & I: datumque sit punctum L, intra ipsam sectionem, & extra rectam HI, ex quo ducta sit per prop. 3 1. lib. 1. elem. recta linea RLS parallela prædictæ secanti datæ HI. Dico quod si producatur vtrimque in infinitum recta linea RLS, parallela ipsi HI, ipsa RLS, secet ex vtraque parte parabolam vel hyperbolam, ex vna parte in S, & ex alia in R.

Apparatus in parabola & Hyperbola pro prima parte. Quandoquidem datur recta HI, secans duobus in punctis lineam curuam paraboles vel hyperboles, resultabit figura conclusa recta ipsa linea HI, & curuæ lineæ parte versus verticem. Igitur si sumamus aliquod punctum in hac parte lineæ curuæ versus verticem diuersum ab extremis eius H, & I, puta punctum F, poterimus ducere rectam lineam FL, ab hoc puncto assumpto F, & dato L, quod erit vel intra aream figuræ mixtilineæ HFI; vel extra illam, tamen intra locum sectionis conicæ. Si primum, recta linea RSL, parallela ipsi rectæ H ducenda & producenda vtrimque in infinitum intra aream finitam prædictam HFI, infringet in R & S, lineam curuam HFI, quandoquidem non possit occurrere rectæ HI parallelæ. Si secundum, poterimus ducere rectas FH, FI, ab dicto puncto F, quæ per prop. 10. totæ vt sic erunt intra parabolam vel hyperbolam, & productæ vltra H & I, procedent extra ipsas sectiones conicas. Iam verò ducta recta FL, secabit in Q obuiam rectam HI; tum per prop. 12. lib. 6. ele. fiat vt FQ ad QL, sic FH ad HM, & sic FI ad IO; rectæ lineæ ML, OL, erunt parallelæ ipsi HI, totaque recta MLO parallela ipsi HI.

Demonstratio. Quandoquidem puncta M, O, terminantia rectam MLO, sunt extra locum Parabolæ & Hyperbolæ, secabit recta MO obuiam curuam lineam cuiusuis illarum duobus in punctis R, S, quandoquidem ipsa curua linea Paraboles vel Hyperboles potest produci in infinitum ad partes oppositas vertici.

Suppositio pro secunda parte. Data sit recta RS secans sectionem vel circulum in R & S; datumque sit punctum H in linea curua sectionis primo loco supra rectam RS, diuersumque ab vertice diametri ad quam sit recta RS ordinatim applicata. Dico rectam per H ducendam parallelam ipsi RS, secturam duobus in punctis, H, I, sectionem vel circulum.

Apparatus & demonstratio in hoc casu secundæ partis. Ex puncto F aliquo lineæ curuæ RHS inclinetur recta linea FHM secans rectam SR productam vltra R in M puncto extra lineam curuam sectionis vel circuli, & ducatur recta FS, quæ tota erit intra lineam curuam; tùm per prop. 12. lib. 6. elem. fiat vt FM ad FH, sic FS ad FP, erit punctum P intra sectionem vel circulum: Sed & recta ducenda HP erit per 2. prop. lib. 6. elem. parallela secanti RS; quæ HP si producatur vltra P in infinitum, secabit in I lineam curuam sectionis vel circuli, eò quòd finitum sit spatium conclusum arcu FIS, & recta FS.

Alia suppositio pro secunda parte in alio casu secundo. Data sit recta HI secans duobus in punctis H, I, lineam curuam sectionis: & datum sit punctum S in linea curua infra ipsam datam HI, secantem. Dico rectam lineam RS ducendam ex puncto S, parallelam secanti HI, secturam in alio puncto R lineam curuam sectionis aut circuli.

Apparatus & demonstratio in hoc casu secundo secundæ partis. Ducatur recta FS ex aliquo puncto F lineæ curuæ sectionum electo supra datam secantem IH, hæc recta FS erit per prop. 10. tota intra sectionem; sed & necessario secabit obuiam rectam HI, in puncto aliquo P ex intermedijs. Ducatur etiam alia recta FH ex eodem electo puncto F per extremum H datæ secantis; quæ etiam recta FH tota erit intra sectionem, & producta vltra H, procedet extra sectionem per prop. 10. ergo si fiat per prop. 12. lib. 6. elem. vt FP ad PS, sic FH ad HM, punctum M erit extra sectionem. Sed & recta linea MRS ducenda, erit per 2. prop. lib. 6. elem. parallela rectæ secanti datæ HI; quæ cùm obuiam lineam curuam secet in R, & in S alio puncto eius terminetur, tota recta RS parallela ipsi HI posita, secabit ipsam sectionem duobus in punctis, quandoquidem ipsæ lineæ curuæ Parabolæ & Hyperbolæ extendi in infinitum possunt.

Demonstratio allata in casu secundo secundæ partis concludit in Parabola & Hyperbola, non autem vniuersaliter in ellipsi & circulo. quara

Sit apparatus alius in ellipsi & circulo in hoc eodem secundo casu. Data recta HI secante circumferentiam ellipseos vel circuli in duobus punctis H, I, & dato puncto R infra rectam dictam HI, quod iuxta datum non sit vertex diametri ad quam sit ordinatim applicata recta HI. Assumatur punctum T verticis prædicti infra rectam HI, in linea curua circuli vel ellipseos, in arcu HRI, per quod iuxta prop. 3 1. lib. 1. elem. acta sit recta linea parallela ipsi rectæ HI; hæc posita recta parallela per punctum T, vel erit tangens circumferentiam in vnico solùm puncto T, vel secans.

Demon-

Demonstratio. Si primum, recta linea RS ducenda parallela ipsi rectæ positæ parallelæ ipsi HI, & supposita tangens in vnico puncto T circumferentiæ; erit etiam parallela ipsi HI per 30. prop. lib. 1. elem. Cumque punctum R datum, sit in arcu HRT inter punctum H, & T, recta linea RS ducta & ostensa parallela ipsi HI, cùm debeat excurrere inter HI rectam & aliam ei parallelam per T ductam, & suppositam taggere circumferentiam in vnico T puncto, producta ad partes I, necessariò intersecabit circumferentiam in alio S puncto, inter I & T. Si secundum; recta per S posita parallela ipsi per T, erit etiam parallela alteri HI: quare producta versus I, cùm debeat excurrere inter duas parallelas rectas, primam HI, alteram per T; etiam secantem in alio puncto circumferentiam; necessariò intersecabit etiam in alio puncto S dictam circumferentiam, sito inter puncta I & T.

COROLL. NOSTRVM II.

Si recta linea diametrum Parabolæ, ellipseos, & circuli secet intra sectionem ipsam conicam: producta in vtramque partem in infinitum conueniet cum sectione propria ex vtraque parte.

HOc manifestum est in ellipsi & circulo per ax. 28. lib. 1. elem. infringet enim huiusmodi recta secans diametrum, terminos dictarum figurarum, ex vtraque parte producta in infinitum.

Suppositio in parabola. Diametrum AB paraboles secet recta linea EF, vel GH, in puncto C. Dico productas istas rectas ECF, GCH, vtrimque in infinitum, secturas lineam curuam paraboles vtrimque.

Apparatus. Ex puncto A verticis paraboles & diametri AB datæ, per prop. 31. lib. 1. elem. agatur recta linea AD, vel AI, parallela ipsi ECF, vel GCH: hæc recta AD, vel AI, vel erit solùm contingens in vno puncto A ipsam parabolam, vt est AD parallela ipsi ECF; vel ipsam secabit in duobus punctis A, I, vt recta AI parallela ipsi rectæ GCH.

Demonstratio. Si recta AD parallela ipsi ECF, contingat in vno tantùm A puncto parabolam datam; tunc per hanc prop. 18. recta ECF producta vtrimque conueniet cum parabola duobus in punctis. Quod si recta AI parallela rectæ GCH, secuerit parabolam in A & I duobus in punctis; recta linea GCH, per corollarium nostrum præcedens, producta vtrimque, etiam occurret duobus in punctis lineæ curuæ paraboles, quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM III.

Si recta linea sectionem coni contingat in vnico tantum puncto, productaque vtrimque extra ipsam sectionem cadat: sumatur verò aliud punctum in linea curua ipsius sectionis; recta linea parallela dictæ contingenti producta occurret alteri puncto sectionis: verùm in ellipsi & circulo, punctum assumptum in linea curua non debet esse extremum diametri aliud ductæ ab puncto contactus dati.

SVppositio. Si recta linea AFB tangens in vnico puncto F quamlibet coni sectionem, vel circulum, & progrediens producta vtrimque extra sectionem vel circulum: datumque sit punctum H in linea curua sectionis diuersum ab puncto F contactus dato, quod in ellipsi & circulo non sit aliud M extremum diametri transeuntis ab puncto F dato contactus per centrum N, ac terminatæ in circumferentia ellipseos & circuli in puncto M. Dico rectam lineam ducendam ex puncto H dato, parallelam ipsi AFB tangenti, occursuram alteri puncto I, sectioni cuilibet datæ coni, & circulo.

Apparatus. Ducatur recta FH, hæc per propos. 10. tota existet intra sectionem coni. Tùm ex puncto aliquo tangentis datæ AIB, quod sit ad partes contrarias puncti dati H, respectu rectæ FH, ponatur recta linea versus sectionem parallela ipsi FH per prop. 31. lib. 1. elem. fiatque per propos. 3. lib. eiusdem æqualis ipsi FH; hæc recta vel secabit lineam curuam sectionis vel circuli in puncto C, & eius extremum erit E intra sectionem ipsam vel circulum, qualis est recta BCE; vel eius extremum I erit in linea curua sectionis, eam priùs non intersecando, vti est recta KI; vel erit tota extra sectionem vel circulum, sicuti est recta LG. Si primum, Recta HE ducta cùm sit parallela ipsi tangenti AFB, per prop. 33. lib. 1. elem. & punctum E sit intra sectionem, occurret per prop. præsentem 18. duobus in punctis H, I, ipsi sectioni vel circulo, producta vltra E. Si secundum, manifestum est etiam esse parallelam rectam HI, ipsi tangenti AFB, per cit. prop. 33. & occurrere vtrimque sectioni vel circulo. Si 3. quandoquidem punctum G est extra sectionis locum vel circuli, tùm etiam extra lineam curuam; recta HG ducenda, & parallela tangenti AFB, per cit. prop. 33. egredietur extra locum sectionum, ellipseos vel circuli, per ax. 28. lib. 1. elem. secando circumferentiam in alio puncto I; tùm etiam lineas curuas Paraboles vel Hyperboles, quæ in infinitum extendi possunt ad partes contrarias vertici F, per prop. 8. & sic manifestum erit corollarium; adhibendo etiam quæ diximus ad casum secundum secundæ partis coroll. nostri 1. ad hanc prop 18.

PROPO-

PROPOSITIO XIX.

In omni ſectione coni, recta linea quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans: cum ſectione conueniet.

QVandoquidem per defin. 10. ac 12. inter primas, rectæ lineæ ordinatim applicatæ intra lineas curuas, quæ ſunt lineæ curuæ ſectionum conicarum, ſecantur bifariàm à diametro ad quam applicantur, & vtrimque terminantur in lineis curuis, ſecabunt ipſam diametrum in punctis intra ipſas ſectiones. Quia verò datur recta linea æquidiſtans vni iſtarum ordinatim applicatarum, ſecabitur etiam ab diametro iſta exiſtente intra ſectionem conicam in puncto etiam ſito intra ipſam ſectionem, per prop. 11. Procli. ergo etiam per coroll. noſt. 1. ad prop. præced. 18. producta vtrimque occurret duobus in punctis ſectioni cuicumque coni, intra quam, & alia ordinatim applicata exiſtit. Atque ita probauerimus propoſitum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Hæc propoſitio 19. etiam conuenit circulo.

PROPOSITIO XX.

Si in parabola duæ rectæ lineæ, à ſectione ad diametrum ordinatim applicentur: vt eorum quadrata inter ſeſe; ita erunt & lineæ quæ ab ipſis ex diametro ad verticem abſcinduntur.

SVppoſitio. Parabolæ ſit diameter AB, & in linea curua parabolæ data duo puncta C, D, ex quibus ad diametrum AB, ordinatim ſint applicatæ duæ rectæ lineæ CE, DF. Aſſero eſſe vt quadratum rectæ CE ad quadratum rectæ DF; ita rectam AE ad rectam AF: hoc eſt lineas abſciſſas in diametro AB inter verticem A, & ipſas rectas CE, DF, ita ſe habere, vt quadrata CE, DF, rectarum ordinatim applicatarum ad ipſam diametrum AB datam.

Demonſtratio. Concipiatur rectum latus AG diametri AB in parabola inuentum per coroll. noſt. 1. ad propoſ. 11. vel iuxta defin. 26. inter ſecundas erit per ipſam prop. 11. quadratum rectæ CE æquale rectangulo ſub AE, AG; tùm etiam quadratum rectæ DF æquale rectangulo ſub FA, AG: quare in ratione æqualitatis erit quadratum rectæ CE ad rectangulum ſub EA, AG, ſicut quadratum rectæ DF ad rectangulum ſub FA, AG; ergo iuxta prop. 16. lib. 5. elem. viciſſim erit vt quadratum rectæ CE ad quadratum rectæ DF, ſic rectangulum ſub EA, AG, ad rectangulum ſub FA, AG. Quod ſi aſſumamus pro communi altitudine dictorum rectangulorum, rectam AG, erit per 1. prop. lib. 6. elem. vt EA ad FA, ſic rectangulum ſub EA; AG, ad rectangulum ſub FA, AG. Igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ CE ad quadratum rectæ DF, ſic recta EA ad rectam FA. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si rectæ lineæ CE, DF, ordinatim applicatæ ad diametrum AB ipſius Paraboles, productæ vltra E & F, vſque ad H, I puncta alia lineæ curuæ paraboles: erit etiam EA ad FA, ſicut quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ DI.

CVm ſint datæ rectæ lineæ CE, DF, ordinatim applicatæ ad diametrum AB ipſius Paraboles, erunt per defin. 12. ac 10. inter primas biſariàm ſectæ in E & F, totæ CH, DI: quare per coroll. noſt. ad prop. 20. lib. 6. elem. quadratum rectæ CH erit quadruplum rectæ CE, ſimiliterque quadratum rectæ DI quadruplum quadrati rectæ DF: eſt autem per prop. 15. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ CE ad quadratum rectæ DF, ſic quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ DI; eſt verò per hanc propoſitionem vt quadratum rectæ CE ad quadratum rectæ DF, ſic recta EA ad rectam FA: ergo per prop. 11. lib. 5. elemen. erit vt quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ DI, ſicut recta EA ad rectam FA. quod erat concludendum.

PROPOSITIO XXI.

Si in Hyperbola, vel Ellipſi, vel circuli circumferentia; rectæ lineæ ordinatim applicentur ad diametrum: erunt quadrata earum ad ſpatia contenta lineis, quæ inter ipſas & vertices tranſuerſi lateris figuræ interijciuntur; vt figuræ rectum latus ad tranſuerſum: inter ſe ſe verò, vt ſpatia quæ interiectis, vt diximus, lineis continentur.

SVppoſitio. In hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, cuius diameter tranſ-

transuersa, vel transuersum latus AB, habens vertices proprios A, B, & rectum latus AC, constitutum ex natura sua perpendiculariter transuerso AB in A communi puncto verticis, iuxta def. 19. inter secundas: sint applicatæ ordinatim rectæ lineæ DE, FG, & sic de reliquis, ad diametrum transuersam AB. Dico 1. esse quadratum rectæ DE ad rectangulum sub EA, EB, sicut est rectum CA latus ad transuersum AB; tùm esse quadratum rectæ FG ad rectangulum sub GA, GB, sicut est CA rectum latus ad transuersum AB, & sic de reliquis huiusmodi quadratis ad huiusmodi rectangula. Tùm dico 2. esse quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ FG, vt rectangulum sub EA, EB, ad rectangulum sub GA, GB.

Apparatus. Transmittatur recta BC claudens triangulum rectangulum BAC, producenda solùm in hyperbola vltra C in infinitum. Tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex punctis E & G, transuersi lateris AB, ad quæ applicatæ sunt rectæ lineæ ordinatim DE, FG, agantur rectæ lineæ EH, GK, parallelæ ipsi recto lateri AC; quæ per prop. 11. Procli secabuntur in hyperbola ab recta BC producta vltra C; & in alijs etiam sectionibus non producta; & quidem prima in H, altera in K. quæque etiam erunt per prop. 30 lib. 1. parallelæ inuicem.

Demonstratio in hyperbola. Per considerationem 39. ad def. secundas, quadratum rectæ DE, erit æquale rectangulo sub HB, EA: & per lemma 50. erit vt HE ad EB, sic CA ad AB; sumpta verò communi altitudine EA, sumptisque basibus HE, EB; erit per prop. 1. lib. 6. elem. vt HE ad EB, sic rectangulum sub HE, EA, ad rectãgulum sub EB, EA: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt CA ad AB, vel vt HE ad EB, sic rectangulum sub HE, EA, ad rectangulum sub EB, EA; sed quadratum rectæ DE ostensum est æquale rectangulo sub HE, EA; ergo per prop. 7. lib. 5. elem. quadratum rectæ DE eandem babebit rationem ad rectangulum sub EB, EA, quam habet rectangulum sub HE, EA: hoc verò rectangulum sub HE, EA, probatum est habere rationem ad rectangulum sub EB, EA, quam habet rectum latus CA ad AB transuersum, vel quam habet HE ad EB; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. quadratum rectæ DE, ad rectangulum sub EA, EB, erit vt CA rectum latus ad AB, transuersum. Simili modo quia per considerationem 39. ad def. secundas quadratum rectæ FG æquale est rectangulo sub KG, GA; & per lem. 50. est vt KG ad GB, sic CA ad AB: si sumamus rectam GA pro communi altitudine, & bases KG, GB; erit per prop. 1. lib. 6. elem. vt KG ad GB, sic rectangulum sub KG, GA, ad rectangulum sub BG, GA: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt CA ad AB, vel KG ad GB, sic rectangulum sub KG, GA, ad rectangulum sub BG, GA; sed quadratum rectæ FG probatum est æquale rectangulo sub KG, GA: ergo per prop. 7. lib. 5. ele. quadratum rectæ FG habebit eandem rationem ad rectangulum sub BG, GA, quam obtinet rectangulum sub KG, GA; hoc verò rectangulum sub KG, GA, ostensum est habere rationem ad rectangulum sub BG, GA, quam habet CA ad AB: ergo per prop. 11. lib. 5. ele. quadratum rectæ FG ad rectangulum sub GA, GB, erit vt AC rectum latus ad AB transuersum. Ostendimus ergo primum quod fuit in prop. assertum. Cùm autem demonstrauerimus esse quadratum rectæ DE ad rectangulum sub EA, EB, sicut CA rectum latus ad AB transuersum; & esse quadratum rectæ FG ad rectangulum sub GA, GB, sicut CA rectum latus ad AB transuersum: erit per pro. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ DE ad rectangulum sub EA, EB, sic quadratum rectæ FG ad rectangulum sub GA, GB: igitur per prop. 16. lib. 5. ele. vicissim erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ FG, sic rectangulum sub EA, EB, ad rectangulum sub GA, GB, quomodo fuit secundo loco propositũ. Atque hæc erant demõstranda in hyperbola.

Demonstratio in ellipsi, eadem planè est quę allata pro hyperbola. Sed etiam eadem inseruit pro circulo. Igitur demonstrata erit tota prop.

COROLL. NOSTRVM I.

In ellipsi Rectum latus est inæquale transuerso proprio quod sit axis ellipseos.

Esto enim si fieri possit rectum AC latus in ellipsi, æquale lateri proprio AB transuerso. Cùm sit per hanc propositionem quadratum rectæ DE ordinatim applicatæ ad transuersum latus AB, ad rectangulum sub EA, EB, partibus transuersi factis ab DE recta, sicut est latus CA rectum ad AB transuersum; sitque ex positione aduersarij ratio æqualitatis inter CA rectum latus ad transuersum AB; erit etiam æquale quadratum rectæ DE, rectãgulo sub EA, EB: simili modo erit quadratum rectæ FG, ad rectangulum sub GA, GB, sicut CA ad AB; CA ponitur æqualis ipsi AB, ergo etiam quadratum rectæ FG, erit æquale rectangulo sub GA, GB. Simili artificio demonstrabuntur quadrata omnium rectarum linearum ordinatim applicatarum ad transuersum latus AB ellipseos, esse æqualia rectangulis factis proprijs sub segmentis rectæ lineæ AB seu transuersi lateris, ab ipsis rectis lineis ordinatim applicatis ad illam AB rectam, vel transuersum latus: sed & prædictæ omnes rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad axem AB, sunt ex dictis in definitione 12. inter primas, semisses rectarum totarum sectarum bifariàm ab ipso axe seu diametro ellipseos; ergo per def. 18. inter primas, erũt sectę ad angulos rectos ab axe. Cùm igitur quadrata rectarum DE, FG, & sic de reliquis decidẽtibus ab linea curua ellipseos ad rectam AB, sint ostensa æqualia rectangulis proprijs rectæ lineæ AB, quæ est data axis ellipseos; erit

per lemma 5. ipsa linea curua ellipsis datæ, circularis. quæ duæ specie differunt, per defin. proprias 23. & 25. inter secundas. hoc absurdum indicat falsam esse positionem contradicentem assertioni huius corollarij nostri; quæ ideò probata relinquetur.

COROLL. NOSTRVM II.

In Hyperbola vel sectionibus oppositis Rectum latus est inæquale, impropriè licet, transuerso lateri proprio quod sit axis Hyperboles, vel sectionum oppositarum; quatenus ipsum latus transuersum penetrat intra locum Hyperboles vnius, vel oppositarum sectionum. Quod si sumatur transuersum hoc latus, prout est extra locum Hyperboles, vel loca oppositarum sectionum; potest esse æquale vel inæquale lateri eius recto.

NAm ex dictis in consideratione 23. ad definitiones secundas, hoc transuersum latus potest produci in infinitum intra locum vnius Hyperboles, vel intra loca oppositarum sectionum: rectum verò latus huius transuersi lateris est determinatum ex dictis in defin. 27. inter secundas: interminatum autem ex vna parte vel ex vtraque, & terminatum sunt inæqualia: ergo prima pars huius corollarij manifesta erit. Altera verò patet ex dictis in consideratione 42. in qua siue sumantur æqualia vel inæqualia illa latera, Hyperbola describetur in plano, vel duæ oppositæ sectiones in consideratione 44.

COROLL. NOSTRVM III.

In Parabola rectum latus est inæquale transuerso lateri proprio quod sit axis ipsius Parabolæ.

CVm omnis axis linearum curuarum inter quas est Parabola lineæ per def. 21. inter secundas, sit diameter parabolæ per defin. 18. inter primas; & ex dictis in consideratione 21. ad definitiones secundas diameter seu axis parabolæ produci in infinitum possit versus partes oppositas vertici, & nunquam in alio puncto occurrat lineæ curuæ paraboles diuerso ab vertice eius, erit infinita ex illa parte opposita vertici, seu interminata. Latus autem rectum in parabola est linea determinata vtrimque, cùm sit per definitionem 26. inter secundas, tertia proportionalis, datis duabus terminatis vtrimque rectis. Igitur cum terminata vtrimque recta linea, sit inæqualis interminatæ ex vna parte rectæ lineæ; erit latus rectum in parabola inæquale lateri suo transuerso proprio seu diametro propriæ, quod sit axis ipsius parabolæ. Quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM IV.

In Hyperbola, Ellipsi, & circulo, si sit transuersum latus ad rectam lineam, sicut rectangulum sub portionibus transuersi dicti lateris producti intra locum sectionis, inter vertices transuersi lateris prædicti, & rectam lineam ipsi transuerso lateri producto ordinatim applicatam, ad quadratum dictæ rectæ ordinatim applicatæ: Ipsa prædicta linea superior erit rectum latus in sectione, respectu transuersi eius lateris dati.

ERit per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. recta linea prædicta ad transuersum latus, sicut quadratum rectæ ordinatim applicatæ ad prædictum rectangulum; est autem per hanc propos. 21. rectum latus ad transuersum sicut quadratum rectæ datæ lineæ ordinatim applicatæ ad prædictum rectangulum: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit recta prædicta linea ad latus transuersum, sicut rectum latus ad transuersum: ergo per prop. 9. lib. 5. elem. æquales erunt rectæ lineæ, data, & rectum latus. ergo recta data erit rectum latus.

PROPOSITIO XXII.

Si Parabolen vel Hyperbolen recta linea in duobus punctis secet, non conueniens cum diametro sectionis intra sectionem: producta, cum diametro extra sectionem conueniet.

SVppositio. Recta linea CD, secet duobus in punctis C, D, lineam curuam Paraboles vel Hyperboles, non conueniens intra ipsas sectiones datas, cum diametro AB, quæ in hyperbola est ipsummet eius latus transuersum FA productum infra verticem A, intra ipsam hyperbolam, vti docuimus in prop. 12. Dico rectam lineam CD productam vtrimque, conuenire quidem cum diametro AB producta vltra verticem, solùm in puncto G supra verticem, extra sectionem.

Apparatus. Ex punctis C, D, sectionum datarum, concipiantur applicatæ rectæ lineæ CE, DB ordinatim ad AB diametrum, quæ per definit. 12. inter primas erunt inuicem parallelæ.

Demonstratio in Parabola. Per prop. 20. est quadratum rectæ CE, ad quadratum rectæ DB, vt recta EA ad rectam BA; maior autem est recta EA quàm BA; ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. quadratum rectæ CE maius erit quadrato rectæ DB; quare per prop. 16. Procli recta CE maior erit quàm recta DB: sunt autem per apparatus-

paratum rectæ CE, DB, parallelæ; ergo per coroll. noſt. 4. ad prop. 17. lib. 12. elem. recta linea CD, concurret in G cum linea recta ABE, ad partes minoris rectæ DB, ſi ambæ producantur CD, EBA, vltra minorem DB: ſed per prop. 10. recta CD producta vltra D, ſemper procedit extra ſectionem conicam quamcumque, igitur punctum G concurſus cum diametro AB producta vltra verticem A, erit extra ipſam parabolam, ſupra ipſum verticem A. Porrò ipſa CD iam oſtenſa concurrere cum diametro AB in G, ſupra verticem A, concurrere nequit cum diametro AB in alio puncto ab G, infra aut ſupra verticem A, alioqui duæ rectæ lineæ ſuperficiem comprehenderent, contra 14. axioma lib. 1. element. Probauerimus igitur propoſitum in Parabola.

Demonſtratio in Hyperbola. Per prop. 21. Eſt quadratum rectæ CE, ad quadratum rectæ DB, ſicut rectangulum ſub EA, EF, ad rectangulum ſub BA, BF; rectangulum autem ſub EA, EF, maius eſt per lemma 49. quàm rectangulum ſub BA, BF; ergo per coroll. noſt. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. quadratum rectæ CE maius erit quàm quadratum rectæ DB; ideòque per prop. 16. Procli, recta CE maior erit quàm recta DB: probatæ autem ſunt parallelæ rectæ CE, DB, quas vniunt rectæ EBA, CD; ergo per coroll. noſt. 4. ad prop. 17. lib. 12. elem. productæ iſtæ duæ rectæ, concurrent ſolùm ad partes BD minoris rectæ parallelæ, in puncto G, quod nequit eſſe intra ſectionem hyperboles, nam producta recta CD, vltra D, verſus A verticem, procedit per prop. 10. extra ipſam hyperbolam; ergo concurrent iſtæ duæ rectæ CD, & AB ſupra verticem tantum; nam ſi intra concurrerent etiam extra ſectionem ipſam, duæ rectæ lineæ ſpatium clauderent contra 14. axioma lib. 1. element. igitur etiam intentum demonſtrauerimus in ſectione hyperbolica.

COROLL. NOSTRVM I.

In Parabola & Hyperbola, rectarum linearum ordinatim applicatarum ad eius diametrum; vicinior vertici erit minor quàm remotior ab eodem vertice.

Hoc probauimus in recta DB viciniore vertici A, minore quàm C E remotior ab eodem vertice A, diametri AB, ad quam ſunt ordinatim applicatæ illæ rectæ lineæ DB, CE: & ſic de alijs omnibus huiuſmodi rectis.

COROLL. NOSTRVM II.

In Parabola & Hyperbola diametri qualibet propria producta in infinitum ad partes oppoſitas vertici-bus; numquam conuenient cum lineis proprijs curuis dictarum ſectionum.

Demonſtratio alia ab tradita in conſideratione 23. ad ſecundas definitiones, dependens ab hac propoſitione. Eſto ſi fieri poſſit concurrat diameter parabolæ vel hyperbolæ duobus in punctis, vno verticis, altero verò ad partes ipſi vertici oppoſitas: hæc recta per prop. 10. vt ſic tota erit intra ſectionem, & vltra hæc puncta ſi producatur, ſemper procedet extra ſectionem. Iam verò in ſpatio concluſo hac diametro, & linea curua ſectionis, aſſumatur aliquod punctum, per quod agatur recta linea parallela iſti diametro, hæc recta per coroll. noſt. 1. ad prop. 17. ex vtraque parte ſectioni occurret ſi producatur vtrimque, & non occurret diametro prædictæ neque intra ſectionem neque extra ſectionem ex natura rectarum parallelarum. hoc verò eſt contra hanc prop. 22. in quantum producta iſta recta vltra ſectionem non occurrit diametro extra ſectionem. hoc abſurdum indicat poſitionem contradicentem huic corollario, eſſe falſam, & corollarium verum erit.

COROLL. NOSTRVM III.

In Parabola & Hyperbola, productis earum lineis curuis in infinitum verſus partes oppoſitas vertici; partes earum remotiores ab vertice & remotiores in infinitum; diſtabunt infinito ſyncathegorematicè interuallo ab quacumque propria diametro; & diuaricabuntur ab inuicem lineæ curuæ ipſarum infinito ſyncathegorematicè interuallo.

Aſſumptis eiſdem figuris, concipiantur infinitæ rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro AE propriæ, quæ per corollar. præcedens 2. productæ in infinitum ad partes contrarias vertici A, nunquam occurrent lineis curuis Paraboles vel Hyperboles: Nos exempli gratiâ duas aſſumimus BD, EC; quæ vel erunt ordinatim applicatæ ad angulos rectos diametro AE; vel ad angulos obliquos, hoc eſt erunt inclinatæ ad diametrum AE: in quocumque caſu, erunt parallelæ inter ſe per defin. 12. inter primas; & ſimiliter inclinatæ ob angulos æquales per prop. 29. lib. 1. elem. Iam verò in primo caſu, quandoquidem per coroll. noſt. 1. ad hanc prop. 22. remotior EC maior eſt quàm vicinior BD, vertici A, erit C punctum magis remotum ab diametro AE, quàm punctum D: In ſecundo verò caſu erit idem punctum C lineæ curuæ Paraboles vel Hyperboles & extremum maioris rectæ EC, remotius ab diametro AE, quàm punctum D extremum minoris rectæ BD, quod etiam eſt in linea curua Paraboles vel Hyperboles, idque per lemma noſtrũ 33. lib. 2. quod nulla ratione dependet ab intermedijs propoſitionibus & corollarijs & lemmatibus. Cumque duci poſ-

sint vel concipi infinitæ aliæ huiusmodi rectæ lineæ ordinatim applicatæ in infinitum remotiores & remotiores, semper demonstratio allata probabit intentum primum, videlicet quod partes remotiores in infinitū ab vertice harum linearum curuarū terminatæ prædictis punctis, infinito distent interuallo syncathegorematicè ab diametro AE, ex vtraque parte. Quare cùm ab intermedia diametro distent in infinitum istæ lineæ curuæ ex vtraque parte, infinities etiam diuaricabuntur ab inuicem productæ in infinitum versus partes contrarias vertici. quod erat vltimum intentum.

PROPOSITIO XXIII.

Si ellipsim recta linea secet inter duas diametros coniugatas: producta, cum vtraque earum extra sectionem conueniet.

Svppositio. Ellipseos circumferentiam recta linea EF secet duobus in punctis E,F, quæ sint inter duas coniugatas diametros ellipseos AB, CD. Dico hanc rectam EF productam in infinitum, concursuram extra sectionem cum dictis duabus diametris coniugatis, in I quidem cum diametro AB, & in O cum diametro CD.

Apparatus. Ex puncto E, concipiatur recta linea EG ducta parallela diametro alteri CD, per prop. 31. lib. 1. elem. hæc erit per def. 17. inter primas bifariàm diuisa ab diametro AB, in G puncto, si concipiatur producta vsque ad aliud punctum sectionis, quam secabit duobus in punctis per coroll. nost. 1. ad prop. 17. eritque per defin. 12. inter primas ordinatim applicata diametro AB. Simili modo ex eodem puncto E ponatur alia recta linea recta EK parallela diametro AB, quæ extensa in alio puncto sectionem secabit, & secabitur bifariàm in K ab diametro CD coniugata ipsi AB, & erit ordinatim applicata diametro CD, per eadem principia citata. Quod si ex alio puncto F ducantur aliæ duæ rectæ lineæ FH,FL, vti duximus alias duas EG,EK, erunt ex eisdem principijs citatis, ordinatim applicatæ ad suas proprias diametros, FG quidem ad diametrum AB, FL verò ad diametrum CD. Quia verò seorsim sumptæ rectæ FH, EG, sunt parallelæ positæ ipsi diametro CD, erunt tres illæ rectæ FH,EG,CD, parallelæ inuicem per prop. 30. lib. 1. elem. Etiam quia rectæ EK, FL, sunt parallelæ positæ diametro AB, erunt per propos. cit. 30. lib. 1. elem. parallelæ inuicem.

Demonstratio. Recta EF data secare duobus in punctis ellipseos circumferentiam quæ est sectio conica, tota vt sic intra sectionem erit, & si producatur vtrimque in infinitum, semper extra ipsam ellipsim procedet, per propos. 10. secat autem parallelas EK, FL, ipsi AB diametro; ergo etiam secabit per prop. 11. Procli diametrum AB productam vltra A in I, extra sectionem seu vltra ellipsim, non autem ad partes B: Cùm enim sit parallelogrammum FHML, resultans ex apparatu, duo anguli LFH, & H, erunt æquales duobus rectis per prop. 29. lib. 1. elem. his duobus angulis si addatur angulus EFL, erunt tres anguli EFL, LFH, & H, maiores duobus rectis, vel duo anguli EFH, & H, æquales illis tribus, erunt maiores duobus rectis per 1. ax. lib. 1. element. complementa igitur illorum duorum angulorum maiorum duobus rectis ad quatuor rectos quos efficit per prop. 13. lib. 1. element. FH, incidens in EF productam vltra F, & in rectam AB; erunt minores duobus rectis, videlicet duo anguli IFH, IHF, supra rectam FH: ergo per ax. 13. lib. 1. elem. concurrent solùm duæ rectæ EF, AB, productæ, ad partes supra rectam FH, in I, hoc est versus A, & non ad partes B, & quidem extra sectionem, quandoquidem ostensa est recta EF producta vltra F semper excurrere extra sectionem. Eodem discursu facto probabimus eandem rectam FE productam vltra sectionem incidentem in parallelas FH, CD, concurrere debere extra sectionem ellipseos cum altera diametro CD, producta vltra C, solùm ad partes C, in puncto O. Atque ita probatum erit propositum.

Alia demonstratio. Cùm duæ rectæ FH, EG, ordinatim applicatæ ad diametrum AB, sint supra centrum M ellipseos, in quo se mutuò secant duæ diametri datæ coniugatæ AB, CD, iuxta def. 4. inter secundas: Cumque etiam duæ aliæ rectæ lineæ EK, FL, ordinatim applicatæ ad diametrum CD, sint supra centrum M ellipseos, in quo se mutuò intersecant datæ duæ diametri prædictæ coniugatæ; primæ duæ FH, EG, parallelæ ipsi diametro CD, ex apparatu; aliæ verò duæ EK, FL, parallelæ diametro alteri AB: recta FH erit vicinior vertici A, quàm EG recta; tùm etiam recta EK erit vicinior vertici C, quàm alia recta FL. Iam verò cùm per prop. 21. sit quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ FH, sicut rectangulum sub GA, GB, ad rectangulum sub HA, HB; tùm etiam sit quadratum rectæ FL ad quadratum rectæ EK, sicut rectangulum sub LC, LD, ad rectangulum sub KC, KD; sit verò per coroll. nost. ad lem. præpositum prop. 43. lib. 10. elem. rectangulum sub GA, GB, maius quàm rectangulum sub HA, HB; & rectangulum sub LC, LD, sit maius rectangulo sub KC, KD, per idem cit. lem. erit per a. nost. coroll. ad prop. 14. lib. 5. elem. quadratum rectæ EG maius quadrato rectæ FH; & quadratum rectæ FL maius quadrato rectæ EK: igitur per prop. 16. Procli recta EG maior erit quàm recta FH;

FH; tùm etiam recta FL maior erit quàm recta EK: ergo cùm sint parallelæ EG, FH, easque vniant rectæ EF, BA, concurrent per coroll. nost. 4. ad prop. 17. lib. 1. elem. in I, productæ rectæ EF, BA, vltra minorem FH; sed per propos. 10. non potest recta EF producta vltra F, intra sectionem existere, ergo concurrent prædictæ duæ extra sectionem, in I; atque ita recta EF, conueniet cum diametro AB vltra A, extra sectionem. Simili discursu facto, cùm sint duæ rectæ FL, EK, parallelæ, minorque EK, quàm FL, hasque vniant rectæ DC, FE, concurrent in O, istæ DC, FE, productæ vltra minorem EK; verùm per propos. cit. 10. recta FE producta vltra minorem EK, procedit extra ellipsim; igitur concurret cum DC producta diametro, vltra C, in puncto O extra sectionem. Atque ita demonstrauerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM I.

Si circulum recta linea secet inter duas coniugatas diametros: producta cum vtraque earum extra sectionem conueniet.

Eadem suppositio, & idem apparatus fiat; & ambæ demonstrationes applicentur assertioni huius corollarij: concludent enim propositum.

COROLL. NOSTRVM II.

In ellipsi & circuli circumferentia: rectarum ordinatim applicatarum ad diametrum, versus vnum verticem, & ad easdem partes centri; vicinior vertici prædicto, erit minor, quàm remotior ab eodem vertice.

Hoc enim secunda demonstratione probauimus in recta FH viciniore vertici A diametri AB, quod sit minor quàm EG remotior ab eodem vertice A; cùm sint ostensæ ordinatim applicatæ eidem diametro AB, ad easdem partes centri M.

PROPOSITIO XXIV.

Si Parabolæ vel Hyperbolæ recta linea in vno puncto occurrens, & producta ex vtraque parte extra sectionem cadat: cum diametro conueniet extra sectionem.

Suppositio. Parabolæ vel Hyperbolæ, cuius diameter AB, recta linea CDE occurrens in vno solùm puncto D, extra sectionem cadat producta ex vtraque parte. Dico ipsam rectam CDE productam conuenire in E cum diametro AB, extra sectionem conicam.

Apparatus. In ipsa Parabolæ vel Hyperbolæ linea curua sumatur quodlibet punctum F diuersum ab D, ad easdem partes diametri AB, in quibus est punctum D, & infra ipsum D. Ducaturque recta FD, quæ producta vtrimque cadet per 10. prop. extra sectionem, sed FD vt sic erat tota intra sectionem: producta ergo ipsa FD, vltra D, conueniet per prop. 22. in puncto G vltra A verticem diametri, cum ipsa diametro AB producta vltra B extra sectionem: resultabitque triangulum GAD mixtilineum.

Demonstratio. Quandoquidem duæ rectæ lineæ FD, CD, quarum prima intra sectionem est, & altera extra ipsam existit, inclinantur ad inuicem, productæ ambæ vltra D punctum inclinationis se mutuò intersecabunt, & linea CD abibit in diuersas partes alterius FD, per 11. ax. lib. 1. element. quare recta CD producta vltra D, ingredietur intra trianguli mixti-linei GAD aream; productaque in infinitum infringet in E per ax. 28. lib. 1. element. rectam AG, hoc est diametrum AB, extra sectionem, quandoquidem per cit. prop. 10. producta vltra D, procedit extra sectionem. atque ita probatum erit propositum.

COROLL. NOSTRVM I.

Recta linea occurrens Parabolæ vel Hyperbolæ, productaque vtrimque extra sectionem procedens: non occurret diametro Parabolæ vel Hyperbolæ extra sectionem, si punctum occursus sit vertex diametri.

Nam si occurreret diametro extra sectionem in altero puncto ab eius vertice qui datur punctum occursus; vel duæ rectæ lineæ spatium clauderent, contra 14. ax. lib. 1. elem. vel segmentum commune obtinerent, contra 10. axioma lib. eiusdem, igitur probatum erit coroll.

COROLL. NOSTRVM II.

Si Parabolen vel Hyperbolen recta linea in duobus punctis secet, quorum vnum sit vertex diametri: producta vltra illum verticem non conueniet in alio puncto cum diametro extra sectionem.

Quandoquidem duo puncta immediata non dantur in quantitate continua; si recta linea data producta vltra verticem diametri conueniret cum diametro data in alio puncto diuerso ab vertice prædicto: vel duæ rectæ figuram comprehenderent, vel segmentum commune obtinerent, contra 10. & 14. axioma lib. 1. element. quare verum erit corollarium.

COROLL. NOSTRVM III.

Punctum occursus seu contingentiæ rectæ lineæ, & curuæ Paraboles vel Hyperboles, non debet esse in hac propositione 24. vertex diametri datæ. Sed neque alterum punctorum è duobus in quibus recta linea Parabolam vel Hyperbolam secat, non debet esse vertex diametri datæ, in prop. 22.

NAm deducerentur absurda prædicta in duobus præcedentibus coroll. proprijs. quod erat aduertendum in propos. 22. & præsente 24.

PROPOSITIO XXV.

Si Ellipsi recta linea occurrens inter duas diametros, & producta ex vtraque parte cadat extra sectionem: cum vtrisque diametris conueniet extra sectionem.

SVppositio. Ellipticæ lineæ curuæ recta linea EF occurrat in vno puncto G sito inter duas diametros AB, CD, productaque in infinitum ex vtraque parte procedat extra sectionem; hoc est eam solùm contingat in puncto G. Dico ipsam rectam EF productam vtrimque concurrere cum datis duabus diametris extra sectionem; & quidem cum AB in I, & cum CD in L.

Apparatus. Ex puncto G, agatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea GH parallela diametro CD, hæc recta GH per 2. partem coroll. nostri 1. ad propos. 18. vtrimque occurret in G & M, lineæ curuæ sectionis, & per prop. 11. Procli secabit in H diametrum AB simili modo altera recta GKO transmissa parallela ipsi AB diametro, ab eodem puncto G, secabitur in K ab altera diametro CD. Porrò neutra harum rectarum linearum GH, GK, congruet cum recta EGF; nam hæc ex datis tota extra ellipsim est, istæ verò intra eius aream existunt sectæ ab datis proprijs diametris.

Demonstratio. Recta EGF tangens ellipsim in G, secat rectas GH, GK in puncto G: ergo per proposit. 11. Procli producta secabit rectas productas AB, CD, illam in I, hanc in L; & quidem extra ellipsim, quia datur recta EGF producta in infinitum, semper procedere extra ipsam ellipsim.

COROLL. NOSTRVM I.

Hæc proprietas etiam conuenit circulo.

DEmonstratio eadem est, quæ in ellipsi; & idem apparatus.

COROLL. NOSTRVM II.

In ellipsi & circulo recta linea contingens in vno tantum puncto ipsam sectionem, & eam non secans producta vtrimque, cum diametro sectionis conueniet extra sectionem; si diameter non transeat per dictum punctum contactus, vel non sit parallela datæ tangenti.

ASsumendo enim aliam diametrum diuersam ab data, ita vt punctum contactus dati sit inter istas duas diametros, & neutra istarum diametrorum sit parallela tangenti datæ rectæ: erit casus propositionis huius & valebit eius demonstratio.

Verùm in ipsa propositione debet intelligi, vt neutra diametrorum datarum sit parallela datæ tangenti: sic enim tangens recta data, non posset secare diametrum sibi parallelam.

PROPOSITIO XXVI.

Si in Parabola, vel Hyperbola, recta linea ducatur diametro sectionis æquidistans: in vno tantum puncto cum sectione conueniet.

SVppositio. Intra parabolam vel hyperbolam recta linea CD ducta sit parallela diametro eius AB, sic enim intelligenda est suppositio Apollonij. Dico quod solum in vno puncto C verticis conueniet cum ipsa sectione Paraboles vel Hyperboles.

Apparatus. Esto si fieri possit, recta CD parallela diametro AB sectionum datarum, conueniat in duobus punctis C, D: Ex quibus si concipiantur duæ rectæ lineæ CG, DF, ordinatim applicatæ ad diametrum AB, ipsæ erunt per definit. 13. inter primas, parallelæ. Quare resultabit parallelogrammum CGFD, cuius duo latera opposita CG, DF, erunt æqualia per prop. 34. lib. 1. elem.

Demonstratio. Cùm rectarum CG, DF, ordinatim applicatarum ad diametrum Paraboles vel hyperboles, CG sit vicinior vertici A, diametri AB, altera verò DF remotior ab eodem A vertice; erit per coroll. nost. 1. ad prop. 22. GC minor quàm DF: contra ea quæ in apparatu ostendimus. hoc absurdum indicat positionem contradicentem assertioni huius propositionis esse falsam, & ipsam assertionem veram. Dicet aduersarius rectam lineam CD parallelam diametro AB, non cadere intra sectionem, sed extrà, excepto puncto C: igitur per 24. prop. producta recta CD, conueniet cum diametro AB, extra sectio-

ſectionem, contra naturam rectarum parallelarum: igitur effugium nullum eſt.

COROLL. NOSTRVM I.

Diameter Parabolæ vel Hyperbolæ, in vno tantum puncto Parabolam vel Hyperbolam ſecat, nimirum verticis.

QVod Parabolæ, vel Hyperbolæ diameter ſecet lineam eius curuam in vertice, vel ſecare poſſit. Sic explicatur. Concipiatur recta linea tangens Parabolam vel Hyperbolam in vertice diametri datæ; hæc tangens cùm vtrimque producta excurrat ſemper extra lineam curuam, dempto puncto contactus, inclinabitur ad diametrum prædictam; & per ax. 11. lib. 1. elem. producta hæc diameter, vltra prædictum punctum verticis ſui, commune lineæ curuæ, & rectæ tangenti, decuſſabit prædictam tangentem, & abibit ſupra illam, egrediendo ab area Parabolæ vel Hyperbolæ, & linea curua eius: hoc autem eſt ſecare lineam curuam Paraboles vel Hyperboles, in vno puncto. Quod verò diameter harum ſectionum non ſecet ipſas, id eſt earum lineas curuas in duobus punctis. Sic declaratur.

Si enim ſecaret in duobus punctis, claudetur ſpatium hac diametro & arcu lineæ curuæ Paraboles vel Hyperboles: quare aſſumendo in hoc arcu punctum diuerſum ab duobus extremis diametri prædictæ, recta linea parallela huic diametro ducta per prop. 31. lib. 1. element. cùm debeat intra ſectionem procedere vti demonſtrauimus in explicatione propoſitionis, producta in infinitum ad partes oppoſitas vertici, infringeret extrema huius ſpatij per ax. 28. lib. 1. elem. & ſic vel ſecaret arcum Paraboles vel Hyperboles, duobus in punctis, contra prop. hanc 26. vel diametrum, contra naturam parallelarum. quæ abſurda condemnant falſitatis poſitionem contradicentem huic noſtro corollario, & ſtabiliunt ipſum corollarium.

Hæc demonſtratio diuerſa eſt ab demonſtratione allata in conſideratione 23. ad definitiones ſecundas, tùm ab ea producta in coroll. noſtro 2. ad propoſ. 22. circa eandem materiam. Atque idem repetimus corollarium propter nouam demonſtrationem.

COROLL. NOSTRVM II.

In Parabola vel Hyperbola, recta linea parallela diametro eius ab aliquo puncto lineæ curuæ Paraboles vel Hyperboles, intra Parabolam vel Hyperbolam incedit, verſus partes inferiores ipſarum.

HOc probauimus in demonſtratione huius propoſitionis 26.

COROLL. NOSTRVM III.

In Parabola vel Hyperbola, ex puncto aliquo intra alterutram dato extra eius diametrum datam, parallela recta poſita ipſi diametro data, producta in infinitum vtrimque, ſolùm conueniet in vno puncto cum ſectione ad partes verticis, & non ad partes contrarias.

NAm ad partes verticis clauſum eſt ſpatium curua linea ſectionis, quare hæc recta parallela diametro datæ producta ad has partes conueniet cum ſectione iuxta 28. ax. lib. 1. element. non autem ad alias per iſtam propoſ. 26.

COROLL. NOSTRVM IV.

In eodem plano lineæ curuæ Paraboles vel Hyperboles, ſi detur punctum extra ipſas & earum curuas lineas, ex quo ducta ſit recta linea parallela diametro ipſius Paraboles vel Hyperboles: ſi producatur in infinitum hæc recta ducta parallela, occurret in vno puncto lineæ curuæ ipſius paraboles vel Hyperboles, & procedet intra alterutram ipſarum, nulli earum puncto alteri occurrens.

PEr conſiderationem 13. ad ſecundas defin. curuæ lineæ Paraboles & Hyperboles extendi in infinitum poſſunt verſus partes oppoſitas verticibus, ita vt ſemper extrema dictarum linearum ſuperficiem ſe ipſis non claudentium, diuaricentur ab inuicem in infinitum: ergo recta illa parallela ducta ex datis ipſis diametro cùm procedat vniformiter æquidiſtans diametro dictæ incurret in vnum punctum ſectionis; cumque procedat ſemper parallela, ingredietur intra ipſam Parabolam vel Hyperbolam, & per coroll. noſt. 2. ad hanc prop. eam ſolum ſecabit in prædicto puncto, & non in alio per hanc prop. 26. Quare manifeſtum erit corollarij propoſitum.

PROPOSITIO XXVII.

Si Parabolæ diametrum ſecet recta linea: producta in vtramque partem cum ſectione conueniet.

ET ſi hanc propoſitionem iam demonſtrauerimus in coroll. noſtro 2. ad prop. 18. dum hanc affectionem Parabolæ communem eſſe ellipſi & circuli circumferentię docuimus: nihilominus aliter eam demonſtrabimus in particulari quoad Parabolam.

Suppoſitio. Parabolæ diametrum AB ſecet recta linea CD. Dico hanc rectam CD productam vtrimque in infinitum concurrere vtrimque cum linea curua Paraboles in G quidem

dem ad partes verticis A, & in C ad partes B, oppositas.

Apparatus. Concipiatur recta linea DH ordinatim applicata ad diametrum AB; in puncto eius D, vel alio; tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto A verticis agatur recta linea AE parallela huic rectæ ordinatim applicatæ, hæc recta AE per prop. 17. continget solùm in puncto A, Parabolam datam. Iam verò vel recta linea CD data secare diametrum AB in puncto D, est parallela ordinatim applicatæ rectæ conceptæ, ideoque etiam ipsi AE per prop. 30. lib. 1. elem. vel non parallela ipsi AE quæ tota est extra Parabolæ aream per cit. propos. 17. si primum, ipsa recta CD per prop. 19. producta ex vtraque parte occurret vtrimque lineæ curuæ Paraboles. Si secundum, quia recta AB incidit in duas rectas non parallelas CD, AE; ipsæ rectæ CD, AE, efficientes per coroll. nost. 1. ad prop. 29. lib. 1. elem. ex vna parte duos angulos internos ad easdem partes duobus rectis minores, concurrent per ax. 13. lib. 1. elem. ad partes illorum duorum angulorum duobus rectis minorum, quos ponamus esse versus E, extra ipsam Parabolam, nam recta EA, tota est extra ipsam Parabolam ostensa; quare obuiam intermediamque lineam curuam Paraboles secabit recta CD producta in infinitum in puncto G.

Demonstratio quod etiam concurrat in C recta CD producta, cum linea curua Paraboles. Ex puncto D diametri AB agatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea DH æquidistans ipsi EA contingenti Parabolam in A puncto vnico; hæc recta DH per prop. 18. occurret parabolæ in H puncto, ad partes contrarias puncti G, respectu diametri AB; quandoquidem occurrere debet per cit. prop. 18. vtrimque cum linea curua Paraboles, si producatur ex vtraque parte. Sumpto autem puncto alio I inter A & H, in linea curua Paraboles; ex quo puncto I, educatur per cit. prop. 31. lib. 1. elem. recta linea aliqua parallela ipsi DC: hæc recta postrema ducta, vel continget in vnico solùm puncto I, Parabolam ipsam, vel ipsam secabit duobus in punctis. Si primùm, recta linea CD concurret producta in C, cum ipsa linea curua Paraboles, per prop. 18. Si secundum, etiam per coroll. nost. 1. ad eandem prop. 18. concurret in C cum linea curua Paraboles. Atque ita tota propositio demonstrata erit.

COROLL. NOSTRVM I.

Diametri Parabolæ se mutuò non secant intra ipsam Parabolam.

NAm si se mutuò intersecarent intra ipsam Parabolam, productæ vtrimque in infinitum, duobus in punctis occurrerent ipsi Parabolæ, per hanc prop. 27. hoc verò est contra coroll. 1. nostrum ad prop. 26. præcedentem: ergo diametri Parabolæ se mutuò non secant intra ipsam Parabolam.

COROLL. NOSTRVM II.

Diametri Parabolæ se mutuò non secant extra Parabolam.

SI fieri possit se mutuò secent duæ diametri AB, CD, extra Parabolam in puncto E. Sumpto autem puncto F in diametro CD, ex quo ducatur recta linea GFH parallela alteri diametro AB, per prop. 31. lib. 1. elem. hæc recta GFH, secabitur in F ab diametro CD, per prop. 11. Procli, quandoquidem datur secta AB in E ab diametro DCE; igitur hæc recta linea GFH, producta vtrimque in infinitum occurret duobus in punctis Parabolæ, per hanc propos. 27. Hoc verò est contra prop. præced. 26. Hæc pugnantia deriuata ex positione contradicente huic corollario, manifestam faciunt falsitatem positionis contradicentis huic corollario, & veritatem corollarij adstruunt.

COROLL. NOSTRVM III.

Diametri omnes Paraboles sunt parallelæ inter se.

NOn enim possunt se mutuò intersecare intra parabolam, per coroll. nostrum 1. neque extra parabolam per coroll. præcedens 2. ergo erunt parallelæ inuicem diametri omnes Parabolæ. quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM IV.

Diametri Hyperboles se mutuò secant extra ipsam Hyperbolen.

DIametri Hyperboles procedunt ex centro eius quod est punctum medium transuersi eius lateris prout existit totum extra ipsam Hyperbolen, verticemque vnum obtinet in ipsius linea curua, per defin. 3. inter secundas; suntque diuersæ lineæ rectæ ex illo centro prodeuntes ad Hyperbolam intra quam incedunt per defin. 2. inter secundas: ergo in eo centro se mutuò intersecabunt per 11. ax. lib. 1. elem.

COROLL. NOSTRVM V.

Diametri Hyperboles se mutuò non secant intra ipsam Hyperbolam.

ESto si fieri possit se mutuò secent intra ipsam Hyperbolam; sed per coroll. præcedens 4. se mutuò etiam diuidunt in centro quod est extra ipsam Hyperbolam; suntque diuersæ rectæ lineæ: igitur contra 14. ax. lib. 1. elem.

elem. duæ rectæ lineæ ſpatium claudent. hoc abſurdum deductum ex poſitione contradicente huic corollario 5. indicat poſitionem illam eſſe falſam, & corollarium verum eſſe.

COROLL. NOSTRVM VI.

Diametri Hyperboles non ſunt parallelæ inter ſe.

NAm per coroll. noſtrum 4. ſe mutuò in centro Hyperboles interſecant, hoc eſt concurrunt; ergo non ſunt rectæ lineæ parallelæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Si recta linea vnam oppoſitarum ſectionum contingat; ſumatur autem punctum intra alteram ſectionem, & per ipſum linea contingenti æquidiſtans ducatur: producta ad vtraſque partes, cum ſectione conueniet.

OPpoſitarum ſectionum ſit diameter AB; & ſectionem in qua A eſt, contingat recta linea CD in puncto diuerſo ab A vertice; ſitque aliud punctum datum E intra aliam ſectionem oppoſitam, ex quo ducta ſit recta linea EF parallela dictæ CD rectæ tangenti alteram ſectionem. Dico quod ſi vtrimque producatur iſta recta EF, in infinitum, ipſa conueniet in S & N, duobus in punctis cum ſectione intra quam ducta eſt.

Apparatus. Quandoquidem recta CD contingit vnam hyperbolarum oppoſitarum in qua A, vero contactu, ſi producatur vltra D punctum contactus, occurret diametro AB extra ſectionem in puncto O, per prop. 24. Quia verò duæ rectæ CDO, EF, ſunt datæ parallelæ, vnamque illarum CDO, ſecat diameter AB, producta vltra B intra ſectionem, etiam ſecabit aliam verbi gratiâ in G, productam, per prop. 11. Procli. Præterea per 3. propoſ. lib. 1. elem. de producta BA diametro vltra A, intra ſectionem, ſumatur recta AH æqualis rectæ BG: & per prop. 31. lib. eiuſdem 1. elem. ex puncto H agatur recta linea KHP, parallela ipſi EFG; hæc recta KHP, etiam per 30. prop. lib. 1. element. erit parallela ipſi CDO contingenti ſectionem eandem in qua ducta eſt recta KHP: quare per prop. 18. recta KHP, occurret in K & P, duobus punctis dictæ ſectioni. Inſuper ex punctis K & P, concipiantur rectæ lineæ KL, PQ, ordinatim applicatæ diametro AB, quæ erunt inter ſe parallelæ per defin. 12. inter primas. Tùm ex puncto G, ſumatur vltra G de producta ABG diametro, recta linea GM, æqualis ipſi HL, per prop. 3. lib. 1. elem. & ex puncto M, concipiatur ad partes alternas rectæ KL, recta MN ordinatim applicata eidem diametro AB productæ; etiam per cit. def. 12. inter primas rectæ MN, LK, erunt parallelæ; vnde per prop. 29. lib. 1. elem. anguli in M & L, alterni erunt æquales inter ſe; tùm etiam in G & H, hoc eſt angulus MGN, æqualis angulo LHK: eruntque per prop. 17. lib. 1. elem. in triangulo HLK, duo anguli in H & L, minores duobus rectis; & per 1. ax. lib. 1. elem. etiam alij duo anguli in M & G, minores duobus rectis: quare per 13. ax. lib. 1. elemen. concurrent duæ rectæ MN, EFGN, in puncto puta N; atque ita reſultabit triangulum MGN, cuius angulus in N æqualis erit angulo in K, trianguli LHK, per prop. 32. coroll. noſt. 3. lib. 1. elem. nam probauimus alios duos angulos dictorum triangulorum eſſe æquales inter ſe reſpectiuè. Vnde erunt ipſa triangula HLK, GMN, æquiangula.

Demonſtratio. Quandoquidem ſunt triangula HLK, GMN, oſtenſa æquiangula, erit per lem. 50. vt HL ad LK, ſic GM ad MN; prima autem HL eſt æqualis per apparatum, tertiæ GM; ergo per prop 14. lib. 5. elem. ſecunda LK erit æqualis quartæ MN: quare per propoſ. 16. Procli quadrata rectarum LK, MN, erunt æqualia. Præterea per apparatum recta AH eſt æqualis rectæ BG: ergo ſi æqualibus his addantur æquales oſtenſæ HL, GM; fient per 2. ax. lib. 1. element. rectæ AL, BM, æquales; quibus ſi addatur communis AB, fient per cit. proximè ax. totæ BL, AM, æquales. Quare per 1. prop. lib. 6. elem. rectangulum ſub BL, LA, erit æquale rectangulo ſub AM, MB, ſumendo pro altitudinibus rectas AM, BL, æquales, & pro baſibus rectas AL, BM, æquales. Inſuper per coroll. noſt. ad propoſ. 7. lib 5. elem. erit vt rectangulum ſub BL, LA, ad quadratum rectæ KL, ſic rectangulum ſub AM, MB, ad quadratum rectæ MN: ſed per prop. 21. & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. eſt vt rectangulum ſub BL, LA, ad quadratum rectæ KL, ſic tranſuerſum BA latus ad rectum; quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum ſub AM, MB, ad quadratum rectæ MN, ita erit tranſuerſum latus AB ad rectum idem quod ſupra, (nam per prop. 14. ſectiones oppoſitæ tranſuerſum latus AB obtinent commune, & æqualia latera recta) Vel igitur recta MN, concurrere oſtenſa cum recta EFGN, in puncto N, exiſtit extremo ſuo N, in linea hyperboles intra quam eſt ipſa recta EFG, vel non. Si non exiſtat, poterit produci vltra N, donec attingat dictæ hyperbolæ lineam curuam in alio puncto, vel ſecabitur ipſa recta MN, in puncto alio inter M, N, ab linea curua dictæ hyperboles: Tunc verò per prop. 21. erit rectangulum ſub AM, MB, ad quadratum rectæ inæqualis ipſi MN, vt tranſuerſum latus AB ad rectum; oſtendimus autem

tem esse rectangulum sub AM, MB, ad quadratum rectæ MN, sicut transuersum AB latus ad rectum: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub AM, MB, ad quadratum rectæ inæqualis ipsi MN, sicut rectangulum idem sub AM, MB, ad quadratum rectæ MN: ergo per propos. 9. lib. 5. elem. quadratum rectæ MN, & quadratum rectæ inæqualis ipsi rectæ MN, erunt æqualia; ideoque per propos. 16. Procli, ipsæ rectæ inæquales positæ ab aduersario, erunt æquales, contra 8. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum cùm deducatur ex positione ~~quod~~ negante punctum extremum N, rectæ MN, existere in linea curua hyperbolæ, falsa erit, & contradicens assertio vera, videlicet quod N extremum punctum rectæ MN, existat in linea curua hyperboles. Secat autem recta EFG producta vltra G ipsam rectam MN, in puncto N, quod ostendimus existere in linea curua hyperboles; igitur recta linea EFGN, parallela tangenti CDO, producta intra sectionem datam oppositam, occurrere demonstrata erit dictæ sectioni oppositæ in vno puncto N, ad vnam partem. Restat vt ostendamus quod etiam producta versus alteram partem vltra E, conueniat in alio S puncto. Hoc verò probabimus, concipiendo rectam PQ ordinatim applicatam transuersæ diametro prædictæ BAL in puncto Q, ex puncto P; assumendo ex recta BG ostensa æquali ipsi AH, rectam BR, æqualem ipsi AQ, per 3. propos. lib. 1. elem. & ex puncto R, concipiendam rectam lineam RS ordinatim applicatam diametro AB, sicut est recta PQ ordinatim applicata eidem diametro AB; erunt enim, RS, QP, parallelæ per defin. 12. inter primas. Iam verò ex eisdem principijs citatis probabimus concurrere in S, rectam SR, & FE rectam, si producantur; & triangula æquiangula esse HQP, GRS, & punctum S existere in linea curua sectionis oppositæ, sicuti ostendimus punctum N concursus rectæ EFGN, & MN rectæ existere in eadem linea curua sectionis dictæ oppositæ; ideoque rectam FE productam ex parte E, concurrere cum linea curua sectionis oppositæ in S; sicuti ostensa est concurrere ex alia parte in N. Atque ita tota propositio demonstrata erit. Verùm breuiùs hæc posterior pars demonstrabitur hac ratione, Concipiatur semiordinatim applicata NM diametro AB, integra, quæ sit NMX; habebimus clausum spatium BXM mixtilineum ex duabus rectis BM, MX, & arcu BX, intra quod est recta EF; ergo producta vltra E infringet arcum XB, non autem rectam XM, aut rectam BM; nam illam iam secare productam in N est ostensa, & hanc in G; si enim iterum illas secaret, duæ rectæ lineæ spatium concluderent, contra 14. ax. lib. 1. elem.

COROLL. NOSTRVM I.

Si in Hyperbola, recta linea ab diametro eius exeuntis, parallelaque ordinatim applicatis ad hanc diametrum transuersam, quadratum fuerit ad rectangulum sub lineis qua inter ipsam & vertices dictæ diametri transuersa sunt, sicut rectum latus ad transuersum: punctum extremum dictæ rectæ aliud ab eo quod est in ipsa diametro transuersa seu latere transuerso, existet in linea curua Hyperboles.

HOc demonstrauimus in extremo N, rectæ MN, parallelæ ordinarim applicatæ ad transuersum latus seu diametrum AB productum intra ipsam Hyperbolam vsque ad M; eò quòd rectangulum sub AM, BM, ostensum sit esse æquale quadrato rectæ MN, vt rectum latus ad transuersum AB.

COROLL. NOSTRVM II.

Si recta linea vnam oppositarum sectionum secet duobus in punctis; sumatur autem punctum intra alteram sectionem; & per ipsum linea dictæ secanti æquidistans ducatur: Producta ad vtrasque partes, cum sectione conueniet.

SVppositio. In vna sectionum oppositarum, in qua sit recta linea VT secans illam duobus in punctis V & X; datumque sit punctum E in altera opposita sectione, per quod transmissa sit recta EF parallela ipsi VT secanti in alia opposita sectione. Dico istam EF productam vtrique occurrere duobus in punctis S, N, dictæ sectioni oppositæ.

Apparatus. Transuersum latus AB obuium commune vtrisque oppositis sectionibus per prop. 14. productum vtrimque intra ipsas sectiones oppositas, si opus sit, secabit recta VT linea in puncto I, intra sectionem primam assumptam, vel in vertice A, vel extra ipsam sectionem, per prop. 22. Cùm igitur parallelæ datæ sint rectæ EF, VT, earumque vnam VT secet transuersum latus AB, secabit alteram EF in G, productam, per propos. 11. Procli. Præterea per prop. 3. lib. 1. element. sumatur recta AH æqualis ipsi BG: & reliqua fiant, quæ in apparatu demonstrationis ad hanc propositionem, & applicetur demonstratio ipsa; probatum erit intentum in hoc corollario; postquam innotuerit ex coroll. nostro 1. ad prop. 18. rectam per H transmittendam parallelam ipsi secanti datæ VIT, occurrere vtrimque in K & P, sectioni quam secat duobus in punctis data recta VT.

PROPOSITIO XXIX.

Si in oppositis sectionibus recta linea

linea per centrum ducta occurrat vni sectioni; vlteriùs producta, alteri occurret.

SVppositio. In oppositis sectionibus AD, BG, quæ habeant transuersam diametrum AB communem iuxta prop. 14. & centrum C, in medio lateris transuersi AB iuxta def. 3. inter secundas: Recta linea per centrum C educta occurrat in D, sectioni AD. Dico quod si producatur recta DC, vltra C centrum, occurrat in G, alteri sectioni oppositæ.

Apparatus. Ex puncto D, sectionis AD, concipiatur recta linea DE ordinatim applicata transuersæ diametro BA productæ vltra A, intra sectionem CD: Tùm de producta eadem diametro AB vltra B intra alteram sectionem oppositam, sumatur per propos. 3. lib. 1. elem. recta BF, æqualis ipsi AE; & ex puncto F concipiatur altera recta linea FG ordinatim applicata eidem diametro transuersæ AB productæ, sitque FG alternatim posita respectu alterius ED; ipsæ duæ ED, FG, erunt per def. 12. inter secundas, parallelæ; quare per prop. 29. lib. 1. elem. anguli in E & F, erunt æquales. Ducatur autem recta CG, quæ probabitur esse in directum alterius CD, atque adeo vnicam esse rectam lineam DCG. Quod si æqualibus AE, BF, addatur communis AB, fient per 2. ax. lib. 1. element. totæ AF, BE, æquales: tùm etiam si eisdem æqualibus AE, BF, addantur æquales CA, CB, probatæ per defin. 3. inter secundas, fient etiam per cit. ax. 2. rectæ CE, CF, æquales.

Demonstratio. Si pro basibus BE, AF, æquales probatæ sumantur, & pro altitudinibus sumantur rectæ æquales AE, BF, ostensæ; erit per prop. 1. lib. 6. elem. rectangulum sub BE, EA, æquale rectangulo sub FA, FB. Est autem per prop. 21. quadratum rectæ DE ad rectangulum sub BE, EA, sicut rectum latus ad transuersum AB; & inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. est rectangulum sub BE, EA, ad quadratum rectæ DE, sicut transuersum AB latus ad rectum: sed etiam est ex eisdem principijs citatis rectangulum sub FA, FB, ad quadratum rectæ FG, sicut transuersum latus AB ad rectum aliud quod æquale est prædicto recto iuxta propos. 14. ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub BE, EA, ad quadratum rectæ DE, sicut rectangulum sub FA, FB, ad quadratum rectæ FG: probauimus autem illa rectangula esse æqualia, videlicet primum & tertium è quatuor proportionalibus postremò assignatis; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secundum & quartum inter illa quatuor, videlicet quadrata rectarum DE, FG, erunt æqualia; ideòque per prop. 16. Procli, rectæ ipsæ DE, FG, erunt æquales. Cùm igitur in duobus triangulis CED, CFG, circa æquales angulos E & F, sint duo latera CE, ED, relatiuè æqualia duobus lateribus CF, FG; erunt per prop. 4. lib. 1. anguli ECD, FCG, æquales. Quare cùm ad idem punctum C, rectæ ACB, duæ rectæ lineæ CD, CG, ad partes diuersas eductæ, efficiant angulos ad verticem, seu contrapositos ECD, FCG, æquales; erunt per prop. 4. Procli in directum duæ rectæ lineæ CD, CG, seu vnam efficient rectam lineam DCG: Recta igitur DC linea ex puncto vnius sectionis oppositę per centrum C transmissa, & producta, occurret etiam in G, alteri sectioni oppositæ: probauimus enim G punctum esse in linea curua sectionis BG, videlicet extremum ordinatim applicatæ rectæ FG, in ea ad diametrum AB productam. Atque ita probauerimus intentum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si recta linea ex centro sectionum oppositarum educta vnam oppositarum sectionum quantumcumque producta non attingere possit; hæc etiam recta in infinitum extensa vltra dictum centrum, alteram oppositarum datarum sectionum non attinget.

ESto si fieri possit, recta aliqua linea ex centro dicto in infinitum extensa attingere nequeat vnam oppositarum sectionum datarum, etiam in infinitum auctam iuxta prop. 8. verumtamen hæc eadem recta producta vltra dictum centrum, attingat alteram oppositam sectionem, vel ipsam attingere possit: Tunc per istam prop. 29. attingeret vel attingere posset alteram sectionum oppositarum, contra suppositionem. Igitur admittendo suppositionem, & introducendo positionem contradicentem huic corollario aduersarius, cogitur negare quod admisit seu asseruit. Hæc pugnantia manifestam reddunt falsitatem positionis introductæ, & veritatem corollarij.

PROPOSITIO XXX.

Si in Ellipsi, vel oppositis sectionibus, recta linea ducatur ad vtrasque partes centri, sectioni occurrens: ad centrum bifariàm secabitur.

SVppositio. In Ellipsi, vel oppositis sectionibus, quarum diameter AB, & centrum C, recta linea DCE, per centrum C ducta sit, occurrens in D & E ad vtrasque partes sectioni ellipticæ, vel sectionibus oppositis. Dico quod bifariàm secetur in centro C.

Ap-

Apparatus. Ex punctis D & E, concipiantur duæ rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum AB; ipsæ erunt per defin. 12. inter primas, parallelæ; ideoque per prop. 29. lib. 1. elem. quia recta DCE, in ipsas parallelas incidit, erunt anguli in E & D, æquales; tùm etiam quia data diameter AB producta in sectionibus oppositis vtrimque, & non producta in ellipsi, in easdem parallelas incidit, erunt anguli in G & F æquales: sed & sunt anguli in C centro seu vertice æquales per proposi. 15. lib. 1. elem. ergo triangula FCD, GCE, erunt æquiangula.

Demonstratio. Per prop. 21. libri huius, & coroll. proposi. 4. lib. 5. elem. est vt rectangulum sub BF, FA, ad quadratum rectæ FD, sic transuersum latus ad rectum; tùm vt rectangulum sub AG, GB, ad quadratum rectæ GE, sic transuersum latus ad rectum: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub BF, FA, ad quadratum rectæ FD, sic rectangulum sub AG, GB, ad quadratum rectæ GE; & iuxta prop. 16. lib. 5. element. vicissim erit vt rectangulum sub BF, FA, ad rectangulum sub AG, GB, ita quadratum rectæ FD ad quadratum rectæ GE. Est autem in triangulis æquiangulis FCD, GCE, per lem. 50. vt DF ad FC, sic GE ad GC; & vt DF ad GE, sic FC ad GC: ergo per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ DF ad quadratum rectæ GE, sic quadratum rectæ FC ad quadratum rectæ GC: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub BF, FA, ad rectangulum sub AG, GB, sic quadratum rectæ FC ad quadratum rectæ GC; & iuxta prop. 16. lib. 5. elem. erit vicissim, vt rectangulum sub BF, FA, ad quadratum rectæ FC, sic rectangulum sub AG, GB, ad quadratum rectæ GC. Hæc in vniuersum pertinent tam ad ellipsim, quàm ad oppositas sectiones. Iam verò in ellipsi erit per prop. 18. lib. 5. elem. componendo, vt rectangulum sub BF, FA, vnà cum quadrato rectæ FC, ad quadratum rectæ FC, sic rectangulum sub AG, GB, simul cum quadrato rectæ GC, ad quadratum rectæ GC. Et quia per defin. 1. inter secundas, diameter AB bifariàm in C, centro diuiditur, & non bifariàm consequenter in alijs punctis F, G; erit per 5. proposi. lib. 2. elem. rectangulum sub BF, FA, vnà cum quadrato rectæ FC, æquale quadrato rectæ AC: similiter ob eadem principia, erit rectangulum sub AG, GB, simul cum quadrato rectæ CG, æquale quadrato rectæ CB: ergo per coroll. nost. ad prop. 7. lib. 5. elem. & per proposi. 11. libri eiusdem, erit vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ CF, sic quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ CG. Nunc etiam ad oppositas sectiones, suppositis ijs quæ in vniuersum diximus, descendamus: erit per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. inuertendo, vt quadratum rectæ FC ad rectangulum sub BF, FA, sic quadratum rectæ GC ad rectangulum sub AG, GB: Et quia transuersum latus AB per defin. 3. inter secundas, bifariàm sectum est in centro C, eique adiectum est in directum recta FA, erit per prop. 6. lib. 2. element. rectangulum sub BF, FA, simul cum quadrato rectæ AC, æquale quadrato rectæ CF; tùm etiam rectangulum sub AG, GB, vnà cum quadrato rectæ CB, æquale quadrato rectæ CG: Quare quadratum rectæ CF superat rectangulum sub BF, FA, quadrato rectæ AC; & quadratum rectæ CG excedit rectangulum sub AG, GB, quadrato rectæ BC: igitur iuxta coroll. prop. 19. lib. 5. elem. erit per conuersionem rationis, vt quadratum rectæ FC ad quadratum rectæ CA, sic quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ BC; & iuxta coroll. prop. 4. lib. eiusdem, inuertendo erit vt quadratum rectæ CA ad quadratum rectæ CF, ita quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ CG. Quia igitur tam in ellipsi quàm in oppositis sectionibus demonstrauimus esse, vt quadratum rectæ CA ad quadratum rectæ FC, sic quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ GC: erunt per prop. 22. lib. 6. elem. quatuor istæ rectæ proportionales CA, FC, BC, GC: sed prima CA est æqualis tertiæ CB; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secunda FC æqualis erit quartæ GC. Ergo in triangulis æquiangulis ostensis FCD, GCE, erit per 4. prop. lib. 6. elem. vt FC ad CD, ita GC ad CE; prima autem FC æqualis est tertiæ GC; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secunda CD erit æqualis quartæ CE. quod erat propositum ostendendum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

In ellipsi orta ex sectione coni, dari possunt duæ diametri inæquales, quarum vna sit axis.

Suppositio, & apparatus. Per nostrum coroll. ad proposi. 5. sectus sit conus plano per axem eius, & perpendiculari ad eius basim circularem BLCM; vnde triangulum ABC resultet per 3. prop. cuius basis BC erit diameter dictæ baseos circularis, per coroll. ad cit. 3. proposit. orthogoniæ dicto triangulo BAC per axem. Quare si in plano infinito sustentante hanc basim circularem adæquatè, producatur recta BC vltra C, & in productione eligatur aliquod punctum O, ex quo per prop. 11. lib. 1. elem. excitetur recta linea NOP ad angulos rectos ipsi rectæ BCO; hæc eadem recta erit ad angulos rectos ipsi plano BAC trianguli infinitè etiam producto, iuxta defin. 4. lib. 11. elem. Quod si applicetur planum aliud secundum huic rectæ NOP, illud erit perpendiculare plano trianguli BAC, per prop. 18. lib. 11. elem. ita verò dispositum sit hoc planum secundum supra triangulum BAC, vt secando illud, non sit subcontrariè positum,

positum, neque parallelum basi circulari BLCM: tunc secando conum & triangulum BAC, efficiet in cono ellipsim EKDI, per propos. 13. cuius linea curua erit in superficie conica secta, per lem. 3. Porrò planum huius ellipseos erit perpendiculare dicto triangulo per axem, sicuti planum prædictum secundum illam efficiens: & efficiet in triangulo dicto rectam lineam ED, per 3. prop. lib. 11. elem. secantem latera duo AB, CD, trianguli prædicti; eritque diameter & axis ellipseos EKDI, per coroll. 5. prop. 7. Quod si in plano isto secundo secante, vel in plano ellipseos prædictę, ex puncto F medio diametri ED, quod erit centrum ellipseos per def. 1. inter secundas, excitetur per prop. 11. lib. 1. elem. recta linea FK perpendicularis rectæ ED; hæc erit etiam perpendicularis plano trianguli BAC, iuxta defin. 4. lib. 11. elem. ideoque per prop. 28. lib. eiusdem elem. duæ rectæ lineæ FK, NOP, singulæ perpendiculares ad rectam EDO, erunt parallelæ: nam per defin. 3. lib. 11. elem. cùm recta NOP sit ostensa perpendicularis plano trianguli BAC producto, erit perpendicularis rectæ EDO in illo sitæ. Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto F agatur in plano trianguli BAC, recta linea GFH, parallela basi BC; vnde per prop. 29. lib. 1. element. anguli AGH, ABC, erunt æquales; tùm etiam anguli AHG, ACB. Et quia habemus duas rectas GFH, FK, angulum efficientes, parallelasque respectiuè duabus rectis BCO, NOP, angulum efficientibus; plana applicata illis angulis, erunt per prop. 15. lib. 11. elem. parallela; hoc est planum baseos circularis BLCM, & planum applicatum rectis GFH, KF: hoc postremum concipiatur tertium planum secans conum datum, & triangulum BAC per eius axem; resultabit in cono circulus per 4. prop. obtinens circumferentiam GHKI in superficie coni, eiusque diameter erit GFH, sectio communis trianguli BAC, & plani huius tertij, iuxta coroll. 1. propos. 7. Tùm per 3. prop. lib. 11. elem. recta KFI erit sectio communis huius circuli facti, vel plani illum efficientis, & ellipseos sectæ ab illo; nam subiectiuè est ducta in plano ellipseos, & ad illam applicatum est tertium planum secans. Sed & recta KFI, cùm sit ostensa perpendicularis ad planum trianguli BAC, erit perpendicularis rectæ GFH in eo ductæ, per 3. defin. lib. 11. elem. Cùmque sit in ellipsi traiecta per eius centrum F, erit eius diameter alia. Assero autem hanc diametrum KFI, ellipseos EKDI, esse inæqualem alteri eius diametro EFD.

Demonstratio. Si duæ diametri EFD, KFI, ellipseos, non sint inæquales, sint si fieri possit æquales: ergo quia per hanc prop. 30. singulæ diuiduntur bifariàm in F centro; erunt per prop. 15. lib. 5. elem. semisses earum FE, FK, æquales, vel per ax. 7. lib. 1. elem. quare per prop. 16. Procli, quadratum rectæ FK, erit æquale rectangulo sub EF, FD, seu quadrato rectæ FE. Et quia ostendimus in apparatu, rectam KF esse perpendicularem diametro GFH, circuli GKHI, erit per lemma 47. rectangulum sub GF, FH, æquale quadrato rectæ KF: quare cùm duo rectangula, vnum sub EF, FD, alterum sub GF, FH, sint æqualia quadrato rectæ KF, erunt per 1. ax. lib. 1. elem. æqualia inter se; & per prop. 14. lib. 6. elem. habebunt latera reciproca; hoc est, erit EF ad FG, sicut HF ad FD. Igitur cùm in triangulis EFG, HFD, sint per prop. 15. lib. 1. element. anguli contrapositi æquales, & circa illos latera proportionalia; ipsa triangula prædicta erunt per 6. prop. lib. 6. elem. æquiangula; & angulus EGF æqualis angulo HDF; sed angulus ABC est æqualis angulo EGF, per prop. 29. lib. 1. elem. (nam plana, baseos circularis BLCM, & circuli GKHI, cùm sint ostensa parallela in apparatu, & ambo secentur ab plano trianguli per axem BAC, sectiones lineares eorum, videlicet BC, GFH, erunt per prop. 16. lib. 11. elem. parallelæ.) Ergo per 1. axio. lib. 1. elem. angulus HDF, erit æqualis angulo ABC. Iam verò vel triangulum BAC habet duo latera AB, AC, æqualia, vel inæqualia: si primum, erunt anguli ABC, ACB, æquales per 5. prop. lib. 1. elem. tùm etiam æquales inter se, & illis, anguli AGH, AHG, per propos. 29. lib. 1. elem. & 1. ax. lib. eiusdem: quare per idemmet axioma angulus AHG, erit æqualis angulo HDF, externus interno & opposito, in triangulo HDF, contra prop. 16. lib. 1. elem. Si secundum, cùm probauerimus angulos ABC, HDF, seu ADE, esse æquales inter se; sectio facta EKDI, erit subcontraria, per defin. 54. inter secundas, ideoque per propos. 5. erit circulus, contra suppositionem. Hæc duo absurda, quandoquidem deducuntur ab positione æqualium diametrorum EFD, KFI, quarum vna sit axis, in ellipsi EKDI, & sic de reliquis, falsa erit: ergo erunt inæquales. Igitur diametri inæquales assignari poterunt in ellipsi, quarum vna sit eius axis sicuti proposuimus in hoc nostro Corollario.

PROPOSITIO XXXI.

Si in transuerso figuræ latere Hyperboles sumatur aliquod punctum, non minorem abscindens ad verticem sectionis, quàm sit dimidium transuersi lateris figuræ; & ab ipso recta linea sectioni occurrat: si producatur, intra sectionem ad sequentes eius partes cadet.

L Suppo-

SVppositio. In transuerso latere AB, hyperboles, sumptum sit punctum C, medium, quod erit per defin. 3. inter secundas, centrum Hyperboles; erunt rectæ AC, BC, æquales: (Sic enim punctum C, non minorem abscindet ex dicto latere AB transuerso versus verticem B, quàm sit dimidium ipsius transuersi lateris) Ductaque sit ex hoc puncto C, recta linea CD, occurrens ipsi Hyperbolæ in D. Dico rectam CD productam vltra D, (hoc est vti ait Apollonius ad sequentes eius partes) cadere seu procedere intra ipsam sectionem Hyperboles, verbi gratiâ in I.

Apparatus. Esto, si fieri possit, recta CD producta non procedat intra sectionem, sed extra, vt CDE. Ex quocumque puncto huius rectæ vltra D, puta E, & ex puncto eius D quod est in linea curua sectionis, concipiantur rectæ lineæ EG, DH, ordinatim applicatæ ad dictum transuersum latus seu diametrum transuersam AB, productam vltra B intra ipsam sectionem; hæ duæ rectæ EG, DH, erunt per defin. 12. inter primas, parallelæ: & prima EG secabit obuiam lineam curuam Hyperboles in puncto F, nam ipsa curua linea potest in infinitum produci ad partes contrarias vertici B, per prop. 8. Iam verò per ax. 8. lib. 1. elem. recta EG maior est quàm FG; & per coroll. nost. 1. ad prop 22. recta FG remotior ab vertice B, maior erit quàm DH vicinior eidem vertici, & per 1. ax. lib. 1. elem. multo maior erit recta EG quàm DH; ideóque quadratum rectæ EG maius erit quadrato rectæ DH, per lemma 49. & etiam quadrato rectæ FG.

Demonstratio. Per prop. 8. lib. 5. elem. quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ DH, maiorem rationem habet, quàm quadratum rectæ FG: & quia in triangulo GCE, recta linea DH est parallela basi EG; erit per lem. 50. vt EG ad GC, sic DH ad HC; & vt EG ad DH, sic GC ad HC: quare per propos. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ DH, sic quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ HC: ostendimus autem quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ DH, maiorem habere rationem, quàm quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ DH; ergo per prop. 13. lib. 5. elem. quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ HC, maiorem habebit rationem, quàm quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ DH; hoc est quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ DH, minorem habebit rationem, quàm quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ HC: est autem per propos. 21. quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ DH, est autem per prop. 21. quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ DH, vt rectangulum sub AG, GB, ad rectangulum sub AH, HB; & nunc probauimus quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ DH, habere minorem rationem, quàm quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ HC: ergo per coroll. nost. 1. ad prop. 13. lib. 5. elem. rectangulum sub AG, GB, ad rectangulum sub AH, HB, minorem habet rationem, quàm quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ HC; hoc est quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ HC, habebit maiorem rationem, quàm rectangulum sub AG, GB, ad rectangulum sub AH, HB: Igitur iuxta propos. 27. lib 5. elem. permutando, quadratum rectæ GC ad rectangulum sub AG, GB, habebit maiorem rationem, quàm quadratum rectæ CH, ad rectangulum sub AH, HB. Quia verò recta linea AB diuisa est bifariàm in C, eique adiecta est in directum recta linea BG; erit per prop. 6. lib 2. elem. rectangulum sub AG, GB, simul cum quadrato rectæ CB, æquale quadrato rectæ CG; ergo quadratum rectæ CG excedit rectangulum sub AG, GB, quadrato rectæ CB: Eodem modo, quia recta AB diuisa est bifariàm in C, eique adiecta est recta BH; erit per cit. prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub AH, HB, simul cum quadrato rectæ CB, æquale quadrato rectæ CH; quare quadratum rectæ CH, excedet rectangulum sub AH, HB, quadrato rectæ CB: Igitur per prop. 29. lib. 5. element. diuidendo, quadratum rectæ CB ad rectangulum sub AG, GB, maiorem obtinebit rationem, quàm quadratum rectæ CB ad rectangulum sub AH, HB; hoc est, idem quadratum rectæ CB, ad maius rectangulum sub AG, GB, obtinebit maiorem rationem, quàm ad minus rectangulum sub AH, HB, contra propos. 8. lib. 5. elem. (quod verò rectangulum sub AG, GB, sit maius rectangulo sub AH, HB, patet per 49. lemma.) Hoc absurdum deductum ex positione quod recta CD producta vltra D, non procedat intra sectionem, in I, sed extra in E, indicat ipsam positionem esse falsam: igitur positio huic contradicens vera erit, videlicet quod recta CD producta vltra D progrediatur intra sectionem Hyperboles, sicuti vult propositio. Sed age his demonstratis, probemus etiam, quamcumque aliam rectam puta KD deductam ex puncto K supra centrum C punctum medium transuersi lateris AB, maiorem abscindente portionem KB versus verticem B, de transuerso latere hyperboles, quàm sit dimidium CB, ipsius lateris AB transuersi, ad ipsam hyperbolam, productam vltra D punctum in quo occurrit ipsi sectioni, incedere intra ipsam in P. Si non ita sit, incedat si fieri possit extra ipsam ad M: tùm ab aliquo eius puncto puta M, quod sit vltra D, & ex puncto eius D communi etiam lineæ curuæ Hyperboles, concipiantur duæ rectæ lineæ MN, DH, ordinatim applicatæ ad transuersam AB diametrum productam intra ipsam sectionem vltra B verticem; quæ rectæ MN, DH, erunt parallelæ per defin. 12. inter primas. Producendo autem

primam

primam rectam CD, vltra D, secabit obuiam rectam MN in S, per prop. 11. Procli; & quidem intra sectionem, nam tota DIS, semper intra sectionem ipsam est, & sic resultabunt triangula æquiangula DKH, MKN, proportionalium laterum per lem. 50. ob parallelas rectas DH, MN; tùm alia duo æquiangula triangula DCH, SCN, ob rectas parallelas DH, SN. Verùm trianguli DKH maior est angulus KDH, quàm angulus CDH, trianguli DCH, igitur angulus KMN æqualis ipsi KDH per propos. 29. lib. 1. elem. maior erit quàm angulus CSN, per 1 ax. lib. 1. element. æqualis prædicto minori CDA; exterios interiore, contra prop. 16. lib. 1. elem. Igitur recta KD vltra D, non procedet extra sectionem, sed intra ipsam, secabitque rectam MN in P intra sectionem. Afferere autem quod recta KD producta vltra D, cadat quidem intra sectionem, sed inter lineam sectionis curuam, & lineam DS; vel quod congruat cum recta DS: vanum erit; nam si primum, idem absurdum sequetur modò demonstratum: si secundum, duæ rectæ lineæ KD, CD, productæ vltra D, obtinebunt segmentum commune DS, contra 10. ax. lib. 1. elem. Igitur abundè demonstrata erit propositio. Breuiùs tamen probabitur, quod recta KD producta vltra D secet hyperbolen, ingrediendo intra ipsam: Recta CDS per primam partem secat hyperbolen procedendo intra ipsam; ergò cum recta KD angulum efficiat in D, cum recta CDS, eam decussabit producta vltra D, & incedet ad partes contrarias rectæ CDS, hoc est versus N, per 11. ax. lib. 1. elem. quare ingredietur intra hyperbolen, & rectam SN, secabit in P ad partes N, quod erat probandum.

COROLLARIVM.

Recta linea Hyperbolen contingens, & non secans, si producatur: secabit diametrum inter verticem & centrum sectionis.

IMprimis per prop. 24. hæc recta Hyperbolen contingens & non secans, producta occurret diametro eius extra sectionem. Verùm sic occurrere nequit ipsi diametro, nisi in triplici differentia, in puncto eius quod sit centrum hyperboles, vel supra illud centrum, vel infra illud. Quodcumque afferatur ex duobus primis, recta linea data contingere solùm hyperbolen, & non secare, ipsam secabit per demonstrationem ad istam propositionem 31. Restat igitur tertium, vt occurrat diametro productæ infra centrum hyperboles, extraque sectionem ipsam.

COROLL. NOSTRVM I.

Omnis linea recta deducta ab centro Hyperboles ad ipsam; procedit producta vltra punctum eius occursus intra ipsam Hyperbolam.

COROLL. NOSTRVM II.

Omnis linea recta deducta ab puncto transuersi eius lateris supra centrum eius seu remotius ab vertice communi Hyperbolæ & transuerso eius lateri ad quodlibet punctum lineæ curuæ Hyperboles; producta vltra hoc punctum Hyperboles, procedit intra ipsam.

HÆc duo corollaria iam demonstrata sunt in ipsa propositionis probatione.

PROPOSITIO XXXII.

Si per verticem sectionis coni recta linea ordinatim applicatæ æquidistans ducatur; sectionem continget: & in locum, qui inter coni sectionem & rectam lineam interijcitur, altera recta linea non cadet.

ADuerte, quod in propos. 17. sit iam demonstrata prima pars, videlicet rectam lineam per verticem conicæ sectionis ductam parallelam rectæ lineæ ordinatim applicatæ in ipsa sectione; sectionem ipsam contingere in vno tantùm puncto verticis, & eam non secare. Nunc verò probare oportet secundam partem, nimirum quod inter hanc rectam contingentem, & sectionem ipsam, nulla alia recta linea transmitti possit contingens ipsammet eandem sectionem in eodem puncto alterius contingentis, quin secet ipsam sectionem; quod in prop. 16. lib. 3. elem. iam demonstratum in circulo, qui coni sectio esse potest. Age verò in vniuersum demonstremus propositum in omni sectione coni, etiam circulari. Sitque

Suppositio ad demonstrationem propositi in Parabola, cuius diameter sit AB, ex cuius A vertice ducta sit recta AC æquidistans rectæ ordinatim applicatæ eidem diametro AB in Parabola: hæc recta AC per prop. 17. solum continget Parabolam in puncto A, & ipsam non secabit. Dico autem nullam aliam rectam per punctum idem A transmitti posse inter hanc rectam AC, & lineam curuam Parabolæ, quin secet ipsam, vel quæ contingat solum Parabolen in puncto A.

Apparatus. Cadat si fieri possit recta AD, inter rectam AC, & lineam curuam Parabolæ, eam contingens in puncto A, & non secans: Tùm ex aliquo puncto rectæ AD puta

 D, sit

D, sit concepta recta linea DE ordinatim applicata diametro AB; hæc secabit obuiam curuam lineam Paraboles in puncto G, nam cùm punctum D sit extra ipsam Parabolam, & ex eo ordinatim ducta recta linea sit DE ad diametrum DE, ipsam diametrum existentem intra Parabolam attingere debet ex dictis in defin. 12. inter primas; quare obuiam lineam curuam Paraboles quæ in infinitum produci potest per prop 8. intersecabit in G. Sit verò recta AF latus rectum diametri AB in data Parabola. Præterea per lemma 6. Datis duobus quadratis, primo rectæ DE, secundo rectæ EA, & recta linea AF, reperiatur alia recta AH, ad quam data AF, eandem habeat rationem, quam quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA: & ex puncto H, concipiatur in ipsa parabola, alia recta linea HL ordinatim applicata dictæ diametro AB ad partes alterius ED; hæ duæ rectæ lineæ DGE, LH, erunt parallelæ per defin. 12. inter primas; igitur producta recta HL, vltra L, & Parabolam, secabitur ab recta AD in K, per propos. 11. Procli.

Demonstratio in Parabola, Quia per apparatum est, vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic recta AF ad lineam AH: si sumamus pro altitudine communi rectam AH, & pro basibus rectas AF, AH, erit per prop. 1. lib. 6. elem. vt AF ad AH, sic rectangulum sub AF, AH, ad quadratum rectæ AH: ergo per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic rectangulum sub FA, AH, ad quadratum rectæ AH. Cumque in triangulo DAE, sit recta KH parallela ostensa in apparatu, ipsi basi DE, erit per lemma 50. vt DE ad EA, sic KH ad HA; est verò per prop. 22 lib. 6. elem. vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic quadratum rectæ KH ad quadratum rectæ HA; rectanguloque sub AF, AH, sit æquale quadratum rectæ LH, per prop. 11. erit per prop. 7. lib. 5. elem. & 11. libri eiusdem 5. vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic quadratum rectæ LH ad quadratum rectæ HA. Quoniam igitur probauimus quadratum rectæ KH ad quadratum rectæ HA, & quadratum rectæ LH ad quadratum rectæ HA, habere rationem quam habet quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadrarum rectæ KH ad quadratum rectæ HA, sic quadratum rectæ LH ad quadratum rectæ HA: atque ita per prop. 9. lib. 5. elem. quadrata rectarum KH, & LH, erunt æqualia; ideoque per prop. 16. Procli, ipsæ rectæ KH, LH, erunt æquales, contra 8. ax. lib. 1. elem. Igitur positio vnde procedit, erit rationi contraria, videlicet inter rectam AC, & lineam curuam Paraboles, aliam rectam DA intercipi contingentem ipsam Parabolam in eodem puncto A, & non secantem ipsam sectionem Paraboles: ergò propositio præsens vera erit in sectione coni quæ Parabola dicitur.

Suppositio in Hyperbola, vel ellipsi, etiam circulo, cuius diameter AB, vertex A; & recta CA per verticem A ducta æquidistans alicui rectæ ordinatim applicatæ ad dictam diametrum AB; quæ recta AC per prop. 17. solùm continget in A vertice dictarum sectionum quamlibet, & nulla ratione secabit. Dico autem nullam aliam rectam lineam duci posse inter prædictam AC, & lineam sectionis curuam, per punctum A, quæ non secet ipsam sectionem.

Apparatus. Sit AF latus rectum sectionis; & ex puncto B extremo altero diametri datæ AB, per punctum F, transmittatur recta linea BF, producenda vltra F in hyperbola tantummodò. Iam verò esto si fieri possit recta DA cadat extra sectionem, contingens solùm in A vertice ipsam, & intercipiatur inter rectam CA, & lineam curuam sectionis, quam nulla ratione secet. Et ab aliquo puncto puta D, rectæ DA, diuerso ab A, concipiatur recta linea DE ordinatim applicata diametro AB; hæc recta DE, quandoquidem venit ab D puncto extra sectionem sito, & applicari debet in E puncto diametri AB sito intra sectionem, (producendo ipsam AB diamerrum hyperboles vltra A verticem, quæ progredi debet intra ipsam) secabit necessariò obuiam lineam curuam sectionis in puncto G. Præterea ex puncto E diametri AB, per propos. 31. lib. 1. elem. agatur recta linea EM parallela lateri recto FA, secabitur in M ab recta BF, per prop. 11. Procli, producta vel non producta. Insuper datis duabus rectis, prima AE, secunda DE, reperiatur per prop. 11. lib. 6. elem. tertia proportionalis EN, erit per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum rectæ DE æquale rectangulo sub AE, EN. Præterea ex recta EN sumatur per 3. prop. lib. 1. elem. recta EN æqualis inuentæ EN tertiæ proportionali; hæc recta EN sic determinata secabitur in M ab recta BF producta vel non producta, iuxta prop. 11. Procli. Insuper ex puncto A per N punctum rectæ EMN, traijciatur recta AN, quæ secabit in puncto X rectam BF productam vel non productam: & per propos. 31. lib. 1. elem. ex puncto X agatur recta linea XH parallela ipsi FA, quæ secabitur in H ab diametro AB, per prop. 11. Procli, eritque per prop. 30. lib. 1. elem. recta XH parallela ipsi EMN, quia sunt parallelæ positæ eidem FA. Denique ex puncto H diametri AB, concipiatur recta linea HL ordinatim applicata diametro AB in sectione; & producta hæc recta HL vltra punctum L lineæ curuæ sectionis, secabiturque in K ab recta DA extra sectionem, per propos. 11. Procli, & quia recta DA datur extra sectionem. Porrò per defin. 12. inter primas duæ rectæ KLH, DGE,

erunt

erunt parallelæ, quia ambæ sunt ordinatim applicatæ diametro AB sectionis.

Demonstratio in hyperbola, ellipsi, & circuli circumferentia. Quia ostendimus quadratum rectæ DE æquale esse rectangulo sub AE, EN, in apparatu; erit per prop. 14. lib. 6. elem. vt NE ad ED, sic DE ad EA; ideoque per coroll. propos. 20. lib. 6. elem. vt linea NE recta ad rectam EA, sic quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA: sed cùm sit recta HX, parallela ostensa basi EN, trianguli EAN, erit per lem. 50. vt NE ad EA, sic XH ad HA; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic recta XH ad rectam HA: sed etiam quia in triangulo DAE, recta HK est parallela ostensa basi DE, erit per cit. lem. 50. vt DE ad EA, sic KH ad HA: ergo per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic quadratum rectæ KH ad quadratum rectæ HA: ostendimus autem esse quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, vt est recta XH ad rectam HA; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt XH ad HA, sic quadratum rectæ KH ad quadratum rectæ HA. Igitur per lemma 9. recta KH, erit media proportionalis inter rectas XH, HA: quare per prop. 17. lib. 6. elem. erit quadratum rectæ KH æquale rectangulo sub AH, HX: est verò quadratum rectæ LH æquale rectangulo sub AH, HX, iuxta considerationem 39. ad definitiones secundas. Cùm igitur probauerimus quadratum rectæ KH, & quadratum rectæ LH, esse seorsim sumpta æqualia rectangulo eidem sub AH, HX, ipsa duo quadrata rectarum KH, LH, erunt æqualia, per 1. ax. lib. 1. elem. ideoque per prop. 16. Procli, ipsæ rectæ KH, LH, æquales, totum & pars, contra 8. ax. lib. 1. element. falsa igitur erit positio, vnde procedit hoc absurdum, contradicens secundæ parti huius propositionis in hyperbola, ellipsi, & circulo; ideoque vera assertio huius secundæ partis in his tribus coni sectionibus linearum curuarum: cùmque etiam illud idem ostenderimus in sectione Paraboles, tota propositio vniuersalis quoad hanc secundam partem demonstrata remanebit.

COROLL. NOSTRVM I.

In omni sectione coni, si recta linea contingat lineam curuam eius, & non secet; altera recta linea non intercipietur, inter illam & curuam lineam sectionis, eam contingens in eodem puncto, & non secans ipsam.

Possumus enim concipere diametrum sectionis incedentem per hoc punctum contactus; tunc verò hæc recta linea contingens, sectionem continget in vertice communi ipsi, & eius diametro; & possumus ab aliquo puncto lineæ curuæ sectionis concipere aliquam rectam lineam ordinatim applicatam diametro prædictæ; quæ recta vel erit parallela tangenti datæ rectæ ipsam sectionem; vel non parallela. Si primum, nulla recta alia linea ab eodem puncto contactus dati quod est vertex sectionis & diametri prædictæ, educi poterit contingens in eodem puncto verticis ipsam sectionem, inter eius lineam curuam, & rectam tangentem datam; idque per hanc propositionem. Si secundum, poterimus ab eodem puncto verticis & contactus dati, educere rectam lineam parallelam prædictæ rectæ ordinatim applicatam dictæ diametro; quæ vel congruet cum data tangente; vel erit diuersa: si eadem, habemus intentum iuxta hanc propositionem; si secundum, quandoquidem istæ duæ rectæ contingentes sectionem in eodem puncto verticis, data & introducta ab aduersario, ad se inuicem inclinantur, productæ vltra punctum verticis se mutuò intersecabunt in illo puncto, & in contrarias inuicem partes abibunt, per ax. 11. lib. 1. element. quare contra secundam partem huius propositionis inter rectam contingentem sectionem, parallelam ordinatim applicatæ rectæ ad diametrum sectionis, & eius curuam lineam poterit educi recta linea ab eodem puncto verticis seu contactus dati, alia contingens recta linea ipsam sectionem. hoc absurdum indicat non esse rectam positam ab puncto verticis diametri in sectione coni parallelam ordinatim applicatæ ad diametrum sectionis prædictam, diuersam ab data: igitur eadem erit, & vti iam ostendimus, conclusum erit propositum in hoc nostro corollario.

COROLL. NOSTRVM II.

Data vna recta linea contingente sectionem coni in vno tantùm puncto, & ipsam non secante, ita vt tota procedat extra sectionem, producta: nulla alia dari potest eandem sectionem eodem modo contingens, in eodem puncto contactus, educta supra datam rectam contingentem, & non inter ipsam datam & lineam curuam sectionis.

Esto si fieri possit detur huiusmodi recta linea: tunc inter illam & lineam curuam sectionis, alia interciperetur contingens in vno eodem puncto sectionem & non secans, inter contingentem introductam, & lineam curuam sectionis, contra coroll. nostrum præcedens 1. igitur huiusmodi recta alia linea dari non poterit.

COROLL. NOSTRVM III.

Data vna recta linea contingente sectionem coni, vti diximus in coroll. praced. 2. nulla alia introduci poterit, ipsam contingens sectionem modo prædicto, in eodem puncto.

Nam introducta caderet infra datam rectam interque ipsam datam, & lineam cur-

curuam sectionis; vel supra datam rectam. Non primum, nam esset contra coroll. nost. 1. secundum etiam est contra coroll. nost. 2. Neutrum igitur adstrui potest: relinquitur igitur demonstratum corollarium.

COROLL. NOSTRVM IV.

Propositio etiam vera est in circulo, tàm etiam corollaria: vti ostendimus in vniuersum, comprehendendo circulum.

PROPOSITIO XXXIII.

Si in Parabola sumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & ei quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis ponatur in directum, ab eius extremitate: Recta linea quæ à facto puncto ducitur ad illud quod sumptum fuerat, sectionem continget.

SVppositio. In Parabola, cuius diameter AB, sumptum sit aliquod punctum C diuersum ab A vertice; ex quo puncto C recta CD ordinatim sit applicata diametro AB; tùm in producta BA diametro vltra A verticem, posita sit recta AE, æqualis ipsi AD; (sic enim AE erit in directum ipsius BA, ab eius extremitate seu vertice A.) Dico rectam EC ducendam ab puncto E facto, per punctum C sumptum in linea curua Paraboles, ipsam verò contactu contingere parabolam; hoc est totam cadere extra ipsam etiam si producatur in infinitum.

Apparatus. Esto si fieri possit, recta EC producta vltra C, progrediatur intra Parabolam, vt recta ECF; & ex aliquo eius puncto F, intra locum Parabolæ sito, concipiatur recta linea BFG ordinatim applicata ad diametrum AB in puncto eius B; hæc recta BF producta vltra F, occurrat lineæ curuæ Paraboles in G, nam per prop. 8. produci seu extendi in infinitum potest Parabola: sed etiam ex puncto C assumpto, alia recta linea CD intelligatur ordinatim applicata diametro AB; hæ duæ rectæ CD, GFB, erunt parallelæ per defin. 12. inter primas. Et quia in triangulo rectilineo BEF, recta CD est parallela basi BF, erunt per lemma 50. duo triangula BEF, DEC, æquiangula.

Demonstratio. Quia per lemma 50. cit. est EB ad BF, vt ED ad DC; maiórque est EB quàm ED, per ax. 8. lib. 1. element. erit per prop. 14. lib. 5. elem. recta BF maior quàm DC; ideoque per lemma 49. quadratum rectæ BF, maius erit quadrato rectæ DC; & multò maius quadratum rectæ BG quàm quadratum rectæ DC, per 1. ax. lib. 1. elem. nam recta BG maior est quàm recta BF, per 8. ax. lib. cit. 1. elem. Quare per 8. prop. lib. 5. elem. quadratum rectæ BG maiorem habebit rationem ad quadratum rectæ CD, quàm quadratum rectæ BF ad idem quadratum rectæ DC. Quoniam verò probauimus esse EB ad BF, vt ED ad DC; erit iuxta coroll. prop. 4. lib. 5. elem. inuertendo, vt BF ad EB, sic DC ad ED; vnde per prop. 22. lib. 6. ele. erit vt quadratum rectæ BF ad quadratum rectæ EB, sicut quadratum rectæ DC ad quadratum rectæ ED; & per prop. 16. lib. 5. elem. erit vicissim, vt quadratum rectæ BF ad quadratum rectæ DC, sic quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ ED: Verùm per propos. 20. est quadratum rectæ BG ad quadratum rectæ DC, vt recta BA ad rectam DA; & quadratum rectæ BG ostensum est habere maiorem rationem ad quadratum rectæ DC, quàm quadratum rectæ BF ad quadratum rectæ DC: ergo per prop. 13. lib. 5. elem. recta linea BA ad rectam DA maiorem habebit rationem, quàm quadratum rectæ BF ad quadratum rectæ DC: Probauimus autem esse quadratum rectæ BE ad quadratum rectæ DE, vt quadratum rectæ BF ad quadratum rectæ DC; tùm quadratum rectæ BF ad quadratum rectæ DC, minorem habere rationem, quàm recta BA ad rectam DA: ergo per corollar. nost. 1. ad prop. 13. lib. 5. elem. quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ ED, minorem habebit rationem quàm recta BA ad rectam DA: maiorem ergo habebit rationem recta BA ad rectam DA, quàm quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ ED. Iam verò si sumamus pro communi altitudine rectam EA, & pro basibus, BA, DA, rectas; erit per 1. propos. lib. 6. element. vt BA ad DA, sic rectangulum sub BA, AE, ad rectangulum sub DA, AE; & per propos. 15. lib. 5. elemenr. & prop. 11. lib. eiusdem, erit vt BA ad DA, sic rectangulum quater comprehensum sub DA, AE, ad rectangulum quater sumptum sub DA, AE; sed ostendimus rectam BA ad rectam DA, maiorem habere rationem quàm quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ ED; ergo per prop. 13. lib. 5. elem. rectangulum quater sumptum sub BA, AE, ad rectangulum quater sumptum sub DA, AE, maiorem rationem habebit, quàm quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ DE: igitur per prop. 27. lib. 5. elem. vicissim erit rectangulum quater comprehensum sub BA, AE, ad quadratum rectæ EB, maiorem rationem habens, quàm rectangulum quater comprehensum sub DA, AE, ad quadratum rectæ DE. Cùm autem sit recta DE diuisa bifariàm in A ex datis,

datis, erit per coroll. noſt. ad prop. 10. lib. 6. elemen. quadratum totius rectæ DE quadruplum quadrati rectæ DA vel AE, ſeu rectanguli ſub DA, AE; ergo rectangulum quater comprehenſum ſub DA, AE, erit æquale quadrato rectæ DE. Cùm verò ſit recta BE ſecta inæqualiter in A, (nam ex datis recta AE æqualis eſt ipſi AD, ſi huic AD addatur recta DB, & nihil addatur ipſi AE, fient inæquales BA, AE.) erit per 4. prop. lib. 2. elem. quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum AE, EB, & rectangulo bis ſub AB, AE: verùm quia rectæ BA, AE, ſunt inæquales, duo rectangula ſub BA, AE, minorum quadratis rectarum BA, AE, per coroll. ad lemma præcedens propoſ. 40. lib. 10. elem. Quare rectangulum ſub BA, AE, quater comprehenſum, minus erit quadrato rectæ BE, per 1. ax. lib. 1. elem. Igitur habebit rectangulum quater comprehenſum ſub BA, AE, ad quadratum rectæ BE, rationem minoris inæqualitatis, & rectangulum quater comprehenſum ſub DA, AE, ad quadratum rectæ DE, rationem habebit æqualitatis, vti paulò ante probauimus. Ergo quia ratio æqualitatis maior eſt quàm ratio minoris inæqualitatis, rectangulum ſub DA, AE, quater comprehenſum, habebit ad quadratum rectæ DE maiorem rationem, quàm rectangulum ſub BA, AE, quater comprehenſum ad quadratum rectæ EB: contra conceſſa, & deducta ab poſitione aduerſarij contradicente aſſertioni huius propoſitionis; quæ ideo relinquitur ſtabilita in veritate, poſitioque contradicens condemnata falſitatis.

PROPOSITIO XXXIV.

Si in Hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, ſumatur aliquod punctum; ab eoque recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & quam proportionem habent lineæ interiectæ inter applicatam & terminos tranſuerſi lateris figuræ, eandem habeant inter ſe partes lateris tranſuerſi, ita vt quæ ſunt ad verticem partes ſibi ipſis reſpondeant: Recta linea coniungens punctum, quod in tranſuerſo latere ſumitur, & punctum quod eſt in ſectione, ſectionem ipſam continget.

Svppoſitio. In ellipſi, vel Hyperbola, vel circulo, cuius ſit diameter tranſuerſa, vel latus tranſuerſum AB; ſumptumque ſit C punctum in linea curua ſectionis diuerſum ab vertice A, ab quo concepta ſit recta linea CD ordinatim applicata ad dictam diametrum producendam: ſolùm vltra A, in hyperbola: tùm etiam pro hyperbola tantum, ſeorſim ponantur in directum rectæ Bd, D a, partes diametri BD, DA; hoc eſt ex recta linea infinita B initium habente, ſumantur per 3. prop. lib. 1. elem. duæ rectæ conſequentes Bd, Da, æquales partibus BD, DA, dictæ diametri; & per prop. 10. lib. 6. elem. ſecetur diameter data AB, in E, vt eſt ſecta tota Bda, in d, ita vt ſit vt Bd ad d a, ſic BE ad EA; (ita enim vt vult propoſitio, partes quæ ſunt ad verticem A, ſibi ipſis reſpondebunt.) At verò in ellipſi & circulo, ſumatur per propoſ. 3. lib. 1. elem. in recta DB, recta DG æqualis ipſi DA; datiſque tribus rectis BG prima, GD ſecunda, tertiaque BA, reperiatur per prop. 12. lib. 6. element. quarta proportionalis AE, cui per prop. 3. lib. 1. element. æqualis AE reſcindenda erit, de diametro BA producenda vltra verticem A: erit enim per prop. 18. lib. 5. element. componendo vt BD ad DG vel DA ipſi æqualem, ſic BE ad EA; atque ita ſumpſerimus lineas BD, DA, interiectas rectas, inter applicatam CD, & terminos B & A, tranſuerſi lateris AB, eandem proportionem habentes, quam partes BE, EA, tranſuerſi lateris prædicti; ita vt quæ ſunt ad verticem A partes, ſibi inuicem reſpondeant, vti dictum eſt in Hyperbola. Denique in omnibus dictis ſectionibus puncta E & C, nectantur recta linea EC; videlicet punctum E inuentum in tranſuerſo latere AB producto in ellipſi & circulo, vltra verticem A, & non producto in hyperbola, & punctum C aſſumptum in linea curua dictarum cuiuſuis ſectionum. Dico rectam hanc lineam CE, contingere ſectionem in puncto C aſſumpto, ita vt nulla ratione ipſam ſecet, aut penetret intra locum eius, ſed ſemper extra ipſam procedat producta in infinitum.

Apparatus. Eſto, ſi fieri poſſit recta EC producta vltra C, procedat intra locum ſectionis; atque ex aliquo puncto eius puta F intra locum ſectionis ſito, concipiatur recta linea FG ordinatim applicata diametro datæ AB, in puncto eius G; hæc recta FG producta vltra F, ſecabit lineam curuam ſectionis in H; circuli quidem & ellipſeos per ax. 28. lib. 1. element. hyperbolæ verò, quia eius linea curua extendi in infinitum poteſt, per coroll. noſt. 4. ad prop. 12. Porrò duæ rectæ lineæ CD, HFG, erunt parallelæ per defin. 12. inter primas, quia ordinatim applicatæ ad eandem diametrum AB. Inſuper per propoſ. 31. lib. 1. element. ex punctis A & B, ſeu verticibus diametri AB dati, agantur rectæ lineæ AL, BK, parallelæ

ipsi EC; quæ per propos. 30. lib. 1. elem. erunt inter se parallelæ; secabitur AL ab obuia CD in N, per prop. 11. Procli; & ipsa AL secabit etiam in L, rectam HG; & recta DC producta vltra C, extra sectionem, secabit in K, rectam BK, per eandem cit. prop. 11. Procli. Postremò ducantur rectæ BC, GC; ipsa GC intermediam rectam AL secabit in O, & producta aliam rectam BK, in M, per cit. prop. Procli 11. & recta BC producta si opus sit secabit rectam AL in X, per eandem cit. prop. Aduerte autem ex hoc apparatu & dictis in suppositione plurima resultare triangula æquiangula, ob parallelas rectas positas lateribus, vel parallelas bases obuersas verticibus communibus, seu angulis æqualibus contrapositis.

Demonstratio. Quandoquidem ex dictis in suppositione, est vt BD ad DA, sic BE ad EA; & per lem. 50. est vt BD ad DA, sic BK ad AN; & vt BE ad EA, sic BC ad CX; hoc est per cit. lem. & prop. 11. lib. 5. elem. sic BK ad XN; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt BK ad AN, sic BK ad NX: quare per propos. 9. lib. 5. elem. recta AN æqualis erit rectæ XN. Cùmque recta AX secta sit bifariàm in N, & non bifariàm in O; erit per coroll. nost. ad lem. præced. propos. 43. lib. 10. elem. rectangulum sub AN, NX. maius rectangulo sub AO, OX. Iam verò per propos. 45. lib. 1. elem. ad rectam AO, concipiatur rectangulum sub AO, XP, æquale rectangulo sub AN, NX; (quæ recta XP intelligenda erit, nam si apponeretur, figuram perturbaret;) erunt per 1. prop. lib. 6. elem. rectangulum factum, hoc est æquale ipsi rectangulo sub AN, NX, & rectangulum sub AO, OX, habentia eandem altitudinem AO, vt bases eorum OX, XP; vel se habebunt bases eorum OX, XP, vt ipsa dicta rectangula: sed factum rectangulum æquale ipsi AN, NX, maius est rectangulo sub AO, OX, vti probauimus; ergo basis XP maior erit base OX. Quia verò rectangula, factum sub AO, XP, & datum sub AN, NX, sunt æqualia, erit per prop. 14. lib. 6. elem. vt OA ad AN, sic NX ad XP; sed per prop. 8. lib. 5. elem. NX ad XP, minorem habet rationem quàm ad XO; ergo per coroll. nost. 1. ad prop. 13. lib. 5. elem. OA ad AN, minorem rationem habebit, quàm NX ad XO: quare NX ad XO, maiorem rationem habebit, quàm OA ad AN. Verùm per lem. 50. est vt KB ad BM, sic NX ad XO; ostensumque est NX ad XO maiorem rationem obtinere quàm OA ad AN; ergo per propos. 13. lib. 5. elem. BK ad BM, maiorem rationem habebit, quàm OA ad AN; seu quod idem est, OA ad AN, minorem habebit rationem quàm BK ad BM. Igitur faciendo per prop. 12. lib. 6. elem. vt OA ad AN, sic BK ad quartam reperiendam BY, quæ maior erit quàm BM, quod sic probatur. est BK ad BY, vt OA ad AN; OA ad AN minorem habet rationem quàm BK ad BM, ex probatis; ergo per coroll. nost. 1. ad prop. 13. lib. 5. elem. BK ad BY, minorem obtinebit rationem quàm BK ad BM: igitur per prop. 10. lib. 5. elem. cùm BK ad BM maiorem habeat rationem quàm ad BY; ipsa BM minor erit quàm BY. Quod si datis quatuor rectis BK, BY, OA, AN, hoc ordine, fiat rectangulum sub BK, AN, illud æquale esset rectangulo sub BY, OA, per prop. 16. lib. 6. element. Rectangulum autem sub BM, OA, minus est quàm rectangulum sub BY, OA, per lem. 49. ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum sub BM, OA, minus est quàm rectangulum sub BK, AN: quare per propos. 8. lib. 5. elem. rectangulum sub BK, AN, ad quadratum rectæ CE, maiorem habebit rationem, quàm rectangulum sub MB, AO, ad idem quadratum rectæ CE. Quoniam verò per lem. 50. est vt AN ad EC, sic AD ad DE; & vt EC ad KB, sic DE ad EB; & vt AN ad KB, sic AD ad DB: erit per lemma 10. vt quadratum rectæ AN ad rectangulum sub AN, KB, sic quadratum rectæ AD ad rectangulum sub AD, DB: Verùm etiam per lemma 50. EC ad AN, vt ED ad DA; ergo per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ EC ad quadratum rectæ AN, sic quadratum rectæ ED ad quadratum rectæ DA: Cùm igitur ostenderimus esse quadratum rectæ AN ad rectangulum sub AN, KB, vt quadratum rectæ AD ad rectangulum sub AD, DB: erit ex æqualitate per propos. 22. lib. 5. elem. quadratum rectæ EC ad rectangulum sub AN, KB, vt quadratum rectæ ED ad rectangulum sub AD, DB; & per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. inuertendo, vt rectangulum sub AN, KB, ad quadratum rectæ EC, sic rectangulum sub AD, DB ad quadratum rectæ ED. Simili discursu ex eisdem principijs probabimus esse rectangulum sub MB, AO, ad quadratum rectæ EC, vt rectangulum sub BG, GA, ad quadratum rectæ GE; sed rectangulum sub MB, AO, ad quadratum rectæ CE, ostensum est minorem habere rationem, quàm rectangulum sub KB, AN, ad quadratum rectæ EC: ergo per 1. coroll. nost. ad prop. 13. lib. 5. element. rectangulum sub BG, GA, ad quadratum rectæ GE minorem habebit rationem, quàm rectangulum sub KB, AN, ad quadratum rectæ EC. Cùm igitur demonstrauerimus esse rectangulum sub KB, AN, ad quadratum rectæ EC, vt rectangulum sub AD, DB, ad quadratum rectæ ED; & rectangulum sub KB, AN, ad quadratum rectæ EC habeat maiorem rationem, quàm rectangulum sub BG, GA, ad quadratum rectæ EG, vti ostendimus: erit per prop. 13. lib. 5. element. rectangulum sub AD, DB, ad quadratum rectæ ED, maiorem rationem obtinens, quàm rectangulum sub BG, GA, ad quadratum rectæ GE: Quare per prop. 17. lib. eiusdem 5.

elem.

elem. permutando, rectangulum sub AD, DB, ad rectangulum sub BG, GA, maiorem obtinebit rationem, quàm quadratum rectæ ED ad quadratum rectæ GE. Sed per prop. 21. vt rectangulum sub AD, DB, ad rectangulum sub BG, GA, sic est quadratum rectæ CD ad quadratum rectæ GH; & per lemma 50. est vt DE ad EG, sic CD ad FG; ergo per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EG, sic quadratum rectæ CD ad quadratum rectæ FG: cùm ergo probauerimus esse quadratum rectæ CD ad quadratum rectæ GH, vt rectangulum sub AD, DB, ad rectangulum sub BG, GA; & rectangulum sub AD, DB, habere maiorem rationem ad rectangulum sub BG, GA, quàm quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ GE, vel quàm quadratum rectæ CD ad quadratum rectæ FG; necessariò per prop. 13. lib. 5. element. quadratum rectæ CD ad quadratum rectæ GH, maiorem habebit rationem quàm quadratum rectæ CD ad quadratum rectæ FG. Quare per prop. 10. lib. 5. element. quadratum rectæ GH minus erit quàm quadratum rectæ FG; ergo recta GH minor erit quàm recta FG; totum minus parte, contra 8. axioma lib. 1. element. Absurdum hoc deriuatum ab positione aduersarij contradicente assertioni huius propositionis, indicat positionem illam esse falsam, videlicet rectam EC productam vltra C, progredi intra locum sectionis, & non extra sectionem, ipsam tangendo solùm in puncto C: ergo tanget sectionem, quomodo fuit propositum.

PROPOSITIO XXXV.

Si Parabolen recta linea contingat, conueniens cum diametro extra sectionem: quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscindet ex diametro ad verticem sectionis, lineam æqualem ei quæ inter ipsam & contingentem interijcitur: & in locum qui inter contingentem & sectionem interijcitur, alia recta linea non cadet.

Supposito. Recta linea AC contingens Parabolen in puncto vnico C, conueniat cum diametro GB ipsius Paraboles in puncto A, producta vltra G verticem, extra sectionem sito: sitque recta CB applicata ordinatim dictæ diametro, ex puncto C contactus deducta. Dico rectam lineam GB, seu portionem diametri datæ inter verticem A, & applicatam ordinatim rectam CB, esse æqualem rectæ AG, portionem diametri eiusdem productæ, inter eundem verticem A, & tangentem AC. Insuper dico nullam aliam rectam lineam cadere posse in locum qui inter contingentem rectam AC, & lineam curuam Paraboles continetur.

Apparatus ad primam partem demonstrandam. Si rectæ GA, GB, non sint æquales. Esto primùm GB maior quàm GA; & per prop. 3. lib. 1. elem. de maiore GB detrahatur recta GE æqualis minori GA; & ex puncto E, diametri, concipiatur recta linea EF ordinatim applicata ipsi diametro, quæ per defin. 12. inter primas, erit parallela alteri CB: Ductaque sit recta AF. Quod si recta GA sit maior quàm GB, oportebit de maiore GA rescindere rectam GD æqualem minori GB, & transmittere rectam DC.

Demonstratio primæ partis in primo casu. Quandoquidem GE, GA, sunt æquales, & ex puncto E diametri GB est ordinatim applicata recta linea EF ad ipsam diametrum GB, in Parabola; per prop. 33. recta AF, continget ipsam Parabolam, ita vt producta in infinitum vltra F, semper progrediatur extra Parabolam. Datur autem recta AC eodem modo contingere Parabolam in C; & ab eodem puncto prouenirent rectæ AF, AC, diuersæ, efficientes eum arcu FC dictæ Paraboles triangulum mixtilineum AFC: ergo producta recta AF vltra F, cùm non possit procedere intra locum Paraboles, sed extra, infringet extremum aliud trianguli, videlicet rectam AC, secabit in I, per ax. 28. lib. 1. element. Sed ex hoc sequitur absurdum, quod duæ rectæ lineæ AFI, AC, superficiem comprehendant, contra 14. ax. lib. 1. element. Hoc absurdum cùm rectè deductum sit ex positione quod recta GB sit maior quàm recta GA; illa positio non poterit adstrui. Sed neque secunda positio, seu secundus casus eiusdem primæ partis: Nam cùm GD, GB, sint æquales, & CB ordinatim applicata ad diametrum GB, erit recta DC contingens ipsam parabolen in puncto C vnico: Datur alia AC ipsammet Parabolam contingens in eodem puncto C, ita vt ambæ productæ sint extra Parabolam; ergo contra coroll. nost. 3. ad prop. 32. duæ rectæ lineæ in eodem puncto sectionem conicam contingent, quod est absurdum: ergo absurda erit positio secunda, seu secundi casus. Cùm igitur demonstrauerimus rectam GA non posse dici maiorem, vel minorem, respectu rectæ GB, erit æqualis GA ipsi GB. quod erat demonstrandum pro prima parte propositionis huius.

Apparatus ad secundam partem demonstrandam. Esto si fieri possit in locum situm inter rectam AC probatam contingere Parabolam datam in puncto C, & curuam eius lineam, cadat alia recta DC, quæ non secabit Parabolam in alio puncto inter G & C; eius enim

enim portio inter ista duo puncta non immediata, esset intra Parabolam, per propos. 10. & sic destrueretur datum. Tunc verò de recta GB maiore quàm sit DG, (nam per 8. ax. lib. 1. element. recta GA maior est quàm GD, ergo etiam per 1. ax. lib. 1. element. recta GB æqualis ipsi GA, vti in prima parte probatum est, maior est quàm DG.) rescindatur recta GH æqualis ipsi GD, per prop. 3. lib. 1. elem. & concipiatur recta HK ordinatim applicata diametro GB, in ipsa Parabola; ductaque sit recta DK.

Demonstratio secundæ partis. Per prop. 33. recta DK, Parabolen continget in K, eritque recta DK diuersa ab alia DC; quæ duæ ideò cum arcu KC Paraboles, triangulum finitum efficient mixtilineum DKC: Producta autem recta DK vltra K in infinitum, cùm non possit procedere intra locum Paraboles, sed extra, tandem secabit DC rectam in L, quandoquidem secare nequit arcum KC ipsius Paraboles: sic verò duæ rectæ lineæ DKL, DC, spatium claudent contra 14. ax. lib. 1. element. hoc absurdum cùm deducatur ex positione aduersarij contradicente huic secundæ parti propositionis, ipsa positio falsa erit, & secunda pars propositionis demonstrata relinquetur.

Sed caue ne dixeris in vtraque demonstratione puncta F, C, vel KC, esse in eadem recta linea AFC, vel DKC. Nam si hoc sit, portio FC, vel KC, dictarum rectarum contingentium Parabolam, & non secantium ipsam, seu non procedentium intra ipsam, tota esset intra ipsam Parabolam, per propos. 10. & sic quælibet dictarum rectarum procederet secundum suam assignatam partem, intra parabolam, & extra; quæ duo pugnant inuicem. Igitur effugium seu obiectio vana erit.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Secunda pars huius propositionis, non affirmat aliam rectam lineam cadere non posse attingentem Parabolam datam in eodem puncto contactus alterius data recta, si affirmaretur duci attingens hac alia recta, extra locum inter datam tangentem rectam, & lineam curuam Parabola, & ipsam Parabolam.

NAm solùm affirmat aliam rectam ab data contingente in vno puncto Parabolam, non cadere inter datam contingentem & cutuam lineam Paraboles: igitur non excludit aliam rectam duci posse extra locum prædictum, & extra Parabolam ipsam, ad idem punctum contactus prædicti. Sed per corollarium nostrum 3. ad propos. 32. huiusmodi recta non continget Parabolam vero contactu, licet attingat in eodem puncto contactus.

PROPOSITIO XXXVI.

Si Hyperbolen, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam, contingat quædam recta linea conueniens cum transuerso figuræ latere; & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: erit vt recta quæ interijcitur inter contingentem & terminum transuersi lateris, ad interiectam inter eandem & alterum lateris terminum; ita linea quæ est inter ordinatim applicatam & terminum lateris; ad eam quæ est inter eandem & alterum terminum; adeo vt continuatæ inter se sint, quæ sibi ipsis respondent: & in locum qui inter contingentem & sectionem coni interijcitur, altera recta linea non cadet.

SVppositio. Hyperboles, vel Ellipseos, vel circuli, sit diameter transuersa, seu latus transuersum AB: Recta verò linea CD contingens ipsam sectionem in C, conueniat cum diametro transuersa dicta in D, extra ipsam sectinnem, (nam recta CD tota est extra ipsam, excepto puncto contactus) tùm ex puncto C contactus, sit ordinatim applicata recta linea CE ad prædictam diametrum AB, producendam in hyperbola intra sectionem, vltra verticem eius A. Dico esse vt BE ad EA, sic BD ad DA; hoc est vt vult propositio, vt recta BE quæ sita est inter ordinatim applicatam rectam CE, & terminum B, lateris transuersi prædicti, ad EA rectam constitutam inter eandem CE ordinatim applicatam, & alterum A terminum eiusdem lateris transuersi AB; sic recta BD terminata extremo B dicti lateris transuersi & recta CD contingente, ad DA rectam sitam inter eandem contingentem CD, & alterum A extremum dicti lateris transuersi: sic etenim prædictæ rectæ, sunt continuatæ inter se, antecedentes consequentibus, quæ sibi ipsis respondent, vt indicat textus propositionis. Tum dico in locum qui situs est inter contingentem CD rectam, & sectionem seu sectionis lineam curuam, alteram rectam aliam non cadere, sed secare ipsam sectionem.

Apparatus pro prima assertione demon-

ſtranda. Si non ſit BD ad DA, ſicut BE ad EA: ſit ſi fieri poſſit, vt BD ad DA, ſic BG ad GA; & ex puncto G, tranſuerſi lateris, concipiatur recta linea GF ordinatim applicata ipſi tranſuerſo lateri AB; erunt per definit. 12. inter primas, duæ rectæ lineæ CE, FG, parallelæ, quia ordinatim applicatæ eidem diametro AB, ſectionis: Porrò vel punctum G erit ſupra E, verſus D, aut A, vel infra E punctum. Denique ducatur recta DF.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Recta linea DF, per prop. 34. continget ſectionem in F puncto, ita vt eam non ſecet, ſeu penetret intra locum ſectionis: datur autem recta alia DC, ſectionem eandem contingere in C, & non ſecare; ſuntque diuerſæ huiuſmodi rectæ lineæ DC, DF, ad diuerſa puncta ſectionis terminatæ, profluentes ab eodem externo puncto D; ſi enim in vnam confluerent rectam lineam, eius portio CF, eſſet intra ſectionem per prop. 10. & ſic dictæ rectæ, DC data, & introducta DF, contingentes ſectionem, procederent intra ipſam, quæ duo ſe mutuò deſtruunt; igitur diuerſæ erunt prædictæ rectæ lineæ DC, DF. Reſultabit verò triangulum DFC, mixtilineum, ex duabus rectis DF, DC, & arcu FC, ſectionis. Iam verò in caſu quo punctum G ſit ſupra E verſus A, cùm produci poſſit in infinitum recta DF vltra F, procedens ſemper extra ſectionem, incurret in rectam DC, eam ſecando in I, per ax. 28. lib. 1. elem. & ſic duæ rectæ lineæ DC, DF, ſpatium claudent contra 14. ax. lib. 1. elem. In caſu autem quo punctum G ſit infra E; recta linea DC producenda vltra C, & extra ſectionem, tandem incurret in rectam DF, ipſam ſecando in K, per cit. ax. 28. lib. 1. elem. & ſic duæ rectæ lineæ DC, DF, figuram comprehendent, contra cit. ax. 14. lib. eiuſdem 1. element. Hæc abſurda indicant non poſſe eſſe BG ad GA, ſicut BD ad DA; ſeu quod idem eſt non poſſe in tranſuerſo latere AB ſumi aliud punctum diuerſum ab E, ſupra vel infra illud, ita vt ſint partes lateris tranſuerſi continuatæ & ſumptæ modo prædicto in ſuppoſitione & propoſitione, ſicut BD ad DA. Erit igitur ex datis, vt BD ad DA, ſic BE ad EA, quod erat primo aſſertum.

Apparatus pro ſecunda parte demonſtranda. Incidat ſi fieri poſſit recta CH in locum qui ſitus eſt inter tangentem rectam DC in puncto C ipſam ſectionem, & ipſam ſectionem; quæ recta CH cùm non progrediatur per aream ſeu locum ſectionis, procedet intra triangulum DCA mixtilineum, atque ita per ax. 28. lib. 1. elem. rectam AD ſecabit in H. Iam verò in ellipſi & circulo, per prop. 10. lib. 6. elem. poſitis ſeorſim in directum BH, HA, ita vt per 3. prop. lib. 1. elem. ſit recta BH æqualis ipſi BH in ellipſi ſeorſim, & in circulo ſeorſim; & recta HA, æqualis eodem ipſi HA in ellipſi & circulo: diuidatur recta BA in G, ſicut eſt poſita recta BA diuiſa in H, ita vt ſit BG ad GA, ſicut eſt BH ad HA; & ex puncto G diametri AB, concipiatur recta linea GF ordinatim applicata diametro AB. At verò in Hyperbola, ſumatur aliquod punctum G in diametro tranſuerſa AB, ex ijs quæ ſunt intra ipſius locum. Et quandoquidem per propoſ. 31. recta BH maior eſt quàm HA, fiat vt maior BH ad HA minorem, ſic BG ad GA, quod fiet hac ratione: Circulus deſcribatur circa rectam BA diametrum tranſuerſam Hyperboles, centro I. Tùm ex puncto H concipiatur recta linea HK ordinatim applicata diametro AB circuli facti, & ex centro I puncto videlicet medio diametri AB, tranſmittatur recta linea IK, ad quam in extremo eius K, educatur recta linea KG perpendicularis ipſi IK ſemidiametro circuli, quæ per coroll. prop. 16. lib. 3. elem. continget circulum factum in K: & quia per conſid. 20. recta linea HK ordinatim applicata diametro eius AB, eſt ad angulos rectos ipſi diametro in H, erit in triangulo DHK rectangulo, angulus HIK, acutus per coroll. 1. ad propoſ. 17. lib. 1. elem. quare cùm in rectas BDA, KG, incidat recta DK, angulumque efficiat ad eaſdem partes verſus A, acutum in I, & rectum in K, conuenient inter ſe duæ rectæ DA, KG, in G, per ax. 13. lib. 1. elem. extra circulum; nam tota KG, extra circulum procedit per prop. 16. lib. 3. elem. igitur per 1. partem huius propoſitionis, erit vt BH ad HA, ſic BG ad GA. Inſuper præterea in omnibus datis ſectionibus ex puncto G concipiatur recta linea ordinatim applicata GF in hyperbola ad eius diametrum BAG tranſuerſam. Deinque recta HF ducatur in datis ſectionibus.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per prop. 34. recta HF continget ſectionem, eamque non ſecabit, productaque vltra F in infinitum ſemper procedet extra ſectionem. Igitur quandoquidem alia recta CH introducta eſt contingere dictam ſectionem in C, producta alterutra iſtarum CH, FH, vltra puncta C vel F, ſecabunt ſe inuicem, prout demonſtrauimus in duobus caſibus præcedentis primæ partis: atque ita duæ rectæ lineæ ſpatium claudent contra 14. ax. lib. 1. element. hoc abſurdum indicat impoſſibile eſſe, vt recta linea cadat inter lineam curuam ſectionis hyperboles vel ellipſeos, vel circuli, & rectam contingentem in vno puncto dictam curuam lineam ſectionis, terminata in eodem puncto contactus.

COROLL. NOSTRVM I.

Si linea recta ſectionem quamlibet conicam contingat in vno ſolùm puncto: nulla recta linea terminata eodem dicto puncto contactus fingi poterit ducta inter datam tangentem rectam, & curuam lineam ſectionis; ſeu quæ cadat in locum qui eſt inter datam tangen-

tangentem rectam, & ipsam sectionem contactam, contingens.

NAm in parabola hoc demonstratur in propos. 3. in reliquis verò sectionibus illud nunc est probatum; ergo vniuersale hoc corollarium verum erit, inductione facta per omnes sectiones conicas.

COROLL. NOSTRVM II.

Nulla recta linea contingens sectionem conicam, ita vt producta extra sectionem cadat, duo puncta sectionis contacta transfigere potest.

SI enim duo puncta sectionis contactæ transfigeret, portio dictæ rectæ lineæ contingentis sectionem, esset intra sectionem per prop. 10. Atque ita non tota caderet extra sectionem, quod est contra datum: ergo verum erit coroll. istud nostrum.

PROPOSITIO XXXVII.

Si hyperbolen, vel Ellipsin, vel circuli circumferentiam, recta linea contingens cum diametro conueniat; & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: Quæ intercipitur inter applicatam & centrum sectionis, vnà cum interiecta inter contingentem & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ quæ est ex centro sectionis; sed vnà cum ea quæ inter applicatam & contingentem interijcitur, continebit spatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ eandem proportionem habet, quam transuersum figuræ latus ad rectum.

SVppositio. In Hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, sit recta linea CD contingens, conueniensque in D cum diametro AB producta tantum in ellipsi & circuli circumferentia; & ab puncto C contactus concipiatur recta linea CE ordinatim applicata eidem diametro AB: sectionis autem sit centrum F. Dico primò rectangulum sub recta FE inter applicatam CE & F sectionis centrum, & sub recta FD inter contingentem CD, & F sectionis centrum, æquale esse quadrato rectæ FB vel FA, semidiametri. Dico secundò rectangulum sub eadem FE, & sub DE inter contingentem CD, & applicatam CE, esse ad quadratum rectæ CE ordinatim applicatæ, sicut transuersam AB latus ad rectum figuræ proprium.

Apparatus in hyperbola. Iunctarum linearum AE, EB, in vnam, sit iuxta lemma 16. semissis FE: & ambarum AD, DB, hoc est transuersi lateris seu diametri transuersæ AB, sit dimidia pars FB, iuxta definit. 3. inter secundas.

Demonstratio in Hyperbola. Per præcedentem propos. 36. Quia recta CD contingit sectionem in C; & conuenit ex datis cum diametro AB, extra sectionem in D; & ex puncto C contactus recta linea CE ordinatim applicata datur ad diametrum AB productam intra sectionem; erit vt AD ad DB, sic AE ad EB. Igitur per propos. 18. lib. 5. element. erit componendo, vt vtraque simul AD, DB, ad DB, sic vtraque simul AE, EB, ad EB; & per prop. 15. lib. 5. element. & prop. 11. eiusdem 5. libri erunt antecedentium dimidia ad ipsa consequentia, hoc est FB ad DB, vt FE ad EB; & per conuersionem rationis iuxta coroll. prop. 19. lib. 5. element. vt EF ad FB, sic FB ad FD: quare per propos. 17. lib. 6. rectangulum sub EF, FD, erit æquale quadrato rectæ FB, sicuti fuit primò assertum. Præterea quia ostendimus esse FE ad EB, sicut FB ad DB; (id est vt AF ad BD, per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. propter æqualitatem rectarum FB, FA.) erit per propos. 16. lib. 5. element. vicissim, vt FE ad AF, sic EB ad BD; & componendo iuxta coroll. nost. 1. prop. 18. lib. 5. element. vt AFE ad EF, sic DBE ad EB: Igitur per propos. 16. lib. 6. element. rectangulum sub AFE, EB, erit æquale rectangulo DBE, EF; vel quod idem est rectangulum sub AE, EB, æquale erit rectangulo sub FE, ED, per lemma 49. Verùm per prop. 21. & per coroll. prop. 4. lib. 5. element, est rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ CE, vt transuersum AB latus ad rectum; ergo per prop. 11. lib. 5. element. rectangulum sub FE, ED, erit ad quadratum rectæ CE, vt transuersum latus AB ad rectum proprium, sicut fuit secundo loco assertum. Demonstrauimus ergo propositum in Hyperbola.

Apparatus in ellipsi & circuli circumferentia. Vtriusque simul rectarum AD, DB, sit per lemma 16. semissis recta DF: & vtriusque simul rectarum FB, FA, hoc est diametri AB, semissis FB, iuxta definit. 1. inter secundas.

Demonstratio in ellipsi & circuli circumferentia. Per prop. præcedentem 36. quia recta CD, sectionem contingit in C, & ex puncto C contactus ordinatim est applicata recta linea CE ad diametrum AB, cum qua conuenit in D, recta CD tangens, erit vt AD

ad

ad DB, sic AE ad EB: ergo iuxta prop. 18. lib. 5. element. componendo, erit vt AD, DB simul ad DB, sic AB ad EB; & per eiusdem lib. 5. prop. 15. & 11. erit vt FD ad DB, sic FB ad EB, hoc est praecedentium antecedentium dimidia ad ipsa consequentia; ergo coroll. nost. 1. ad prop. 19. lib. 5. element. erit per conuersionem rationis, vt DF ad FB, sic BF ad FE. Quare per prop. 17. lib. 6. element. rectangulum sub DF, FE, erit æquale quadrato rectæ FB: quod erat primo loco propositum. Sed per 3. prop. lib. 2. element. rectangulum sub DF, FE, æquale est rectangulo sub DE, EF, & simul quadrato rectæ FE; & per prop. 6. lib. eiusdem 2. element. quadratum rectæ BF æquale est rectangulo sub AE, EB, & simul quadrato rectæ FE: igitur si ab æqualibus, rectangulis & quadratis simul (hoc est rectangulo sub DE, EF, & simul quadrato rectæ FE; & ab rectangulo sub AE, EB, & simul quadrato rectæ FE; quæ sunt ostensa æqualia æqualibus probatis, videlicet rectangulo sub DF, FE, & quadrato rectæ BF; vnde per ax. 1. lib. 1. element. ipsa sunt æqualia.) commune auferamus quadratum rectæ FE; remanebit rectangulum sub DE, EF, æquale rectangulo sub AE, EB, per 3. ax. lib. 1. element. Quare per 7. prop. lib. 5. elem. erit rectangulum sub DE, EF, ad quadratum rectæ CE, sicut rectangulum sub AE, EB, ad idem quadratum rectæ CE: sed vt rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ CE, sic est transuersum AB latus ad rectum, per prop. 21. & per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. ergo per prop. 11. lib. eiusdem. 5. elem. erit rectangulum sub DE, EF, ad quadratum rectæ CE, sicut transuersum AB latus ad rectum; sicuti fuit secundo loco assertum.

COROLLARIVM.

Ex Federico Commandino ad hanc propositionem.

Ex iis quæ demonstrata sunt, constat lineam rectam CD contingere sectionem; siue rectangulum sub DF, FE, sit æquale quadrato rectæ FB; siue rectangulum sub DE, EF, ad quadratum rectæ EC, eam proportionem habeat quam transuersum latus ad rectum.

SVppositio, & apparatus pro prima parte demonstranda. Sit Hyperbole, vel Ellipsis, vel circuli circumferentia, eiusque diameter AB, seu transuersum latus. Sumptumque sit punctum C in sectione, ex quo concepta sit recta linea CE ordinatim applicata transuerso lateri AB: sitque F sectionis centrum. Oportet autem in ellipsi & circulo, vt C punctum acceptum sit supra GFH diametrum coniugatam diametro datæ AB, versus B. Datisque tribus rectis hoc ordine EF, FB, BF, repetiatur per prop. 12. lib. 6. elem. quarta proportionalis FD; vel datis duabus hoc ordine EF, FB, reperiatur per 11. prop. lib. 6. element. tertia proportionalis FD, cui per prop. 3. lib. 1. element. in hyperbola erit sumenda æqualis FD, ex centro F versus B verticem; & in ellipsi & circulo, de producta diametro AB, vltra B, sumenda erit FD æqualis ipsi inuentæ FD. Porrò in hyperbola quia prima EF, maior est quàm secunda FB, erit tertia FD, minor quàm ipsa secunda FB, per coroll. nost. 3. ad prop. 19. lib. 6. element. vnde punctum D extremum ipsius FD, cadet inter F & B, extra hyperbolam, sub centro eius F: At verò in ellipsi & circulo, quia prima EF, est minor quàm secunda FB, erit tertia FD maior quàm secunda FB, seu quod idem est, erit secunda FB minor quàm tertia FD, per coroll. nost. 2. ad prop. 19. lib. 6. element. quare sumpta FD modo prædicto, de producta diametro AB vltra B, punctum eius extremum D, cadet extra sectionem. Denique puncta C, D, vniantur recta linea CD. Iam verò per propos. 17. lib. 6. element. rectangulum sub DF, FE, æquale est quadrato rectæ FB mediæ proportionalis inter prædictas DF, FE. Dico autem rectam CD contingere sectionem in C.

Demonstratio primæ partis. Quoniam in Hyperbola est vt EF ad FB, sic BF ad FD; erit per coroll. ad prop. 19. lib. 5. element. per conuersionem rationis vt FE ad EB, sic FB ad BD; & antecedentium dupla, ad eadem consequentia per lib. 5. element. propos. 15. & 11. Sed lineæ AE, EB, simul sumptæ, sunt ex apparatu ad demonstrationem propositionis huius 37. duplæ ipsius FE; & lineæ AD, DB, simul sumptæ, sunt duplæ ipsius FB: quare erit vt AEB ad EB, sic ADB ad DB: igitur diuidendo erit iuxta prop. 17. lib. 5. elem. vt AE ad EB, sic AD ad DB. Ergo per propos. 34. linea CD, sectionem continget in C. In ellipsi verò & circuli circumferentia; quia est DF ad FB, ita BF ad FE, per coroll. propos. 4. lib. 5. element. cùm sit ex dictis in suppositione & apparatu EF ad FB, vt FB ad FD: erit per conuersionem rationis iuxta coroll. propos. 19. lib. 5. element. vt FD ad DB, ita FB ad BE; & antecedentium dupla ad eadem consequentia, per lib. 5. element. prop. 15. & 11. sunt autem AD, BD, simul duplæ ipsius FD, & AE, EB, simul duplæ ipsius FB, ex dictis & citatis in apparatu ad hanc prop. 37. Igitur erit vt ADB ad DB, sic AEB ad EB: quare per prop. 17. lib. 5. elem. diuidendo erit vt AD ad DB, sic AE ad EB. Ergo per prop. 34. recta linea CD continget in C sectionem.

Suppositio, & apparatus pro secunda parte demonstranda. In semidiametro FB, hyperboles, sumatur punctum D infra centrum F; & in semidiametro FB producta vltra B, pro ellipsi & circulo, sumatur punctum D; ita vt rectangulum sub DE, EF, ad quadratum re-

ctæ CE, eam proportionem habeat, quam transuersum AB latus ad rectum. Dico lineam rectam CD contingere sectionem in C.

Demonstratio secundæ partis. Quia rectangulum sub DE, EF, est ad quadratum rectæ CE, vt transuersum AB latus ad rectum, per ipsum apparatum; & per prop. 21. tùm per coroll. prop. 4. lib. 5. element. est vt transuersum AB latus ad rectum, ita rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ CE; erit per propos. 11. lib. 5. ele. rectangulum sub DE, EF, ad quadratum rectæ CE, sicut rectangulum sub AE, EB, ad idem quadratum rectæ CE. Quare per prop. 9. lib. 5. element. rectangulum sub DE, EF, erit æquale rectangulo sub AE, EB. Igitur in hyperbola erit per propos. 14. lib. 6. element. vt AE ad EF, sic DE ad EB; & per prop. 17. lib. 5. element. diuidendo, & permutando per prop. 16. lib. eiusdem 5. erit vt AF, vel FB (æquales per 3. defin. inter secundas) ad BD, sic FE ad EB; & iuxta coroll. propos. 19. lib. 5. element. erit per conuersionem rationis, vt BF ad FD, ita EF ad FB. Vnde per prop. 16. lib. 6. element. rectangulum sub FD, EF, erit æquale rectangulo sub BF, FB, hoc est quadrato rectæ FB: Igitur per primam partem huius corollarij, in hyperbola, recta CD, sectionem continget in C, ex positione quod rectangulum sub DE, EF, ad quadratum rectæ CE, eam proportionem habeat, quam transuersum AB latus ad rectum. At verò in ellipsi & circuli circumferentia: Quandoquidem rectangulum sub AE, EB, æquale est ostensum rectangulo sub DE, EF; si his æqualibus addatur commune quadratum rectæ FE; erit per 2. axio. lib. 1. element. rectangulum sub AE, EB, simul cum quadrato rectæ FE, æquale rectangulo sub DE, EF, vnà cum quadrato rectæ FE: Et quia recta AB diuisa est bifariàm in F, per defin. 1. inter secundas, & non bifariàm in E, erit per prop. 5. lib. 2. element. rectangulo sub AE, EB, simul cum quadrato rectæ FE, æquale quadratum rectæ BF; & per 3. propos. lib. eiusdem 2. element. rectangulo sub DE, EF, vnà cum quadrato rectæ FE, æquale est rectangulum sub DE, EF: erit per 1. ax. lib. 1. element. rectangulum sub DE, EF, æquale quadrato rectæ FB: ac propterea per 1. partem huius coroll. recta linea CD sectionem continget in C. Igitur ex positione quod rectangulum sub DE, EF, ad quadratum rectæ EC, eam habeat proportionem quam transuersum AB latus ad rectum; recta linea CD contingere sectiones datas, demonstrata est.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Eisdem datis. Si quadratum recta FB, sit æquale rectangulo sub FD, FE; recta FB erit semidiameter sectionum propositarum.

Si enim non ita sit, erit semidiameter inæqualis rectæ FB: hoc autem posito, erit iuxta hanc propositionem, rectangulum sub FD, FE, æquale quadrato huius rectæ ab aduersario introductæ; sed ex datis prædictum rectangulum est æquale quadrato rectæ FB: ergo per ax. 1. lib. 1. element. quadratum rectæ FB, & quadratum rectæ introductæ erunt æqualia; & per prop. 1. Procli ipsæ rectæ FB, & introducta, æquales; concessæ inæquales: quod cùm sit absurdum, manifestum est hoc nostrum coroll.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si Hyperbolen, vel Ellipsim, vel Circuli circumferentiam, recta linea contingens cum secunda diametro conueniat; & ab tactu ad diametrum applicetur linea alteri diametro æquidistans: Quæ interijcitur inter applicatam & sectionis centrum, vnà cum interiecta inter contingentem & centrum sectionis, continebit rectangulum æquale quadrato quod fit ex dimidia secundæ diametri; sed vnà cum ea quæ inter applicatam & contingentem interijcitur, spatium continebit, quod ad quadratum applicatæ, eam proportionem habeat, quam figuræ latus rectum, ad transuersum.

Suppositio. Hyperboles, vel ellipseos, vel circuli circumferentiæ, sit diameter prima AGB, centrumque G; secunda verò diameter CGD: sectionemque è datis, recta linea EF contingens in E, conueniat in F cum dicta secunda diametro CGD; & ab E puncto dicto contactus sit applicata recta EH ad secundam diametrum CGD, æquidistans primæ diametro AGB. Dico primò rectangulum sub FG, GH, esse æquale quadrato rectæ CG æquale: (hoc est rectangulum sub recta FG sita inter FE contingentem, & G centrum sectionis; & sub recta GH sita inter rectam prædictam EH, & G centrum sectionis: esse æquale quadrato rectæ CG, semissis totius secundæ diametri CGD. Secundò assero rectangulum sub GH, HF, esse ad quadratum rectæ HE, sicut rectum latus ad transuersum figuræ: (hoc est rectangulum sub dicta GH, sita inter EH rectam prædictam applicatam,

&

& G centrum sectionis; & sub recta HF sita inter applicatam EH, & contingentem EF) esse ad quadratum rectæ EA applicatæ, sicut rectum figuræ latus ad transuersum.

Apparatus. Ex eodem puncto E contactus, concipiatur recta linea EM per prop. 31. lib. 1. element. ducta parallela diametro secundæ CGD, hæc per prop. 1 t. Procli secabitur in M ab diametro prima AGB. Porrò quia dantur diametri coniugatæ AGB, CGD; nam secunda diameter est respectu primæ datæ, coniugata illi ex dictis in defin. 4. inter secundas: per defin. 17. inter primas, prima AGB, secabit bifariàm rectam EM parallelam secundæ CGB, si producatur EM vltra M vsque ad circumferentiam sectionis, ideoque per defin. 12. inter primas, recta EM erit ordinatim applicata ipsi diametro primæ AGB: & ex eisdem principijs recta EH parallela primæ diametro AGB; erit ordinatim applicata diametro secundæ CGD. Sed & recta linea FE data tangens sectionem, quia secat rectam EH parallelam diametro primæ AGB, secabit etiam in L ipsam dictam diametrum primariam per propos. 11. Procli; & quidem extra sectionem; quia ipsa FEL tangens semper procedit producta, extra sectionem; & in hyperbola punctum L erit infra centrum G, per coroll. prop. 31.

Demonstratio primæ partis. Per propos. 37. præced. erit vt rectangulum sub GM, ML, ad quadratum rectæ EM, sic transuersum figuræ latus ad rectum; sed per defin. 4. inter secundas est vt AB transuersum latus ad CD secundam diametrum, sic CD secunda diameter ad latus rectum: ergo per coroll. prop. 20. lib. 6. elem. erit vt BA transuersum latus ad rectum, sic quadratum rectæ AB ad quadratum rectæ CD: tùm etiam per cit. prop. 20. coroll. nostrum, & prop. 15. & 11. lib. 5. elem. erit vt BA transuersum latus ad rectum, sic dictorum quadratorum quadrantes, videlicet quadratum rectæ GA ad quadratum rectæ GC. Quare conferendo ante dicta, & per propos. 11. lib. 5. element. erit vt rectangulum sub GM, ML, ad quadratum rectæ EM, ita quadratum rectæ GA ad quadratum rectæ GC: sed per prop. 23. lib. 6. elem. rectangulum sub GM, ML, ad quadratum rectæ EM, habet rationem compositam ex ratione GM ad EM, vel ad GH æqualem, (per 7. prop. lib. 5. elem. ob parallelogrammi HM latera opposita æqualia per prop. 34. lib. 1. elem.) & ex ratione ML ad EM; vnde inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. proportio quadrati rectæ EM ad rectangulum sub GM, ML, componetur ex ratione EM ad GM, id est HG ad GM, & ex ratione EM ad ML, id est per lem. 50. & per prop. 11. lib. 5. elem. ex ratione FG ad GL. Igitur per lemma 7. quadratum rectæ GC ad quadratum rectæ AG, compositam habebit rationem ex ratione HG ad GM, & ex ratione FG ad GL. Igitur per ipsum lemma 7. erit vt rectangulum sub FG, GH, ad rectangulum sub MG, GL, ita quadratum rectæ CG ad quadratum rectæ GA; & inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt rectangulum sub MG, GL, ad rectangulum sub FG, GH, sic quadratum rectæ GA ad quadratum rectæ GC; sed per propos. 37. præced. rectangulum sub MG, GL, æquale est quadrato rectæ GA; ergo per propos. 14. lib. 5. element. rectangulum sub FG, GH, æquale erit quadrato rectæ CG. quod erat primò propositum.

Demonstratio secundæ partis. Insuper ex prop. 11. est vt rectum latus ad transuersum, ita quadratum rectæ EM, ad rectangulum sub GM, ML; & per prop. 23. lib. 6. elem. quadratum rectæ EM obtinet rationem compositam ex ratione EM ad MG, (hoc est per 7. propos. lib. 5. element. & per prop. 34. lib. 1. element. ex ratione GH ad HG.) & ex ratione EM ad ML, (hoc est per lem. 50. & per propos. 11. lib. 5. element. ex ratione FG ad GL; id est etiam ex dictis, & cit. principijs, ex ratione FH ad HE;) quæ proportio eadem est quam habet rectangulum sub FG, HG, ad quadratum rectæ HE, & rectum latus ad transuersum; per lem. 7. & citata principia, erit rectangulum sub FH, HG, ad quadratum rectæ HG, sicut rectum latus ad transuersum, quemadmodum fuit secundo loco propositum.

COROLLARIVM I.

His positis, ostendendum est: vt est linea FD ad lineam CF; hoc est linea, quæ inter tangentem & terminum secundæ diametri, ad partes applicatæ interijcitur, ad eam quæ inter tangentem, & alterum terminum secundæ diametri; ita esse lineam DH HC; hoc est lineam, quæ est inter alterum terminum secundæ diametri, & applicatam, ad eam quæ inter alterum terminum & applicatam.

Demonstratio. Quia enim probatum est rectangulum sub FG, GH, esse æquale quadrato rectæ GC, (hoc est per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulo sub CG, GD, lineæ enim CG, GD, sunt æquales per defin. 1. inter secundas:) quare per prop. 14. lib. 6. element. erit vt FG, ad GD, sic CG ad GH: igitur per conuersionem rationis iuxta coroll. prop. 19. lib. 5. element. erit vt GF ad FD, ita GC ad CH; & iuxta propos. 15. & 11. lib. 5. elem. antecedentium dupla, ad eadem modo dicta consequentia: quæ antecedentium dupla sic manifestamus; est per lemma 17. ipsius FG, dupla vtraque simul CF, FD, quia CG est æqualis ipsi CD; & ipsius GC, dupla CD, quare vtraque simul CF, FD, est ad FD, sicut DG, GC, vtraque simul ad CH; igitur per propos. 17. lib. 5. element. diuidendo, erit vt CF ad FD, sic HC ad DH & per coroll.

 pro-

propoſ. 4. lib. 5. element. vt FD ad CF, ſic DH ad HC.

COROLLARIVM II.

Ex iam dictis manifeſtum eſt lineam EF contingere ſectionem; ſiue rectangulum ſub FG, GH, æquale ſit quadrato GC; ſiue rectangulum ſub FH, HG, ad quadratum HE, habeat rationem quam diximus: conuerſo enim modo illud facilè oſtendetur.

SVppoſita enim conſtructione præcedente ad demonſtrationem huius propoſitionis 38. Dico rectam EF contingere ſectionem; ſiue rectangulum &c.

Nam ſi recta ELF non contingat ſectionem in E, ſed alia quæpiam recta ENK in hyperbola; vel in ellipſi & circulo KEN, ſecans tranſuerſum latus AB in N, & ſecundam diametrum CD in K. Tunc eodem artificio probabitur rectangulum ſub KG, GH, eſſe æquale quadrato CG, quo oſtendimus rectangulum ſub FG, GH, eſſe æquale eidem quadrato rectæ CG, & nunc in dato huius corollarij ſupponitur hoc ſecundum: igitur per ax. 1. lib. 1. elem. rectangulum ſub KG, GH, erit æquale rectangulo ſub FG, GH. Iſta verò duo rectangula cùm obtineant eandem altitudinem GH, inter ſe erunt vt baſes KG, FG, per 1. prop. lib. 6. elem. quæ cùm ſint inæquales, (nam recta KEN, vel ENK diuerſa ab FEL, vel ELF, angulum conſtituent in E puncto contactus, in quo ſe mutuò interſecabunt, & in partes diuerſas abibunt, per 11. ax. lib. 1. element. quare ſecabit diametrum ſecundam CD productam in alio puncto diuerſo ab F, hoc eſt in K, & ſic inæquales erunt baſes KG, FG.) igitur per lemma 49. dicta duo rectangula probata æqualia, erunt inæqualia: igitur poſitio contradicens primæ parti huius corollarij erit falſa, & ipſa aſſertio vera.

Ad probationem ſecundæ partis, ſic diſcurrimus. Manifeſtum eſt ex ſecunda parte huius propoſitionis, eſſe rectangulum ſub FH, HG, ad quadratum rectæ HE, quam rectum latus ad tranſuerſum: ergo per corollar. prop. 4. lib. 5. element. inuertendo erit, vt quadratum rectæ HE, ad rectangulum ſub FH, HG, ſic tranſuerſum latus ad rectum: Verùm per prop. 23. lib. 6. elem. proportio quadrati rectæ HE ad rectangulum ſub FH, HG, eſt compoſita ex ratione EH ad FH, & ex ratione HG ad EH; id eſt per lem. 50. & prop. 11. lib. 5. elem. ex ratione LM ad ME, & ex ratione GM ad ME; quæ quidem eſt eadem quam habet rectangulum ſub GM, ML ad quadratum rectæ ME, per cit. prop. 23. lib. 6. elem. ergo per prop. 11. lib. 5. elem. rectangulum ſub GM, ML, ad quadratum ME, eſt vt tranſuerſum latus ad rectum: igitur per coroll. prop. præcedentis, videlicet prop. 37. recta linea ELF ſectionem continget.

PROPOSITIO XXXIX.

Si Hyperbolen, vel Ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens, cum diametro conueniat; & ab tactu ad diametrum recta linea ordinatim applicetur. Sumpta quauis linea ex duabus; quarum altera interijcitur inter applicatam & ſectionis cẽtrum; altera inter applicatam & contingentem: habebit ad eam applicata proportionem compoſitam ex proportione quam habet altera rectarum dictarum linearum ad applicatam, & ex proportione quam rectum figuræ latus habet ad tranſuerſum.

SVppoſitio. Hyperboles, vel Ellipſeos, vel circuli circumferentiæ, ſit diameter tranſuerſa AB, centrumque F: lineaque recta CD, ſectionem contingat in puncto vnico C, conueniens cum diametro AB in D: ſitque ex puncto C contactus recta linea ordinatim applicata CE ad prædictam diametrum AB. Dico rectam CE ordinatim applicatam, habere ad alterutram rectarum linearum ſeu portionum diametri, FE, ED, (quarum prima ſita eſt inter centrum F, & applicatam CE; altera verò ED conſtituta eſt inter applicatam CE, & contingentem CD.) proportionem compoſitam ex ratione quam habet altera non aſſumpta dictarum linearum FE, ED, ad applicatam CE; & ex ratione quam habet rectum figuræ latus ad tranſuerſum.

Apparatus. Per lemma 11. Rectangulo ſub FE, ED, reperiatur aliud rectangulum æquale illi, quod habeat rectam EC datam applicatam, & aliam G reperiendam.

Demonſtratio. Quandoquidem rectangulum ſub CE, G, æquale eſt per apparatum, rectangulo ſub FE, ED; erit per propoſ. 7. lib. 5. element. rectangulum ſub CE, G, ad quadratum rectæ CE, ſicut rectangulum ſub FE, ED, ad idem quadratum rectæ CE: Sed per prop. 37. rectangulum ſub FE, ED, eſt ad quadratum rectæ CE, ſicut tranſuerſum latus ad rectum: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum ſub CE, G, ad quadratum rectæ CE, ſicut tranſuerſum latus ad rectum. Quod ſi ſumamus baſes, rectas G, CE, & altitudinem communem, rectam CE; erit per prop. 1. lib. 6. elem. rectangulum ſub G, CE, ad

qua-

quadratum rectæ CE, ſicut recta G ad rectam CE; oſtendimus autem rectangulum ſub CE, G, eſſe ad quadratum rectæ CE, ſicut tranſuerſum latus ad rectum: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit recta G ad rectam CE, ſicut tranſuerſum latus ad rectum: & iuxta corollar. propoſ. 4. lib. 5. element. erit inuertendo, recta CE ad rectam G, ſicut rectum latus ad tranſuerſum. Et quia per apparatum, eſt rectangulum ſub FE, ED, æquale rectangulo ſub G, CE; erit per prop. 14. lib. 6. element. FE ad CE, ſicut G ad ED. Rurſus pro baſibus ſumamus rectas CE, ED, & pro altitudine communi rectam G; erit per 1. prop. lib. 6. element. recta CE ad ED, ſicut rectangulum ſub CE, G, ad rectangulum ſub ED, G: habet verò per propoſ. 23. lib. 6. elem. rectangulum ſub CE, G, ad rectangulum ſub ED, G, rationem compoſitam ex ratione CE ad G, & ex ratione G ad ED: ergo per lemma 7. ratio CE rectæ ad rectam ED, componetur ex ratione CE ad G, & ex ratione G ad ED. Probauimus autem eſſe CE ad G, ſicut latus rectum ad tranſuerſum; & oſtendimus eſſe G ad ED, ſicut FE ad CE: igitur per lemma 7. Recta CE ad rectam ED, obtinebit rationem ex ratione FE ad CE, & ex ratione lateris recti ad tranſuerſum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

Si Hyperbolen, vel Ellipſim, vel circuli circumferentiam, recta linea contingens, cum ſecunda diametro conueniat; & ab tactu ad eandem diametrum recta linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans. Sumpta autem qualibet linea ex duabus, quarum vna inter applicatam & ſectionis centrum interijcitur; altera inter applicatam & contingentem: habebit ad ipſam applicata proportionem compoſitam ex proportione quam habet tranſuerſum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum ad applicatam.

Svppoſitio. Hyperboles, vel Ellipſeos, vel circuli circumferentiæ ſit tranſuerſum latus, ſeu tranſuerſa diameter BFC, centrumque F; ſecunda verò diameter DFE; rectaque linea HAL in ellipſi & circulo, & in hyperbola ALH, contingens in A ſectionem, & conueniens cum ſecunda diametro DFE in puncto H; hæc eadem recta HA, conueniet cum diametro tranſuerſa CB, in L, in ellipſi quidē per prop. 25. in circulo autem per coroll. noſt. ad illam prop. 25. At verò in hyperbola per prop. 24. ſed infra centrum F, per coroll. prop. 31. Denique per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto A contactus prædicto ducatur recta linea AG parallela diametro alteri AB; quæ per prop. 11. Procli, ſecabitur in G ab ſecunda diametro DE, quæ eſt alteri coniugata ex dictis in defin. 4. inter ſecundas: quare per def. 17. & 12. inter primas, recta linea AG erit ordinatim applicata diametro ſecundæ DE. Dico rectam AG applicatam ſecundæ diametro DE, habere ad alteram linearum HG, GF, (quarum prima ſita eſt inter tangentem HA, & applicatam AG, ſita eſt; altera inter applicatam AG, & F centrum ſectionis.) rationem compoſitam ex ratione quam habet tranſuerſum CB latus ad rectum, & ex ratione quam habet altera dictarum linearum HG, GF, non aſſumpta, ad ipſam AG applicatam: hoc eſt verbi gratiâ eſſe AG ad GF, ſicut HG ad GA, & latus rectum ad tranſuerſum.

Apparatus. Per lemma 11. fiat rectangulum ſub GA data recta, & alia K reperienda, æquale rectangulo ſub HG, GF.

Demonſtratio. Quandoquidem per propoſ. 38. vt eſt rectum latus ad tranſuerſum, ſic eſt rectangulum ſub HG, GF, ad quadratum rectæ GA; & per apparatum dicto rectangulo ſub HG, GF, æquale eſt rectangulum ſub GA, K: erit per propoſ. 7. lib. 5. element. & propoſ. 11. libri eiuſdem, rectangulum ſub GA, K, ad quadratum rectæ GA, ſicut rectum latus ad tranſuerſum. Quod ſi ſumamus pro baſibus rectas GA, K, & pro communi altitudine rectam GA; erit per propoſit. libri 1. element. vt GA recta, ad rectam K, ſic ad rectangulum GA, K, quadratum rectæ GA: igitur per propoſ. 11. lib. 5. element. erit recta GA ad rectam K, ſicut rectum latus ad tranſuerſum. Cumque per propoſit. præcedent. 39. AG ad GF habeat rationem compoſitam ex ratione AG ad K, (hoc eſt recti lateris ad tranſuerſum, nam oſtendimus modò eſſe GA ad K ſicut rectum latus ad tranſuerſum,) & ex ratione HG ad GA. Atque ita demonſtrauerimus propoſitum.

PROPOSITIO XLI.

Si in Hyperbola, vel Ellipſi, vel circuli circumferentia, recta linea ordinatim applicetur ad diametrum; & ab applicata & ea quæ

ex centro parallelogramma æquiangula describantur; habeat autem applicata ad reliquum parallelogrammi latus proportionem compositam ex proportione quam habet ea quæ ex centro ad reliquum latus, & ex proportione quam rectum figuræ latus habet ad transuersum: Parallelogrammum factum à linea quę inter centrum & applicatam interijcitur, simile parallelogrammo quod fit ab ea quæ ex centro; in Hyperbola quidem maius est quàm parallelogrammum ab applicata, parallelogrammo ab ea quæ ex centro; in Ellipsi verò, & circuli circumferentia, vnà cum parallelogrammo quod fit ab applicata, æquale est parallelogrammo ab ea quæ ex centro.

SVppositio. Hyperboles, vel ellipseos, vel circuli circumferentiæ, sit diameter transuersa seu latus rectum AB, centrumque E; rectaque linea C D ordinatim applicata ad diametrum AB: & ab lineis EA, CD, prima quæ ex centro E, altera verò prædicta applicata, descripta sint æquiangula parallelogramma AF, DG; & habeat DC ad CG, rationem compositam ex ratione AE ad EF, & ex ratione recti lateris figuræ ad transuersum. Dico in Hyperbola parallelogrammum prædictum quod fit ex ED recta inter applicatam CD & centrum E, simile parallelogrammo AF quod fit ex linea EA ex centro E; maius esse quàm parallelogrammum prædictum ab applicata CD, parallelogrammo prædicto, quod fit ab recta EA ex centro; vel quod idem est, Dico parallelogrammum ex ED prædicta recta ex centro, simile ipsi AF, esse æquale parallelogtammis prædictis simul sumptis, AF, DG. In ellipsi verò & circuli circumferentia, Dico parallelogrammum quod fit ex ED, simile ipsi parallelogrammo AF, vnà cum parallelogrammo DG, esse æquale parallelogrammo AF.

Apparatus. Fiat per propos.12. lib.6. vt rectum figuræ latus ad transuersum, ita DC ad CH: & per propos.3. lib.1. element. de latere CG producto vel non producto, parallelogrammi DG, secetur recta CH æqualis inuentæ ipsi CH.

Demonstratio. Quia est per apparatum DC ad CH, vt rectum figuræ latus ad transuersum; & per 1. propos. lib. 6. element. sumpta communi altitudine rectæ CD, est vt CD ad CH, sic quadratum rectæ DC ad rectangulum sub DC, CH; & per prop.21. est vt rectum figuræ latus ad transuersum, ita quadratum rectæ DC ad rectangulum sub BD, DA: erit per prop. 11. lib. 5. element. quadratum rectæ DC ad rectangulum sub DC, CH, sicut quadratum rectæ DC ad rectangulum sub BD, DA: quare per prop. 9. lib. 5. elemen. rectangulum DC, CH, æquale erit rectangulo sub BD, DA. Insuper quia ex datis, recta DC ad rectam CG, habet rationem compositam ex ratione AE ad EF, & ex ratione recti lateris ad transuersum, hoc est per apparatum ex ratione DC ad CH; cumque rectangulorum sub CD, CG, & sub CD, CH, vnum ad aliud per propos.23. lib.6. element. habeat compositam rationem ex DC ad CH, & ex ratione DC ad CG; erit etiam ratio prædicta rectangulorum per lem.7. proportio composita ex AE ad EF, & ex DC ad CH, eadem quæ componitur ex ratione DC ad CH, & ex ratione DC ad CG. Quare si ex his proportionibus eisdem, seu æqualibus, auferatur communis ratio CD ad CH, relinquetur per 3. axioma lib.1. element. ratio AE ad EF, eadem quæ DC ad CG: est verò per 1. propos. lib. 6. element. assumendo pro communi altitudine CD, vt HC ad CG, sic rectangulum sub HC, CD, ad rectangulum sub GC, CD; & sumendo pro communi altitudine AE, erit etiam vt AE ad EF, sic quadratum rectę AE ad rectangulum sub AE, EF; quare per propos.11. lib.5. element. erit vt rectangulum sub HC, CD, ad rectangulum sub GC, CD, ita quadratum rectæ AE, ad rectangulum sub AE, EF; ostendimus autem rectangulum sub HC, CD, esse æquale rectangulo sub BD, DA: ergo per propos.7. & 11. lib. 5. element. erit vt rectangulum sub BD, DA, ad rectangulum sub GC, CD, sic quadratum rectæ AE ad rectangulum sub AE, EF: vnde per prop.16. lib. 5. element. permutando erit vt rectangulum sub BD, DA, ad quadratum rectæ AE, sic rectangulum sub GC, CD, ad rectangulum sub AE, EF. Sed per lemma 12. est vt rectangulum sub GC, CD, ad rectangulum sub AE, EF, sic parallelogrammum DG ad parallelogrammum AF, (sunt enim parallelogramma æquiangula, & proportionem habent per prop.23. lib.6. element. compositam ex ratione laterum GC ad AE, & CD ad EF.) Igitur per prop.11. lib.5. element. vt rectangulum sub BD, DA, ad quadratum rectæ AE, sic parallelogrammum DG ad parallelogrammum AF. Iam verò his positis, Sic concludemus propositum in Hyperbola: componendo igitur vltima secundum prop. 18. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub BD, DA, simul cum quadrato rectæ AE, ad quadratum rectæ AE,

sic

ſic parallelogramma GD, AF, ſimul ſumpta, ad parallelogrammum AF. Et quia per prop. 6. lib. 2. element. rectangulum ſub BD, DA, ſimul cum quadrato rectæ AE, æquale eſt quadrato rectæ ED; erit per prop. 7. lib. 5. elem. rectangulum ſub BD, DA, ſimul cum quadrato rectæ AE, ad quadratum rectæ AE, ſicut quadratum rectæ ED, ad quadratum rectæ AE: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ ED ad quadratum rectæ AE, ſic parallelogramma GD, AF, ſimul ſumpta, ad parallelogrammum AF. Præterea per prop. 20. lib. 6. element. quadratum rectæ ED, ad quadratum rectæ AE, eſt in duplicata ratione lateris ED ad latus AE; tùm etiam parallelogrammum ſupra ED, ad parallelogrammum ſimile ſimiliterque poſitum ipſi AF, eſt in duplicata ratione lateris ED ad latus proprium parallelogrammum AF: ergo erit per prop. 11. lib. 5. element. quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ AE, vt parallelogrammum ſupra ED ad parallelogrammum AF ſimile illi quod ſupra ED. Quare per cit. prop. 11. lib. 5. element. erit vt parallelogramma DG, AF, ſimul ſumpta, ad parallelogrammum AF; ſic parallelogrammum ſupra DE ad parallelogrammum AF ſimile ſimiliterque poſitum ſupra illi quod ſupra DE. Igitur per prop. 9. lib. 5. element. parallelogrammum ſupra DE ſimile ipſi AF, æquale eſt parallelogrammis GD, AF. quod erat demonſtrandum in Hyperbola: hoc eſt, parallelogrammum ex DE vel ſupra ED rectam ſitam inter centrum E hyperboles, & rectam CD applicatam, ſimile parallelogrammo AF facto ſupra rectam EA deductam è centro E, maius eſt quàm parallelogrammum DG factum ſupra applicatam CD, parallelogrammo AF facto ſupra rectam EA deductam ex centro E.

Demonſtratio in ellipſi & circuli circumferentia. Quia diameter AB ſecta eſt bifariàm in centro E per defin. 1. inter ſecundas, & non bifariàm in D ex neceſſitate conſequenti; erit per propoſ. 5. lib. 2. element. rectangulum ſub BD, DA, ſimul cum quadrato rectæ ED, æquale quadrato rectæ AE; & oſtendimus in vniuerſum, antequam deſcenderemus ad particularem demonſtrationem propoſiti in Hyperbola, eſſe rectangulum ſub BD, DA, ad quadratum rectæ AE, ſicut parallelogrammum DG ad parallelogrammum AF; erit per 16. propoſ. lib. 5. element. permutando, vt parallelogrammum ſub BD, DA, ad parallelogrammum DG, ſic quadratum rectæ AE ad parallelogrammum AF. Quia verò per prop. 19. lib. 5. element. eſt vt totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum vt totum ad totum; erit vt totum quadratum rectæ AE ad totum parallelogrammum AF, ſic ablatum rectangulum ſub AD, DB, ad ablatum parallelogrammum DG; erit reliquum ad reliquum, ſicut totum ad totum: quare ſi ab quadrato rectæ AE dematur rectangulum ſub AD, DB, relinquetur quadratum rectæ DE; & ſi ab parallelogrammo AF auferatur parallelogrammum DG, remanebit parallelogrammum ex DE ſimile ipſi AF per prop. 24. lib. 6. element. quare per coroll. prop. 19. lib. 5. element. per conuerſionem rationis erit vt quadratum rectæ DE ad exceſſum quo parallelogrammum AF ſuperat parallelogrammum DG, ſic quadratum rectæ AE ad parallelogrammum AF; ſed vt quadratum rectæ AE ad parallelogrammum AF, ſic quadratum rectæ DE ad parallelogrammum ex DE ſimile ipſi AF, per cit. prop. 19. lib. 5. element. igitur per propoſ. 11. lib. 5. element. erit vt quadratum rectæ DE ad exceſſum quo parallelogrammum AF excedit ipſum DG parallelogrammum, ſic quadratum rectæ DE ad parallelogrammum ex DE ſimile ipſi AF. Ergo per 9 propoſ. lib. 5. element. parallelogrammum ſupra ED ſimile ipſi AF, erit æquale exceſſui quo parallelogrammum AF ſuperat parallelogrammum DG. Neceſſariò igitur conſequitur quod parallelogrammum ſupra DE ſimile ipſi AF, vnà cum parallelogrammo DG, eſſe æquale parallelogrammo AF: hoc eſt parallelogrammum factum ſupra rectam DE inter centrum E & applicatam CD, minus eſſe quàm parallelogrammum AF ſupra rectam EA deductam ex centro E, parallelogrammo DG facto ſupra rectam CD applicatam.

Eutocius rectè admonet, hanc propoſitionem in Hyperbola caſus non admittere; ſed ſolùm in ellipſi, & addo etiam in circulo. Alius enim caſus erit, quando recta linea ordinatim applicata diametro, non attingit centrum; & alius quando attingit. Demonſtratio allata primum caſum ſpectauit, proferenda alterum.

Sit igitur ſuppoſitio in ellipſi & circulo, quando recta linea ordinatim applicata diametro, non attingit centrum. Ellipſeos vel circuli diameter ſit AB, centrumque D, rectaque linea CD ordinatim applicata ipſum D centrum attingat. A lineis autem CD applicata, & DA vel BA, quæ ex centro D, æquiangula parallelogramma ſint deſcripta DG, AF, æquiangula, ita tamen vt DC ad CG propoſitionem habeat compoſitam ex ratione quam habet AD ad DF, & ex ratione quam habet latus rectum figuræ ad tranſuerſum. Dico parallelogrammum AF vel DF, eſſe æquale parallelogrammo DG.

Demonſtratio. Quia in demonſtratione alterius caſus, probauimus eſſe vt quadratæ rectæ AD ad parallelogrammum AF, ſic rectangulum ſub AD, DB, ad parallelogrammum DG; erit per prop. 16. lib. 5. elem. permutando, vt quadratum rectæ AD ad rectangulum ſub AD, DB, ſic parallelogrammum AF ad parallelogrammum DG: verùm qua-

dratum rectæ AD æquale est parallelogrammo sub AD, DB, æqualibus: ergo coroll. nostrum 2. ad propos. 54. lib. 5. element. parallelogrammum AF, erit æquale parallelogrammo DG, simile ipsi AF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLII.

Si Parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat; & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: sumpto autem quouis puncto in sectione applicentur ad diametrum duæ lineæ, altera quidem contingenti æquidistans, altera verò æquidistans ei quæ à tactu ordinatim applicata est. Triangulum quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo contento linea à tactu applicata, & ea quæ interijcitur inter æquidistantem & verticem sectionis.

SVppositio, & apparatus. Parabolam diametrum ABH obtinentem, recta linea AC contingat in puncto C vnico, conueniatque cum diametro prædicta in A extra sectionem, quandoquidem recta linea CD contingens data procedit in infinitum extra sectionem: Tùm ab puncto C contactus recta linea CH sit ordinatim applicata ad diametrum ABH. Præterea ab quocumque alio puncto, puta D in Parabolæ linea curua diuerso ab C, ducantur per prop. 31. lib. 1. elem. duæ aliæ rectæ lineæ, vna DF, æquidistans ipsi CH ordinatim applicatæ, alia verò DE parallela contingenti CA: secabuntur ab diametro ABH, per propos. 15. Procli; ideoque applicatæ erunt ab puncto D sumpto ad diametrum ABH: & erit recta DF ordinatim etiam applicata dictæ diametro, vt alia data CD, per defin. 50. & 51. inter primas. Insuper ex puncto C, per cit. prop. 35. lib. 1. element. agatur alia recta CG parallela diametro ABH; & alia BG ex puncto B verticis parallela ipsi CH vel DF; occurrent sibi in G, duæ rectæ BG, CG, per prop. 15. Procli; & producta FD vltra D, occurret in I, rectæ CG, per eandem prop. 11. Procli: & resultabunt parallelogramma HG, GF; & triangula CAH, DEF, æquiangula & similia per lemma 50. ob parallela latera CA, DE, vel CH, DF. Dico autem triangulum CAH esse æquale parallelogrammo HG, sub linea CH ab tactu C applicata diametro ABE, & sub HB; tùm triangulum DEF, æquale esse parallelogrammo FG, sub linea BG æquali ipsi CH ab tactu C applicata. (nam per propos. 34. lib. 1. elem. æqualia sunt latera BG, CH,) & sub recta FB, quæ interijcitur inter B verticem, & rectam FD parallelam ordinatim applicatæ CH.

Eutocius aduertit hanc propositionem vndecim casus admittere pro diuerso situ puncti D assumpti supra vel infra C punctum contactus; tùm si sumatur punctum D in altera parte Paraboles contraria in qua C, respectu diuisæ Paraboles ab diametro ABH. His omnibus applicanda erit prudenter sequens

Demonstratio. Quandoquidem recta AC datur contingere Parabolam in C, & datur ordinatim applicata recta CH ab tactu C, ad diametrum ABH; erit per prop. 35. recta AB æqualis ipsi BH: ideoque recta AH dupla ipsius AB, vel BH; & per coroll. nostr. 2 ad propos. 42. lib. 1. element. parallelogrammum HG, & triangulum CAH, erunt æqualia. Et quia est per prop. 20. vt quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ DF, ita recta HB ad rectam FB; & per prop. 20. lib. 6. elem. quadratum rectæ CH ad quadratum DF rectæ, habet rationem duplicatam lateris CH ad DF latus; & per prop. 19. lib. eiusdem 6. element. triangulum CAH ad triangulum DEF simile ex apparatu, etiam obtinet rationem duplicatam eiusdem lateris CH ad latus DF: erit per prop. 11. lib. 5. element. vt quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ DF, sic triangulum CAH ad triangulum DEF; sed per prop. 1. lib. 6. element. est vt HB ad BF, ita parallelogrammum HG ad parallelogrammum FG: igitur quia demonstrauimus quod quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ DF se haberet vt recta HB ad rectam BF, & quod quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ DF, eadem ratione conferretur, qua triangulum CAH ad triangulum DEF, & quod parallelogrammum HG ad parallelogrammum FG se haberet vt recta HB ad rectam BF: erit per prop. 11. lib. 5. elem. triangulum CAH ad triangulum DEF, sicut parallelogrammum HG ad parallelogrammum FG; sed ostendimus parallelogrammum HG esse æquale triangulo CAH, ergo per prop. 14. lib. 5. element. triangulum DEF erit æquale parallelogrammo FG. Quod erat ostendendum.

COROLL. NOSTRVM I.

Si Parabolen recta linea contingat conueniens cum diametro eius; & ab tactu recta linea ordinatim applicetur dictæ diametro: Triangulum resultans erit æquale parallelogrammo sub dicta recta ordinatim applicata, & sub portione dictæ diametri inter applica-

plicatam & verticem diametri datæ secundæ prædictæ.

SVppositio. Parabolen recta linea contingat CA in puncto C, conueniens in A cum diametro ABH ipsius paraboles; & ab tactu C sit ordinatim recta linea CH applicata dictæ diametro. Dico triangulum CAH, esse æquale parallelogrammo sub CH ordinatim applicata, & sub HB portione dictæ diametri inter dictam CH ordinatim applicatam & verticem B dictæ diametri.

Hoc iam asserueramus tanquam primum, illudque demonstrauimus ante probationem propositi secundi à nobis in hac propositione.

COROLL. NOSTRVM II.

Ex prima figuratione & demonstratis; constat parallelogrammum CF esse æquale EACHFDE sexilatero.

CVm enim per præcedens corollarium, triangulum CAH sit æquale parallelogrammo GH, & per hanc propositionem sit triangulum DEF æquale parallelogrammo GF; si ex illis primis æqualibus demantur secunda æqualia, triangulum ab triangulo, parallelogrammum ab parallelogrammo; relinquentur æqualia, videlicet assignatum sexilaterum & parallelogrammum CF, per 3. ax. lib. 1. element. Quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM III.

Ex prima figuratione & demonstratis; constat ICD triangulum mixtilineum esse æquale trapezio mixtilineo AEDC.

NAm per corollar. præcedens 2. sexilaterum EACHFDE est æquale parallelogrammo CF; ex quibus si dematur commune trapezium mixtilineum DCHF, relinquetur triangulum ICD mixtilineum æquale trapezio AEDC mixtilineo, per 3. axioma lib. 1. elem.

COROLL. NOSTRVM IV.

Ex prima figuratione & demonstratis; constat, (recta FDI secante in K rectam AC,) Triangulum KIC esse æquale trapezio AEDK.

SI enim ex æqualibus demonstratis in corollar. 3. triangulo mixtilineo ICD, & trapezio mixtilineo AEDC, dematur commune triangulum mixtilineum KCD; relinquetur per 3. axioma libri 1. element. triangulum KIC æquale trapezio AEDC.

COROLL. NOSTRVM V.

Ex prima figuratione & demonstratis; constat Triangulum ABC mixtilineum esse æquale triangulo mixtilineo GBC.

PEr 1. coroll. constat triangulum CAH esse æquale parallelogrammo GH: ergo si ex his æqualibus dematur commune triangulum mixtilineum BHC, relinquentur æqualia triangula mixtilinea ABC, GBC, per ax. 3. lib. 1. elem.

COROLL. NOSTRVM VI.

Ex prima figuratione & demonstratis; secante recta BG rectam AC in L, erit triangulum ABL æquale triangulo CGL.

EX duobus triangulis mixtilineis ABC, GBC, ostensis æqualibus in corollario præcedente quinto, si dematur triangulum mixtilineum CLB commune; remanebit per 3. ax. lib. 1. elem. triangulum ABL æquale triangulo CGL.

Aliter idem demonstrabitur. Quia recta GB incidit in parallela latera CG, ABH, parallelogrammi GH, erunt per propos. 29. lib. 1. element. anguli alterni CGB, ABG, æquales: & quia etiam recta AC incidit in eadem dicta latera CG, ABH, erunt etiam anguli alterni BAC, GCL æquales: sunt autem per propos. 35. ostensæ rectæ AB, BH æquales, & per prop. 34. lib. 1. element. latera GC, BH, in parallelogrammo GH, sunt æqualia; ergo per 1. axioma lib. 1. element. rectæ AB, GC, erunt æquales. Igitur cùm in triangulis ABL, CGL, sint supra duo latera æqualia AB, GC, insistentes anguli relatiuè æquales prædicti: erunt ipsa duo triangula ABL, CGL, per coroll. nost. ad propos. 26. lib. 1. element.

COROLL. NOSTRVM VII.

Ex prima figuratione & demonstratis; secante recta BG, rectam AC in L, erit recta BG bifariàm secta in L, & recta AC bifariàm in eodem puncto L.

CVm enim in demonstratione secunda corollarij præcedentis 6. probauerimus in triangulis ABL, CGL, latera AB, CG, esse æqualia, & angulum BAL æqualem angulo GCL, & angulum ABL æqualem angulo CGL; erunt per prop. 26. lib. 1. elemen. rectæ GL, BL æquales, tùm etiam rectæ AL, CL: quare duæ rectæ lineæ BG, AC, se mutuò bifariàm secabunt in L.

PROPO-

PROPOSITIO XLIII.

Si Hyperbolen, vel Ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens conueniat cum diametro: & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur; huic verò æquidistans ducatur per verticem sectionis, quæ cum linea per tactum & centrum ducta conueniat: & sumpto aliquo puncto in sectione, ab eo ad diametrum duæ rectæ lineæ ducantur, vna quidem contingenti æquidistans, altera verò æquidistans ei quæ à tactu applicata est. Triangulum ab ipsis factum in Hyperbola minus erit quàm triangulum quod abscindit linea per centrum & tactum ducta, triangulo ab ea quæ ex centro, simili abscisso: In ellipsi verò & circuli circumferentia, vnà cum triangulo abscisso ad centrum, æquale erit triangulo simili abscisso, quod ab ea quæ ex centro describitur.

SVppositio, & apparatus. Hyperbolæ, vel Ellipseos, vel circuli circumferentiæ sit diameter AB, centrumque C; & recta ED, sectionem in E contingens, conueniensque in D cum diametro AB; & recta CE ex centro C ducta ad E punctum contactus; ex quo puncto E ductaque sit recta E F ordinatim applicata ipsi diametro AB: sumpturnque sit punctum aliquod G in ipsa linea sectionis curua diuersum ab E, ex quo puncto G ducta sit recta GH æquidistans rectæ contingenti ED, quæ per 11. prop. Procli conueniet in H cum diametro AB; & altera recta GKM etiam ordinatim applicata dictæ diametro AB, quæque per defin. 12. inter primas erit parallela prædictæ EF ordinatim applicatæ ad eandem diametrum AB, occurretque in M rectæ CE per cit. 11. Procli. Tùm etiam ex vertice B per prop. 31. lib. 1. element. agatur recta linea BL parallela cuilibet rectarum FE, KGM, occurrensin L rectæ CE per cit. prop. 11. Procli: tunc per propos. 30. lib. 1. element. rectæ tres BL, GKM, FE, erunt inter se parallelæ. Resultabunt in Hyperbola & ellipsi & circuli circumferentia, triangula similia duo DEF, GHK, tùm etiam alia tria similia CLB, CMK, CEF, ob parallela latera duo, & angulos æquales per prop. 29. lib. 1. elem. siue alternos, siue internos & oppositos ad easdem partes, & latera proportionalia per prop. 4. lib. 6. elem. Assero autem in omnibus illis sectionibus; quod differentia trianguli KMC, ab triangulo CLB, sit triangulum CKH: (hæc assertio præmittitur à nobis probanda, vt probemus intentum Apollonij in hac propositione.) Præterea dico quod in hyperbola triangulum GKH (factum ab recta GH ducta ab puncto G assumpto parallela tangenti ED, & recta GK parallela ipsi EF ordinatim applicatæ ducta ab eodem G puncto ad diametrum AB, & ab portione KH dictæ diametri,) sit minus quàm triangulum KMC (factum ab producta GK vel KG, & portione KC datæ diametri AB, & recta CM ex centro) triangulo CLB simili ipsi KMC quod abscindit recta EC ex centro. In ellipsi autem & circuli circumferentia dico quod prædicta duo triangula GKH, KMC, sint simul sumpta, sint æqualia dicto triangulo CLB.

Federicus Commandinus notauit hanc propositionem pati casus nonaginta sex, pro diuerso situ puncti G assumpti in sectione, supra vel infra punctum E contactus, ad partes ipsius E respectu diametri AB diuidentis sectionem, vel ad partes alias. Nos figurationes dabimus ac demonstrationes in casibus quibus punctum G erit supra E, ad partes eius, vel ad alias partes: ex quibus demonstrationibus reliquorum casuum probationes colligi poterunt ab experto geometra.

Demonstratio. Quia recta ED sectionem contingit in E, & conuenit in D cum diametro AB, ordinatimque applicata est recta EF ex puncto E contactus ad diametrum AB; per prop. 39. recta EF ad rectam FD, rationem compositam ex ratione rectæ CF ad rectam EF, & ex ratione recti lateris ad transuersum figuræ; sed per lem. 50. est vt EF ad FD, sic GK ad KH; & vt CF ad EF, sic CB ad BL: quare per lemma 7. habebit GK ad KH, rationem compositam ex ratione CB ad BL, & ex ratione lateris recti figuræ ad transuersum: Igitur ex demonstratione propos. 41. in parallelogrammis duplis dictorum triangulorum, iuxta propos. 41. lib. 1. elem. demonstratum etiam erit in triangulis assignatis, per pros. 15. lib. 5. elem. hoc est quod triangulum CKM differat ab triangulo BCL, triangulo GHK; & quod in Hyperbola triangulum GKH sit minus quàm triangulum KMC, triangulo CLB; & quod in ellipsi & circuli circumferentia, duo simul triangula GKH, KMC, sint æqualia triangulo CLB. quæ omnia erant demonstranda.

COROL.

COROLL. NOSTRVM I.

Differentia triangulorum CLB, CMK, est trapezium LBKM.

MInore enim triangulo sublato, de maiore includente minus, cùm sint similia, & communem angulum in C obtineant; manifestum est trapezium assignatum LBKM, esse differentiam.

COROLL. NOSTRVM II.

Triangulum GHK, est aequale trapezio LBKM.

EX demonstratione allata ad hanc prop. 43. constat triangulum GHK esse differentiam inter duo triangula CLB, CMK; & per corollarium praecedens ostendimus trapezium LBKM esse differentiam inter eadem duo praedicta triangula CLB, CMK: igitur triangulum GHK erit aequale trapezio LBKM. nam sublato eodem ab eodem, relinquetur differentia eadem, seu aequalis si pluries fiat detractio.

COROLL. NOSTRVM III.

In primis figurationibus, secante recta BL, rectam GH, in I; erit triangulum HBI aequale LIGM quadrilatero

PEr coroll. 2. praeced. est triangulum GHK aequale trapezio LBKM: ergo si ex his aequalibus dematur commune trapezium IBKG; remanebit per 3. axioma libri 1. element. triangulum HBI aequale quadrilatero LIGM.

COROLL. NOSTRVM IV.

In Hyperbola quadrilaterum LIGM corollarij praecedentis 3. est parallelogrammum; in ellipsi verò & circuli circumferentia est trapezium.

CVm in hyperbola ex apparatu sint parallelae LIB, MGK; tùm etiam rectae ED, GH, ex datis; manifestum est quod quadrilaterum LIGM sit in hyperbola parallelogammum. Quia verò in ellipsi & circulo ex datis recta CEL secat rectam ED, secabit etiam per prop. 11. Procli rectam GH, parallelam ipsi ED ex datis, per prop. 11. Procli: ergo licet per apparatum duo latera LI, MG, dicti quadrilateri sint parallela, quia alia duo LM, IG, non sunt parallela, eò quòd se mutuò intersecare debere sint ostensa: erit ex natura trapezij, dictum quadrilaterum LIGM, trapezium in ellipsi & circulo

COROLL. NOSTRVM V.

In circulo Triangulum ECD est aequale triangulo BCL; eruntque aequilatera & aequiangula.

REcta ED est perpendicularis rectae CE, per prop. 18. lib. 3. element: quia datur ED Tangens circulum: & per considerationem 38. ad secundas defin. recta EF ordinatim applicata diametro AB circuli, est perpendicularis ipsi diametro AB; positaque est per apparatum ad demonstrationem huius propos. 43. recta BL parallela ipsi EF, ergo per prop. 29. lib. 1. elemen. angulus LBC erit rectus, vt alter EFB: Cùm igitur duo triangula BCL, CED, habeant angulum communem in C in vtraque figuratione, & angulos rectos in E & B ostensos, aequales per ax. 13. lib. 1. element. & latera CE, CB, aequalia vtpote semidiametros eiusdem circuli; erunt per coroll. propos. 26. lib. 1. element. dicta duo triangula ECB, BCL, in circulo aequalia, & reliquum angulum reliquo angulo aequalem habebunt, & latera alia respectiuè aequalia per cit. prop. 26. lib. 1. elem. ideoque aequilatera & aequiangula.

PROPOSITIO XLIV.

Si vnam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; à tactu verò ad diametrum linea ordinatim applicetur; atque huic aequidistans per verticem alterius sectionis ducatur, ita vt conueniat cum linea per tactum & centrum ducta: sumpto autem puncto quouis in sectione, applicentur ad diametrum duae lineae, quarum altera contingenti aequidistet, altera aequidistet ei quae à tactu ordinatim applicata est. Triangulum ab ipsis factum, minus est quàm triangulum quod abscindit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili abscisso ab ea quae ex centro.

SVppositio, & apparatus prima pars. Oppositarum sectionum AF, BE, sit diameter AB, centrumque C; & ab aliquo puncto F eorum quae sunt in linea curua sectionis AF sit recta linea FG contingens in F sectionem AF,

AF, conuenienſque cum diametro AB in G infra centrum C iuxta coroll. prop. 31. & ab F puncto contactus ſit ordinatim applicata recta linea FO ad diametrum AB: Tùm huic FO rectæ lineæ ordinatim applicatæ, ab vertice B alterius ſectionis BE ſit educta recta linea BL parallela ipſi FO, ad partes contrarias, conueniatque in L cum recta ducenda per F punctum contactus & centrum C, quæ attinget in E oppoſitam ſectionem per prop. 29. ſumatur verò punctum quoduis N in ſectione BE diuerſum ab B vertice, & ex puncto N ductæ ſint duæ rectæ lineæ NK, NHM, quarum prima NK ſit parallela contingenti FG, ſecanſque in K diametrum AB, per prop. 11. Procli; altera verò NHM ſit parallela ipſi FO ordinatim applicatæ diametro AB, hæc recta NHM, erit etiam ordinatim applicata diametro AB per defin. 12. inter ſecundas, ſecabitque productam rectam FCL in M, per prop. 11. Procli, & obuiam tranſuerſam diametrum ABK in puncto H. Dico triangulum NHK factum ab dictis rectis in ſectione BE, eſſe minus quàm triangulum CMH, triangulo CBL ſimili ipſi CHM abſciſſo ab recta FCM ex centro C emiſſa: quod verò triangulum CHM ſit ſimile triangulo CBL, patet per lem. 50. ob rectas parallelas inter ſe NHM, BL, per prop. 30. lib. 1. elem. quia ſunt parallelæ poſitæ ipſi FO.

Apparatus ſecunda pars. Concipiatur recta ED contingens in E ſectionem BE, conuenienſque in D cum diametro AB inter centrum C & verticem B, per coroll. prop. 31. Inſuper ex puncto E concipiatur altera recta linea EX ordinatim applicata diametro AB, quæ recta NX erit parallela ipſi FO per def. 12. inter primas, & per propoſ. 30. lib. 1. element. etiam æquidiſtans erit rectis NHM, BL.

Demonſtratio. Quandoquidem AF eſt Hyperbole per defin. 10. vel 24. inter ſecundas, quam contingit in F puncto vnico recta FG, & applicata eſt recta FO ordinatim diametro eius AB, ex datis; erit per prop. 37. rectangulum ſub OC, CG, æquale quadrato rectæ CA: ſimili modo quia per definitiones citatas etiam eſt Hyperbola BE, eamque contingit per apparatum recta ED in E puncto, & recta EX ordinatim applicata eſt diametro eius AB; erit per propoſ. cit. 37. rectangulum ſub XC, CD, æquale quadrato rectæ CB: quadrata autem rectarum CA, CB, ſunt æqualia per prop. 16. Procli, ob rectas æquales CA, CB, per defin. 3. inter ſecundas; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum ſub OC, CG, erit æquale rectangulo ſub XC, CD. ſed per prop. 30. recta CF eſt æqualis rectæ CE; ergo cùm duæ rectæ lineæ XO, FE, ſe mutuò ſecent in C, & rectæ XE, FO, ſint parallelæ per apparatum; erit per lem. 50. vt FC ad CO, ſic EC ad CX; prima FC oſtenſa eſt æqualis tertiæ CE, ergo per prop. 14. lib. 5. element. ſecunda CO, erit æqualis quartæ CX. Quod ſi in rectangulis ſub OC, CG, & ſub XC, CD, conſiderentur æquales altitudines oſtenſæ rectarum CO, CX; erunt per 1. prop. lib. 6. elem. baſes eorum æquales CG, CD. Cùm igitur in triangulis FCG, ECD, circa æquales angulos in C per prop. 15. lib. 1. elem. habeamus latera FC, CG, æqualia reſpectiuè lateribus EC, CD; erunt etiam eorum baſes FG, ED, æquales, per prop. 4. lib. 1. elem. & per eandem angulus CGF æqualis angulo CDE; qui cùm ſint alterni, erunt per prop. 27. lib. 1. element. parallelæ rectæ lineæ FG, ED. Iam verò quia ex datis recta NK eſt æquidiſtans ipſi FG, & oſtenſa eſt recta ED parallela ipſi FG, erunt per prop. 30. lib. 1. element. rectæ NK, ED parallelæ; oſtendimus autem eſſe parallelas rectas NH, BL, ordinatimque applicatam diametro AB rectam NH, & eſſe parallelas rectas HM, BL. Ergo quia in Hyperbola BE diametrum habente AB, centrumque C, eſt recta linea ED contingens ipſam in E, conuenienſque cum diametro in D; & ex puncto E contactus ordinatim eſt applicata recta EX cui eſt parallela recta BL in vertice eius B; ſumptumque eſt in linea curua ſectionis punctum N, & ab eo ordinatim applicata recta linea NH diametro AB; & ab eodem puncto N eſt ducta æquidiſtans recta NK ipſi contingenti ED: erit per propoſ. 43. triangulum NHK minus quàm triangulum HMC, triangulo CBL, quomodo fuit propoſitum.

COROLL. NOSTRVM I.

Si vnam oppoſitarum ſectionum recta linea contingat, & ab tactu ducatur recta linea per centrum vſque ad alteram ſectionem: Quæ ex hoc puncto huius alterius ſectionis ducitur parallela rectæ prædictæ datæ contingenti, ſectionem ipſam continget in illo eodem puncto.

SVppoſitio. Vnam FA ſectionum oppoſitarum FA, EB, recta linea in F puncto contingat FG, occurrens in G puncto diametri AB infra centrum C iuxta coroll. prop. 31. rectaque FC tranſmiſſa per centrum C & producta occurrat in E ſectioni BE iuxta prop. 29. ductaque ſit recta ED parallela ipſi FG contingenti in F alteram ſectionem FA, quæ recta ED ſecabitur in D ab diametro AB per propoſ. 11. Procli. Dico hanc rectam ED contingere ſectionem BE in puncto E.

Demonſtratio. Si recta ED non contingat ſectionem BE in E, poterimus intelligere aliam rectam lineam EP contingere ſectionem BE in puncto E, quæque conueniet in P puncto ſito inter C centrum & verticem B, iuxta coroll. propoſ. 31. Tunc verò ex demonſtratis recta iſta EP introducta erit parallela ipſi FG contingenti datæ alteram ſectionem AF in F

puncto;

puncto: sed eidem rectæ FG est data parallela recta ED; ergo per prop. 30. lib. 1. elem. erunt parallelæ inuicem duæ rectæ lineæ ED, EP, ex eodem E puncto egredientes, contra naturam rectarum parallelarum. Hoc absurdum condemnat falsitatis positionem contradicentem assertioni huius corollarij, quæ ideo stabilita ac demonstrata erit.

COROLL. NOSTRVM II.

Si ab puncto contactus vnius rectæ contingentis vnam oppositarum sectionum ducatur diameter illarum occurrens oppositæ sectioni in vno puncto, in quo sit altera recta linea contingens ipsam sectionem: hæ duæ rectæ contingentes erunt parallelæ & æquales inter se.

VIdes in figura huius propositionis rectam FG contingentem in F sectionem AF; & rectam ED contingentem in E alteram sectionem BE oppositam; & ambas esse contingentes in punctis F & E, diametri FCE, seu rectæ per centrum C transmissæ. Quod si ED non sit parallela ipsi FG, poterimus per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto E agere rectam EP parallelam ipsi FG, quæ secabitur in P ab diametro AB per prop. 11. Procli: porrò hæc recta EP per coroll. præcedens erit contingens in E sectionem BE; sed ex datis est altera ED contingens eandem sectionem BE in eodem puncto E: ergo contra coroll. nost. 3. ad propos. 32. duæ rectæ lineæ ED, EP, sectionem eandem BE contingunt in eodem puncto E. hoc absurdum condemnat positionem quod recta ED contingens sectionem BE non sit parallela contingenti rectæ FG alteram oppositam sectionem AF in puncto F, ita vt ambæ sint tangentes in proprijs extremis F, E, rectæ FCE per centrum C transmissæ. Erunt igitur parallelæ rectæ FG, ED, quod erat primò propositum. Quoad secundum attinet, videlicet dictas FG, ED, esse æquales, illud iam probatum est in demonstratione præsentis propositionis.

COROLL. NOSTRVM III.

Triangula ECD, FCG, erunt æqualia, & æquiangula, & similia.

CVm enim anguli ad verticem seu centrum C sint æquales per prop. 15. lib. 1. elem. & alij anguli in D & G ostensi æquales, & habeant latera DE, GF, æqualia per coroll. 2. ipsa erunt per coroll. nost. ad prop. 26. lib. 1. elem. dicta triangula æqualia, & per demonstrata ad ipsam prop. latera DC, GC, habebunt æqualia, reliquosque angulos DEG, GFC; tum latera FG, ED. Quare per def. 1. lib. 6. elem. erunt similia.

Aduerte ex Federico Commandino propositionem hanc obtinere casus duodecim, sicuti propositio 43. obtinebat duodecim quoad Hyperbolam, pro diuerso situ puncti N assumpti. Illis verò omnibus casibus, demonstratio producta inseruiet.

PROPOSITIO XLV.

Si Hyperbolen, vel Ellipsim, vel circuli circumferentiam, recta linea contingens cum secunda diametro conueniat; & ab tactu ad eandem diametrum linea applicetur diametro alteri æquidistans; & per tactum & centrum ducta linea producatur: Sumpto autem puncto quouis in sectione, ad secundam diametrum ducantur duæ lineæ, quarum vna contingenti, altera applicatæ æquidistet. Triangulum quod ab ipsis constituitur; in Hyperbola quidem maius est, quàm triangulum abscissum ab applicata ad centrum, triangulo cuius basis est linea contingens, & vertex centrum sectionis: In ellipsi verò & circuli circumferentia, vnà cum triangulo abscisso, æquale est triangulo, cuius basis est linea contingens, & vertex sectionis centrum.

SVppositio. Hyperbolen, vel Ellipsim, vel circuli circumferentiam, contingat recta linea LCM, vel CML, in puncto vnico C, conueniatque eum secunda diametro HD in L, & cum altera ipsi coniugata seu prima AH in puncto M; & ab C puncto contactus ducta sit recta CD ad diametrum HD secundam, æquidistans ipsi diametro alteri AH primæ: Ductaque sit recta HC per centum H sectionis & per punctum C contactus, & producatur vltra H centrum si opus sit. Deinde ex puncto quolibet B sectionis diuerso tamen ab verticibus diametrorum assumptarum, & puncto C contactus, transmissæ sint rectæ lineæ duæ BE, BF, quarum prima BE æquidistet tangenti LC, & secunda BF sit parallela rectæ CD applicatæ diametro secundæ HD: Resultabit triangulum BEF ex his duabus rectis ductis, & portione EF diametri secundæ pro-

ductæ vel non productæ: & aliud triangulum GHF factum ex recta CH producta vltra centrum H si opus sit & secante BF rectam in G per prop. 11. Procli, quandoquidem secat alteram CD ipsi parallelam, & ex portione HF, diametri secundæ: & aliud triangulum tertium LCH factum ab tangente LC, & linea CH per centrum H & punctum C contactus extensa, & portione LH diametri secundæ. Dico autem in Hyperbola, quod triangulum BEF sit maius quàm triangulum GHF, triangulo LCH: In ellipsi verò & circuli circumferentia dico quod idem triangulum BEF simul cum triangulo FGH, sit æquale triangulo LCH.

Considera ex Eutocio ad hanc propositionem, ipsam obtinere casus centum pro vario situ assumpti puncti B, & varijs terminis rectarum linearum ductarum ab illo: qui etiam casus in oppositis sectionibus reperiuntur. Nos verò contenti erimus afferre duorum casuum demonstrationem applicandam reliquis seruata proportione. Casus verò erunt sumpto puncto B supra & infra secundam DH diametrum & ad diuersas partes vel easdem puncti C, respectu primæ diametri AH datæ.

Apparatus. Concipiantur rectæ lineæ CK, BN, ordinatim applicatæ ad primam diametrum AH productam vltra centrum H vel non productam: quæ erunt inter se parallelæ per 12. def. inter primas.

Demonstratio. Quandoquidem recta CM contingit in C sectionem, & applicata est ordinatim CK diametro AH, habebit per propos. 39. recta CK ad rectam KH, rationem compositam ex ratione rectæ MK ad KC, & ex ratione recti lateris figuræ ad transuersum. Et quia per lem. 50. in triangulis CMK, CLD, habentibus latera KM, CD parallela ex datis, tùm alia duo LD, CK, parallela per defin. 17. inter primas, est MK ad KC, sicut CD ad DL; habebit per lem. 7. recta CK ad rectam KC, rationem compositam ex ratione rectæ CD ad rectam DL, & ex ratione lateris recti figuræ ad transuersum. Triangulum verò CDL fit ex recta KH æquali ipsi CD per propos. 34. lib. 1. element. in parallelogrammo DK resultante ex ductu linearum tam in suppositione quàm in apparatu: & triangulum CHK hoc est CDH, per cit. propos. 34. fit ex recta CK, hoc est ex CD ipsi æquali per eandem cit. propos. 34. lib. 1. element. Est autem in Hyperbola triangulum CDL maius quàm triangulum CDH, triangulo HML; ergo per ax. 1. & 3. lib. 1. element. triangulum CDL, maius erit quàm triangulum CKH, triangulo ex AH latere simili ipsi CDL; In ellipsi verò & circuli circumferentia, idem triangulum CDL, simul cum triangulo CKH, est æquale triangulo ex AH simili ipsi CDL, ex demonstratis in prop. 41. & ex prop. 15. lib. 5. elem. quandoquidem in parallelogrammis dictorum triangulorum per prop. 41. lib. 1. element. id ostensum sit in propos. 41. libri huius citata. Igitur quia triangulum CDL differt ab triangulo CKH, vel ab triangulo CDH æquali ipsi CKH per prop. 34. lib. 1. element. triangulo quod fit ex AH simili ipsi CDL; differt autem triangulum CDL ab triangulo CDH, triangulo CHL ex ipsis figurationibus; ergo per 3. axioma lib. 1. element. triangulum CHL, erit æquale triangulo ex AH simili ipsi CDL. Præterea triangulum BFE cùm simile sit triangulo CDL, per coroll. propos. 4. lib. 6. elem. vel per lem. 50. ob parallela latera BF, CD; tùm etiam sit triangulum GFH simile triangulo CDH, ob parallela latera GF, CD; latera habebunt proportionalia circa æquales angulos per def. 1. lib. 6. elem. Sed triangulum BFE fit ex latere NH inter applicatam CK & centrum H; triangulum verò GFH fit ex BN applicata, id est ex FH ipsi BN æquali per prop. 34. lib. 1. element. in parallelogrammo BH. Igitur per prop. 41. libri huius, & 41. lib. 1. elem. & 15. lib. 5. elem. ex ante demonstratis triangulum BEF ab triangulo GHF differt triangulo quod fit ex AH simili ipsi CDL; ergo & triangulo CLH ostenso æquali ipsi ex AH prædicto. Quare in Hyperbola triangulum BEF maius est quàm triangulum GHF, triangulo CLH: in ellipsi verò & circuli circumferentia idem triangulum BEF vnà cum triangulo FGH, æquale erit triangulo CLH. Quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM I.

Iisdem datis, & demonstratis in Hyperbola, triangulum BEF æquale est triangulis simul sumptis GHF, CLH.

Qvando enim quantitas minor differt ab maiore secundum aliquam quantitatem; illa minor & differentia eius à minore sunt simul sumptæ æquales maiori adæquatè, iuxta 19. ax. lib. 1. elem. sed in demonstratione propositionis huius conclusum est triangulum BEF maius esse quàm triangulum GHF, triangulo CLH; hoc est triangulum GHF differre ab triangulo BEF, triangulo CLH: ergo simul sumpta triangula GHF, CLH, erunt æqualia triangulo BEF, in Hyperbola.

COROLL. NOSTRVM II.

Iisdem datis, ac demonstratis, In ellipsi & circuli circumferentia, Triangulum CLH maius est quàm triangulum BEF, triangulo FGH.

EX demonstratis in hac propositione, duo triangula simul sumpta BEF, FGH, sunt æqualia triangulo CLH; ergo si triangulum BEF dematur ab triangulo CLH, remanebit trian-

triangulum FGH, pro differentia prædictorum: igitur cùm differentia sit id quo vna quantitas maior excedit detractam ab ipsa maiore: triangulum CLH maius erit quàm triangulum BEF, triangulo FGH. Quod erat declarandum.

PROPOSITIO XLVI.

Si Parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: Quæ per tactum ducitur diametro æquidistans ad easdem partes sectionis, lineas in sectione ductas quæ contingenti æquidistant, bifariàm secabit.

Supposítio, & apparatus prima pars. Parabolen recta linea AC contingens in vnico puncto C, conueniat cum diametro ABD in A: & per C punctum contactus ducta sit recta linea HCM parallela ipsi diametro ABD; hæc recta HCM per coroll. nost. 1. prop. 26. in vnico solum puncto C secabit lineam curuam Paraboles, & per corollarium nostrum 2. ad eandem prop. incedet intra locum Paraboles. Sumptum verò sit quodcumque aliud punctum in linea curua Paraboles, puta L, diuersum tam ab C puncto contactus, quàm ab B vertice; per quod punctum L sit acta recta linea LFE parallela tangenti CA, iuxta prop. 31. lib. 1. element. secabitur hæc recta LFE ab recta HCM per prop. 11. Procli, in puncto N, eò quòd secetur ab eadem recta HCM, altera parallela CA: tùm etiam recta ipsa LFE secabit in F sectionem per corollarium nostrum 3. ad prop. 18. & etiam secabitur in E ab diametro ABD, per cit. prop. 11. Procli. Dico autem rectam LNF intra sectionem cadentem bifariàm secari in N ab recta HCM parallela ipsi diametro ABD: & sic etiam de alijs omnibus huiusmodi rectis parallelis ipsi tangenti CA.

Apparatus secunda pars. Ex puncto F concipiatur recta linea FG ordinatim applicata diametro ABD; tùm etiam ex puncto L alia recta linea LD ordinatim applicata eidem diametro; hæ duæ rectæ FG, LD, erunt parallelæ per defin. 12. inter primas: Præterea ex puncto B verticis agatur recta linea BH ad partes ordinatim applicatarum FG, LD, parallela vni illarum per prop. 31. lib. 1. element. ipsæ tres HB, FG, LD, erunt per prop. 30. lib. 1. element. parallelæ inter se; & secabuntur per 11. Procli prop. ab HCM, & quidem LD in M, HB in H, FG producta vltra F in K. Resultabuntque ex hoc apparatu & superiore, parallelogramma GM, BK, BM; & triangula ELD, EFG, KFN, LMN, æquiangula & similia per lemma 50. tùm etiam MDGFN quinque laterum, & quadrilaterum LFGD. Denique per propos. 11. lib. 6. element. datis duabus rectis FN, NL, reperiatur tertia P proportionalis.

Demonstratio. Per propos. 42. triangulum ELD est æquale parallelogrammo BM; & triangulum EFG parallelogrammo BK: ergo per ax. 3. lib. 1. element. si triangulum minus EFG dematur de maiore ELD; & parallelogrammum BK minus dematur de maiore BM, relinquetur parallelogrammum GM æquale quadrilatero LFGD. Quod si ex his residuis æqualibus abstrahatur commune quinque laterum MDGFN; residuum erit triangulum KFN, residuo triangulo LMN æquale per idem cit. ax. 3. Iam verò quia in rectas parallelas KF, LM, incidit recta KM; erunt per propos. 29. lib. 1. element. anguli alterni in K & M æquales, suntque per prop. 15. lib. 1. elem. anguli ad verticem N æquales, igitur in triangulis KNF, MNL, reliqui anguli tertij erunt æquales, per nost. coroll. 3. ad prop. 32. lib. 1. elemen. quare ipsa triangula erunt æquiangula, ideoque per 4. prop. lib. 6. elem. erunt latera eorum proportionalia circum æquales angulos, & similia ipsa triangula per 1. defin. lib. cit. 6. element. Præterea quia sunt tres rectæ lineæ proportionales per apparatum hoc ordine FN, NL, P; erit per coroll. prop. 19. lib. 6. elem. FN ad P, vt triangulum FKN ad triangulum LMN; sed dicta triangula sunt ostensa æqualia, ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. element. recta FN erit æqualis rectæ P, prima tertiæ è dictis proportionalibus tribus rectis: igitur cùm prima recta FN sit æqualis tertiæ P, erit media NL proportionalis seu secunda, æqualis primæ FN, per nostrum coroll. 6. ad cit. prop. 19. lib. 6. elem. Atque ita probauerimus intentum in hac propositione.

Plures casus adnotat circa hanc propositionem Eutocius. Nos demonstrabimus casum in quo vertex B conueniat cum puncto sumpto F puncta B & F sint vnum. Et in hoc exemplo apparebit quomodo demonstratio allata inseruiat & seruire possit alijs casibus, seruata aliqua proportione. Cùm æquidistent rectæ HB, LNB, per apparatum ad demonstrationem præced. & incidat in illas recta HCM, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli alterni in H & M æquales; sed & per prop. 15. eiusdem lib. 1. elem. anguli ad verticem N erunt æquales; ergo per coroll. nost. 3. ad propos. 32. lib. cit. 1. reliqui anguli tertij triangulorum HNB, MNL erunt æquales, ideoque æquiangula ipsa triangula, & per 4. prop. lib. 6. elem. obtinebunt latera circa angulos æquales proportionalia: quare per defin. 1. lib. 6. element. erunt similia. Faciendo igitur per 11. prop. lib. eiusdem 6. element. vt FN ad NL, sic NL ad tertiam P lineam, erit per coroll. prop. 20. lib. 6. element. vt FN ad P, sic triangulum HNB ad triangulum MNL: Est autem per propos. 42. trian-

gulum LBD æquale rectangulo HD; ex quibus æqualibus si subtrahatur commune quadrilaterum MNBD, relinquentur per 3. ax. lib. 1. element. triangula prædicta HNB, MNL æqualia: ergo etiam recta FN erit æqualis ipsi rectæ P tertiæ proportionali. Quare per coroll. nostrum 6. ad prop. 19. lib. 6. elem. prima recta FN erit æqualis secundæ NL. & sic de omnibus alijs huiusmodi rectis ducendis parallelis tangenti rectæ CA, probabitur quod ab recta H C M diuidantur bifariàm, sicuti in demonstratione propositionis factum est. Quare verum erit propositum.

COROLL. NOSTRVM I.

In Parabola omnis recta linea parallela diametro alicui illius secans sectionem; est etiam eiusdem diameter.

CVm enim demonstrauerimus rectam CM parallelam diametro ABD Paraboles, diuidere bifariàm rectas omnes lineas intra ipsam sectionem ductas parallelas tangenti rectæ CA ipsam sectionem in puncto C verticis; ipsa recta CM erit diameter ipsius Paraboles, per defin. 10. inter primas: Et sic de alijs omnibus huiusmodi rectis. Igitur omnis recta linea secans parabolam parallela diametro alicui illius, est etiam diameter eiusdem Paraboles.

COROLL. NOSTRVM II.

Aliter ostendere quod Diametri omnes Parabolæ, sint rectæ lineæ parallelæ inter se, quàm in corollario nostro 3. ad prop. 27.

APparatus. Esto si fieri possit, duæ diametri BD, CD, Parabolæ, conueniant in D, hoc est non sint parallelæ. Poterimus concipere ex aliquo puncto F diuerso ab C in linea curua sectionis rectam lineam FG ordinatim applicatam diametro CD datæ ab aduersario. Quod si ex puncto C, posuerimus rectam lineam CH parallelam diametro BD, per prop. 31. lib. 1. element. hæc recta CH in vno solùm puncto secabit lineam curuam Paraboles per prop. 26. & per coroll. nost. 1. ad illam, procedet intra locum Paraboles; & per coroll. nostrum præcedens huius propositionis, erit etiam diameter huius paraboles: quare poterimus etiam ex eodem assumpto puncto F, concipere rectam lineam ordinatim applicatam huic diametro CH, nimirum rectam FI: quæ erit diuersa ab FG; nam si esset eadem, cùm recta linea ordinatim applicata diametro sectionis bifariàm diuidatur ab illa iuxta defin. 12. & 10. inter primas, eadem recta bifariàm diuideretur bis, & sic pars esset æqualis toti contra 8. ax. lib. 1. elem. Dicere autem quod duæ rectæ CD, CH, eam rectam diuidant in eodem puncto, cùm sint diuersæ, vna CD concurrens cum BD, altera CH parallela ipsi BD, duo puncta diffita haberent communia contra 10. ax. lib. 1. elemen. His stabilitis, poterimus per prop. 31. lib. 1. elem. ex vertice C, Paraboles respectu diametrorum CD, CH, agere rectam lineam CA parallelam ipsi FI, ordinatim applicatæ diametro CH; & aliam rectam CK parallelam rectæ FG ordinatim applicatæ diametro CD.

Demonstratio. Per prop. 17. vtraque rectarum CA, CK, contingit Parabolam in vnico puncto C, ita vt productæ vtrimque in infinitum cadant extra sectionem: sed hoc est contra coroll. nostrum 3. ad prop. 32. Absurdum hoc deductum ex positione contradicente assertioni huius corollarij nostri, indicat ipsam positionem esse falsam, & nostram assertionem adstruit.

COROLL. NOSTRVM III.

Rectæ omnes lineæ in infinitum vtrimque productæ secantes in vnico tantum puncto singula Parabolam sunt diametri ipsius paraboles.

SVppositio. Instar omnium sit recta linea data AB secans in vnico tantùm puncto A, Parabolam, etiam producta in infinitum vtrimque. Dico ipsam rectam AB esse diametrum ipsius Parabolæ. & sic de omnibus alijs huiusmodi rectis lineis.

Demonstratio. Si non sit recta AB diameter Paraboles; poterimus concipere diametrum aliquam CD ipsius Paraboles, secantem rectam AB in puncta E; vel per punctum E huius rectæ AB, situm intra locum Paraboles, rectam lineam DEC quæ sit diameter Paraboles. Igitur per coroll. nostrum 2. ad prop. 19. recta linea AEB secans diametrum CD in E, intra sectionem, producta in infinitum, occurret Parabolæ in alio puncto diuerso ab A: hoc destruit datum; ergo falsa erit positio vnde sequitur talis destructio seu contradictio, quod eadem recta AB solùm secet in vnico puncto Parabolam, & in duobus. igitur contradicens assertio huic positioni falsæ, vera erit. Quod volebamus.

COROLL. NOSTRVM IV.

Non omnes rectæ lineæ parallelæ intra locum Parabolæ; sunt diametri eius.

REctæ omnes lineæ ordinatim applicatæ diametro alicui Paraboles sunt parallelæ inter se, & vtrimque terminantur in linea curua Paraboles, ex dictis in defin. 10. & 12. inter primas, in vniuersum: ergo si omnes huiusmodi rectæ parallelæ inuicem, sint diametri Paraboles seu in Parabola, diametri Parabolæ secabunt in duobus punctis ipsam, contra nost. coroll.

coroll. 1. ad prop. 26. hoc absurdum cùm deducatur ex contradicente positione assertioni huius corollarij, ipsa positio falsa erit, & assertio corollarij vera.

COROLL. NOSTRVM V.

Rectæ omnes lineæ parallelæ inuicem intra locum Parabolæ ductæ, & secantes ipsam in vnico tantùm puncto productæ vtrimque in infinitum: sunt diametri ipsius Paraboles.

PEr corollarium nostrum 3. Rectæ omnes lineæ ductæ intra locum Parabolæ, & secantes ipsam in vnico solùm puncto productæ vtrimque in infinitum, sunt diametri ipsius Parabolæ; sed rectæ omnes parallelæ inuicem intra locum Paraboles ductæ & secantes ipsam in vnico tantùm puncto productæ vtrimque in infinitum dantur: ergo ipsæ erunt diametri ipsius Paraboles.

COROLL. NOSTRVM VI.

Nulla recta linea secans lineam curuam Paraboles, vel occurrens illi, duobus in punctis; est diameter illius.

ESto si fieri possit, recta linea quæpiam secans vel occurrens Parabolæ duobus in punctis, sit diameter illius: igitur falsum erit corollarium nostrum 1. ad propos. 26. in quo demonstrauimus diametrum omnem Parabolæ occurrere illi in vnico tantùm puncto, etiam si vtrimque in infinitum producatur. Falsum igitur quod contradicit huic corollario, & ipsum corollarium confirmatum ac stabilitum in veritate erit.

PROPOSITIO XLVII.

Si Hyperbolen, vel Ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens, cum diametro conueniat: per tactum & centrum ducta linea ad easdem partes sectionis, lineas quæ in sectione ducuntur contingenti æquidistantes, bifariàm secabit.

SVppositio. Hyperbolen, vel Ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea D E contingat in vnico solùm E puncto, conueniens cum diametro AB sectionis in puncto D: ductaque sit recta CE, per centrum C sectionis & per punctum E contactus prædictum; hæc recta CE producta vltra E in hyperbola procedet intra ipsius locum ex dictis in propos. 26. Iam verò ex punctis sectionum diuersis ab E, transmittantur per prop. 31. lib. 1. elem. rectæ lineæ parallelæ contingenti ED, instarque omnium sit recta GON ex puncto G emissa, ipsa & reliquæ huiusmodi omnes per coroll. nostrum 3. ad prop. 18. occurret alteri puncto N sectionis, eritque intra sectionem per propos. 10. quare per propos. 11. Procli secabitur ab diametro CE in puncto O. Dico autem hanc rectam GN secari bifariàm in O ab diametro CE: & sic reliquas omnes buiusmodi rectas lineas intra sectionem ductas parallelas tangenti ED.

Eutocius adnotat hanc propositionem tot admittere casus in Hyperbola quot præcedens in parabola; tùm etiam tot pati casus in datis sectionibus quot propositio 43. Porrò demonstratio afferenda prudenter erit applicanda seruatis seruandis omnibus huiusmodi casibus.

Apparatus. Producta CE vltra E si opus sit, concipiantur ex punctis G & N, rectæ lineæ GK, NF applicatæ ordinatim diametrò AB producendæ in hyperbola tantùm vltra B verticem; istæ rectæ GK, NF, erunt per defin. 12. inter primas parallelæ. Insuper ex vertice B ponatur ad partes rectarum ordinatim applicatarum GK, NF, recta linea BL parallela cuilibet dictarum ordinatim applicatarum, per prop. 31. lib. 1. elem. hæ tres rectæ lineæ BL, FN, KG, erunt per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inuicem; & per prop. 11. Procli recta BL secabitur in L ab recta CEL, tùm etiam recta FN in X producta vltra N. Insuper etiam recta GON producta vltra N si opus sit, extra sectionem secabitur ab diametro AB extra sectionem in H, per cit. propos. 11. Procli, & quidem extra sectionem; nam per prop. 10. producta GN vltra N semper procedit extra sectionem. Itaque ex dictis in propos. 43. diuersa resultabunt triangula similia, tùm etiam diuersa quadrilatera, & vnum quinquelaterum.

Demonstratio. Ex ijs quæ in prop. 43. demonstrauimus, triangulum HNF æquale est quadrilatero LBFX, & triangulum GHK æquale est quadrilatero LBKM; si igitur ab his duobus postremis æqualibus veluti totis, demantur æqualia priora; relinquentur per 3. ax. lib. 1. elem. æqualia videlicet quadrilaterum NGKF æquale quadrilatero MKFX. Quod si ex his æqualibus postremis detrahatur commune quinquelaterum ONFKM, residuum erit triangulum OMG, residuo triangulo OXN æquale per idem ax. 3. sunt verò ista duo triangula similia ex dictis in cit. prop. 43. ergo per 9. ax. lib. 1. elem. erit recta GO, æqualis rectæ ON, latera nimirum homologa dictorum triangulorum OMG, OXN, æqualium & similium.

COROLL. NOSTRVM I.

Recta prædicta CE erit semidiameter in sectionibus datis.

CVm enim diuidere bifariàm ostensa sit rectas omnes lineas intra sectiones ductas, parallelas tangenti ED; ipsa recta CE erit per defin. 10. inter primas, diameter in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia.

COROLL. NOSTRVM II.

In Hyperbola, vel Ellipsi, vel circuli circumferentia si rectæ lineæ in eis accommodatæ; sint & parallelæ vni tangenti ipsam sectionem propriam; & per centrum sectionis & punctum contactus recta linea ducatur; ipsa diuidet bifariàm prædictas omnes lineas parallelas accommodatas in sectione, sed producenda erit in Hyperbola vltra punctum contactus; & erit diameter sectionis.

SVppositio. In datis sectionibus sit recta ED tangens in E vnico puncto, & instar omnium recta GN accommodata in sectione parallela tangenti ED, & sic de alijs omnibus rectis accommodatis: rectaque linea CE ex centro C sectionis per punctum E contactus transmissa & producta solum in hyperbola vltra E, incedet enim intra locum Hyperboles ex dictis in suppositione ad hanc propos. obuiasque omnes rectas lineas parallelas tangenti ED, vti etiam in ellipsi & circuli circumferentia, secabit, vti rectam GN, in O. Dico autem rectam GN, sectam esse bifariàm in O, & sic de reliquis prædictis parallelis accommodatis parallelis ipsi ED, ab recta DE, esseque diametrum sectionis.

Hoc corollarium differt ab propositione in qua datur recta tangens ED occurrere diametro sectionis; in hoc vero corollario nihil tale datur.

Apparatus. Ex centro C, per aliquod punctum puta D rectæ ED tangentis, quod non sit E, transmittatur aliqua recta linea CD, quæ in ellipsi & circuli circumferentia secabit lineam curuam in B: at verò in Hyperbola ex puncto C centrove ad aliquod punctum intra locum ipsius Hyperboles transmittatur recta linea, quæ secet in B lineam curuam illius: certum est quod recta ED tangens Hyperbolam ipsam, occurret huic rectæ in D, extra centrum C; si enim ad centrum prædictum C terminaretur, secaret Hyperbolen per prop. 31. quod destrueret datum. Sed hæc recta linea è centro C sectionis educta cum procedat intra locum sectionis erit diameter ex ratione vniuersali diametrorum. Igitur ex punctis G & N, poterimus concipere rectas lineas NF, GK, ordinatim applicatas ad hanc diametrum CDB vel CBD, tùm ex vertice B ducere ad partes illarum ordinatim applicatarum rectam lineam BL parallelam ipsi NF, vel GK, per propos. 31. lib. 1. elem. istæ tres rectæ BL, NF, GK, erunt parallelæ per defin. 10. ac. 12. inter primas, & per prop. 30. lib. 1. elem. Porrò recta CE producta vltra E, secabit sine controuersia rectas has tres parallelas per ax. 28. lib. 1. elem. GK in M, NF in X, BL in L & per prop. 11. Procli. Sed in ellipsi & circumferentia circuli, alia methodo illud erit probandum: si ex E puncto contactus intelligatur recta linea ordinatim diametro DBC, hæc erit per defin. 10. ac 12. cit. & propos. 30. lib. 1. elem. parallela rectis BL, NF, GK, hanc quartam ex E eductam & probatam parallelam illis tribus secat recta CE in E, ergo per propos. 11. Procli reliquas secabit, GK in M, NF in X, BL in L. Ex hoc verò apparatu sequuntur omnia quæ in apparatu ad hanc propositionem adnotauimus. Itaque

Demonstratio primæ partis huius corollarij erit eadem quæ propositionis huius 47. secundæ verò partis demonstratio erit eadem quæ corollarij nostri primi.

PROPOSITIO XLVIII.

Si vnam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producta secet alteram sectionem: quæ in altera sectione ducta fuerit contingenti æquidistans, à linea producta bifariàm secabitur.

SVppositio. Vnam oppositarum sectionum, KL recta contingat in vnico tantum puncto L, conueniens cum diametro AB transuersa in puncto K: Tum recta LC producta vltra C centrum, eductaque ex puncto L contactus, secet alteram sectionem oppositam in E. Præterea in hac sectione in qua punctum E, accommodata sit recta NG, parallela tangenti rectæ LK prædictæ alteram sectionem. Dico quod si producatur rectà LCE vltra E, secet bifariàm rectam NG, in O.

Apparatus. Imprimis recta linea LC producta vltra C centrum, occurret in E alteri sectioni per propos. 29. Tum recta linea LCE producta vltra E incedet intra locum Hyperboles in qua E punctum, per coroll. nost. 1. ad prop. 31. ideoque per propos. 28. rectam lineam NG vtrimque terminatam in punctis N & G, ipsius sectionis, secabit obuiam parallelam ipsi LK, per prop. 11. Procli, in puncto O. Insuper concipiatur per punctum E recta

recta linea ED contingens sectionem in puncto E, quæ per coroll. nostrum nostrum 1. ad prop. 31. secabit diametrum AB communem sectionibus oppositis iuxta propos. 14. in puncto D inter centrum C & verticem B. Porrò per nostrum coroll. 2. ad prop. 44. duæ rectæ lineæ LK, ED, erunt parallelæ. Ergo quia recta NQG fuit data contingenti rectæ LK æquidistans, erit etiam per prop. 30. lib. 1. elem. parallela ipsi ED tangenti.

Demonstratio. Quia Hyperbolen in qua E punctum, contingit recta linea DE in E puncto, & ab centro eius C communi alteri hyperbolæ oppositæ iuxta prop. 14. transmissa est recta linea LCE, sumptumque est punctum N ex quo ducta est NG parallela ipsi DE tangenti, vtrimque conueniens cum ipsa sectione; bifariàm secabitur in O, ab ipsa recta LCE producta, per prop. 47. præcedentem. Quod erat propositum ac demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM I.

Eisdem datis: non solùm recta LCE per tactum L & C centrum ducta extensaque secans in E alteram sectionem oppositam, secat bifariàm rectam NG in O, parallelam tangenti LK alteram sectionem oppositam; sed etiam omnes alias rectas lineas parallelas tangenti LK ductas intra sectionem alteram, vt est recta NOG.

EAdem enim demonstratio allata in prop. 47. & præsenti inferuit ad propositum demonstrandum in hoc corollario.

COROLL. NOSTRVM II.

Recta linea LCE erit diameter altera sectionum oppositarum transuersa.

NAm in corollario præcedente, ostendimus diuidere bifariàm rectas omnes lineas accommodatas in sectione in qua E punctum parallelas ipsi tangenti DE: & eodem modo probabuntur diuisæ bifariàm rectæ omnes lineæ ductæ æquidistantes tangenti LK æquidistanti ostensæ ipsi DE, & accommodatæ in altera sectione opposita in qua L punctum: Igitur per defin. 13. inter primas, recta linea LCE erit diameter transuersa sectionum oppositarum.

COROLL. NOSTRVM III.

Ex his tribus propositionibus 46. 47. 48. colligitur verum esse quod monuimus in explicatione definitionis duodecima inter primas; videlicet vnam ex lineis rectis cui debent esse parallelæ rectæ omnes lineæ in qualibet sectione coni, bifariàm diuisæ ab diametro sectionis conica, esse rectam lineam contingentem in vnico solùm puncto, quod in citatis propositionibus determinatur esse vertex diametri.

IN Parabola enim ostendimus propositione 46. & coroll. nostro 1. ad illam, rectam lineam CM esse diametrum ipsius Paraboles, eò quòd secet bifariàm rectas omnes lineas parallelas rectæ lineæ CA tangenti ipsam Parabolam in puncto C verticis diametri CM.

Præterea in propositione 47. & coroll. nost. 1. ad illam, probauimus in Ellipsi & circulo & Hyperbola, rectam lineam ECM, vel CEM, esse diametrum, eò quod bifariàm diuidat rectas omnes lineas accommodatas in illis, parallelas rectæ ED tangenti in puncto E verticis diametri ECM vel CEM.

Denique in oppositis sectionibus, demonstrauimus coroll. præcedente 2. rectam LCE esse diametrum illarum, eò quòd bifariàm secet rectas omnes lineas accommodatas in vtrisque sectionibus parallelas rectæ lineæ LK tangenti vnam ipsarum in vnico puncto L verticis vnius dictæ diametri LCE.

Quare inductione facta per omnes sectiones conicas, verum erit propositum in hoc corollario nostro, quod antea solùm monueramus ad definitionem 12. inter primas.

COROLL. NOSTRVM IV.

In qualibet sectione conica, etiamque in oppositis sectionibus. Si multa recta linea fuerint in sectione qualibet conica accommodata & parallelæ vni tangenti ipsam sectionem, bifariàmque diuisa omnes accommodata: Recta linea transmissa in sectione per hoc punctum contactus & cuiusuis accommodatarum in ipsa parallelarum rectarum tangenti punctum medium; transibit etiam per reliqua puncta media reliquarum; eritque sectionis diameter.

DEmonstratio. Si recta illa transmissa per punctum contactus & punctum medium vnius parallelarum rectæ tangenti, non transeat per reliqua puncta media reliquarum parallelarum, poterimus in Parabola concipere rectam lineam ex illo puncto contactus parallelam vni è diametris suis; & in Hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, poterimus intelligere rectam lineam eductam ex centro sectionis per punctum contactus: Tunc verò in Parabola per propos. 46. in circulo verò & ellipsi & hyperbola per propos. 47. & in oppositis sectionibus per propos. præsentem, recta ista intellecta transibit per puncta omnia media prædictarum rectarum linearum parallelarum tangenti sectionem; & sic duæ rectæ lineæ, ducta nimirum ex positione aduersarij, & intellecta, habebunt duo puncta communia, videlicet punctum contactus, & punctum medium vnius è dictis parallelis; & sic vel commune segmentum habebunt, vel superficiem claudent, contra lib. 1. elem. axiomata 10. vel 14. hoc absurdum deductum ex positione aduersarij, condemnat falsitatis ipsam positionem; quare as-

fertio prima huius corollarij contradicens illi positioni erit manifesta: igitur in parabola per coroll. nostrum 1. ad prop. 46. proposita linea in hoc corollario erit eius diameter; & in hyperbola vel ellipsi vel circulo, per coroll. nost. 1. ad prop. 47. erit etiam diameter; in oppositis denique sectionibus per coroll. nost. 2. erit etiam diameter sectionum oppositarum. Et sic corollarium præsens demonstratum ramanebit.

COROLL. NOSTRVM V.

In Parabola, Hyperbola, Ellipsi, circulo, & oppositis sectionibus, si multa recta linea accommodentur parallela tangenti sectionem: Recta linea traiecta per puncta media duarum quarumlibet prædictarum, transibit etiam per reliquarum puncta media, & per punctum contactus data recta tangentis; eritque diameter sectionis.

Esto si fieri possit prædicta recta linea traiecta non transeat per punctum contactus. Verùm per corollarium nostrum præcedens, recta linea transmissa per punctum medium vnius ex datis accommodatis, & per punctum contactus, incedet per reliqua omnia puncta reliquarum, eritque diameter sectionis; ergo etiam transfiget punctum medium alterius è datis duabus. Et sic duæ rectæ lineæ diuersæ duo puncta separata communia habebunt; ideoque vti ostendimus in præcedente corollario duæ rectæ lineæ commune segmentum habebunt, vel superficiem concludent contra 10. vel 14. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum manifestam reddit falsitatem positionis aduersarij: quare vti asserimus recta illa traiecta per puncta media duarum rectarum accommodatarum æquidistantium tangenti sectionem, transibit per punctum contactus: ergo per corollarium præcedens, incedet etiam per omnia puncta reliqua media reliquarum, eritque diameter sectionis.

COROLL. NOSTRVM VI.

In Hyperbola, Ellipsi, circulo, & oppositis sectionibus, si multa recta linea accommodata in sectione, parallela tangenti sectionem, fuerint singula diuisa bifariam: recta linea ex centro per punctum medium vnius accommodatarum, incedet etiam per punctum contactus prædicti, & per reliqua puncta media reliquarum accommodatarum in sectione; eritque diameter sectionis.

Si non ita sit. Recta alia per tactum & centrum ducta, transibit per puncta media omnium rectarum accommodatarum æquidistantium tangenti sectionem, hyperbolam, ellipsim, circulumque, iuxta prop. 47. & in oppositis sectionibus iuxta coroll. nostrum 1. ad hanc propos. 48. vnde etiam transibit per punctum medium assumptæ lineæ accommodatæ in sectione: Et sic duæ rectæ lineæ diuersæ ex centro sectionis eductæ habebunt duo puncta communia diuersa, centrum videlicet, & punctum medium accommodatæ rectæ æquidistantis tangenti. Quare vel obtinebunt istæ duæ rectæ segmentum commune, vel spatium includent, contra lib. 1. ax. 10. vel 14. Igitur positio aduersarij erit falsa, & assertio prima corollarij vera erit; & secunda etiam per præcedens coroll. nostrum 5.

COROLL. NOSTRVM VII.

In omni sectione Coni, Recta omnes linea in ipsis ducta æquidistantes recta linea tangenti ipsas sectiones: erunt ordinatim applicata diametro sectionis incedenti per punctum contactus prædicti & bifariam secta ab illa diametro.

Hoc enim constat ex coroll. nostro 3. ad hanc prop. 48. quia ipsas secat bifariàm dicta diameter: igitur per defin. 12. inter primas, erunt datæ lineæ ordinatim applicatæ diametro prædictæ, & per defin. 10. libri eiusdem bifariàm diuisæ ab dicta diametro.

Eutocij monitum accipe, hanc propositionem casus omnes diuersos sibi vendicare quos Hyperbolæ attribuit in præcedente propositione 47.

PROPOSITIO XLIX.

Si Parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum ducatur recta linea diametro æquidistans; à vertice verò ducatur æquidistans ei quæ ordinatim applicata est; & fiat vt portio contingentis inter applicatam & tactum interiecta ad portionem æquidistantis quæ itidem inter tactum & applicatam interijcitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis. Quæ à sectione ducta fuerit æquidistans contingenti ad lineam quæ per tactum ducitur diametro æquidistans, poterit rectangulum contentum inuenta linea, & ea quæ inter ipsam & tactum interijcitur.

Suppositio. Parabolen recta linea CD contingat in vnico D puncto, conueniens in

in C cum diametro eius CBM extra ſectionem iuxta propoſ.24.& ex puncto D contactus ducta ſit per propoſ.31.lib.1. elem. recta linea FDN parallela dictæ diametro CBM; illæ rectæ parallelæ in vno ſolùm puncto ſingulæ lineam curuam Parabolæ ſecabunt; diameter in B per coroll. noſtrum 1. ad prop. 26. alia verò FDN per ipſam prop.26. Concipiatur autem ex puncto D contactus recta linea DX ordinatim applicata ad diametrum CBM; & ex puncto B verticis ponatur per cit. propoſ.31. lib.1. elem. recta linea BF ad partes D, parallela ipſi DX, hanc rectam BF ſecabit per prop. 11. Procli, recta FDN ſecans aliam DX parallelam: ſed & ipſa recta BF ſecabit obuiam tangentem rectam DC in puncto E. Inſuper ex quocumque puncto puta K, ſectionis, diuerſo ab D, agatur per cit. prop.31. lib.1. elem. recta linea KLIP parallela tangenti DC; hæc recta ſecabit in duobus punctis K & I, ipſam Parabolam per coroll. noſtrum 3. ad prop.18. obuiamque rectam FDN ſecabit in L; & diametrum CBM in P, per prop.11. Procli. Denique per propoſ.12. lib. 6. elem. fiat vt FD ad DE, ſic dupla ipſius CD ad aliam rectam G: erit per coroll. prop.4. lib.5. elemen. vt ED ad DF, ſic recta linea G ad duplam ipſius CD; (hoc eſt ex textu propoſitionis, vt recta ED inter contactum D & rectam DEF applicatam diametro CBM, ad rectam DF ſitam itidem inter D contactum & dictam applicatam BEF; ita recta G linea ad duplam CD contingentis datæ.) Dico quadratum rectæ KL eſſe æquale rectangulo ſub recta G, & ſub recta DL: (hoc eſt iuxta textum Authoris, quadratum rectæ KL quæ eſt portio rectæ lineæ KLIP eductæ ex puncto aſſumpto K parallelæ tangenti CD, ſita inter K punctum aſſumptum & rectam FDN parallelam diametro CBM per tactum D ductam; eſſe æquale rectangulo ſub inuenta recta linea G, & ſub recta DL quæ ſit portio rectæ FDN prædictæ ſita inter ipſam KLI, & punctum D contactus dati.)

Apparatus. Ex puncto K intelligatur recta linea KM ordinatim applicata diametro CBM, ſecans obuiam FDN in N per prop. 11. Procli: erunt duæ rectæ lineæ DX, KNM ordinatim applicatæ eidem diametro parallelæ, per defin.12. inter primas. Et quia recta BEF fuit poſita æquidiſtans ipſi DX; erunt per prop.30. lib.1. elem. rectæ tres FEB, DX, KNM, parallelæ inuicem: & quia etiam duæ aliæ CBM, FDN, ſunt etiam ductæ æquidiſtantes, reſultabunt parallelogramma LC, FM, FX, DM; & triangula CDX, PKM, CEB, FED, FED, KLN.

Demonſtratio. Quia recta CD ſectionem contingit in D, ordinatimque ex applicata recta DX diametro CBM; erit per propoſ.35. recta CB æqualis rectæ BX; ſed & BX æqualis eſt rectæ FD per prop.34. lib.1. elem. in parallelogrammo FX: ergo per ax.1. lib.1. elem. recta CB æqualis erit ipſi FD. Cumque FD, CB, ſint parallelæ, recta linea CD in eas incidens, efficiet per prop.29. lib.1. elem. angulos BCE, FDE alternos æquales; & quia etiam in eaſdem parallelas incidit recta FB, efficiet etiam per cit. propoſ. angulos alternos DFE, CBE æquales; cùmque ſint anguli ad E verticem æquales per prop. 15. lib. 1. elem. triangula DFE, CBE, æquiangula: igitur per 4. propoſ. lib.6. elem. erit vt CB ad BE, ſic DF ad FE; prima autem ac tertia ſunt oſtenſæ æquales, ergo per prop.14. lib.5. elem. ſecunda BE & quarta FE, erunt æquales: ſed etiam eſt vt BC ad CE, ſic FD ad DE, prima verò ac tertia ſunt æquales, ergo per cit. prop.14. ſecunda CE & quarta DE erunt æquales. Cùm igitur dicta triangula ſint æquilatera oſtenſa & æquiangula, congruent ſibi inuicem vti oportet ſuperponantur per 9. ax. lib.1. element. vnde per idem axioma erunt æqualia, CBE, DFE. His æqualibus triangulis ſi addatur commune quinquelaterum DEBMND, reſultabunt per 2. ax. lib.1. elem. quadrilaterum CDNM & parallelogrammum FM, æqualia. Quoniam verò per propoſ. 42. Triangulum KPM æquale eſt parallelogrammo FM; erit per 1. ax. lib.1. elem. quadrilaterum CDNM æquale triangulo KPM. Quod ſi ab his poſtremis æqualibus ſubtrahatur commune quadrilaterum LPMN, relinquetur per 3. ax. lib.1. elem. triangulum KLN parallelogrammo LC æquale. Angulus autem DLP æqualis eſt angulo KLN per prop. 15. lib. 1. elem. ergo per coroll. ad lemma 14. rectangulum ſub KL, LN, duplum erit rectanguli ſub LD, DC; ſeu quod idem eſt rectangulum ſub KL, LN, æquale erit duplo rectanguli ſub LD, DC. Et quoniam eſt ex datis, vt ED ad DF, ſic recta G ad duplam ipſius CD; & eſt vt ED ad DF, ita KL ad LN, (per lem. 50. propter rectas FLN, KLI, ſe mutuò decuſſantes in L, & lateра FE, KN oſtenſa parallela;) erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt G ad duplam CD, ſic KL ad LN: ſumendo autem pro communi altitudine rectam KL, & pro baſibus rectas KL, LN; erit per 1. prop. lib. 6. elem. vt KL ad LN, ita quadratum rectæ KL ad rectangulum ſub KL, LN: Etiam ſumendo pro communi altitudine rectam DL, & pro baſibus rectas G, & duplam ipſius CD; erit per cit. 1. prop. lib.6. elemen. vt G ad duplam rectæ CD, ſic rectangulum ſub G & DL, ad duplum rectanguli ſub CD, DL, (nam rectangulum ſub dupla baſi ipſius CD, & eadem altitudine DL, erit per cit. propoſ. lib.6. elem. duplum rectanguli ſub CD, DL, propter duplam baſim:) Igitur conferendo iſta & antecedentia, erit per prop.11. lib.5. elem. vt quadratum rectæ KL ad rectangulum ſub KL, LN, ita rectangulum ſub G & DL, ad duplum

plum rectanguli sub CD, DL; & viciſſim per prop. 16. lib. 5. element. erit vt quadratum rectæ KL ad rectangulum sub recta G, & DL, ſi rectangulum ſub KL, LN, ad duplum rectanguli ſub CD, DL; oſtendimus autem rectangulum ſub KL, LN, eſſe æquale duplo rectanguli ſub CD, DL; ergo per coroll. noſtrum 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. quadratum rectæ KL, æquale erit rectangulo ſub recta G, & DL. Sicut fuit propoſitum, & erat demonſtrandum.

COROLL. NOSTRVM I.

Recta linea G inuenta, erit latus rectum in Parabola, dato tranſuerſo DN.

OStendimus enim rectam KLI biſariàm diuidi in L ab recta DN, quæ quia eſt parallela tangenti DG, erit per defin. 10. & 12. inter primas. Ordinatim applicata DN rectæ; & quadratum rectæ KL eſſe æquale rectangulo ſub DL & G; quare per prop. 17. lib. 6. elem. erunt tres rectæ lineæ proportionales, DL, KL, G: igitur per defin. 26. inter ſecundas, recta G tertia proportionalis erit rectum latus in parabola, dato latere tranſuerſo DN. Porrò recta DN eſt diameter Paraboles per coroll. noſt. 1. ad propoſ. 46. quia eſt parallela diametro eius datæ CBM.

COROLL. NOSTRVM II.

In ipſa figuratione huius propoſitionis; Parallelogrammum CL, ſeu DCPL, eſt æquale Triangulo KLN.

HOc enim oſtendimus in diſcurſu demonſtrationis ad hanc propoſitionem.

COROLLARIVM NOST. III.

Hæc propoſitio multos admittit caſus, nimirum quot patitur propoſitio 42.

SVpponit enim illam propoſitionem ad eius demonſtrationem, cuius caſus adnotauimus ex Eutocio eſſe vndecim.

PROPOSITIO L.

Si Hyperbolen, vel Ellipſim, vel Circuli circumferentiam recta linea contingens, cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur; à vertice autem ordinatim applicata conueniat cum ea quæ ducitur per tactum & centrum: fiatque vt portio contingentis inter tactum & applicatam interiecta, ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interijcitur; ita quædam recta linea ad duplam contingentis. Quæ à ſectione ducitur contingenti æquidiſtans ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit ſpatium rectangulum quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens interiectam inter ipſam & tactum: in Hyperbola quidem excedens figura ſimili contentæ lineæ dupla eius quæ eſt inter centrum & tactum, & inuenta linea: in Ellipſi verò & circulo, eadem deficiens.

SVppoſitio, & apparatus. Hyperbolen, vel Ellipſim, vel Circuli circumferentiam, contingens recta linea ED in puncto E vnico, conueniat in D cum diametro AB, & quidem in Hyperbola extra ſectionem iuxta prop. 24. infraque eius centrum C, per coroll. prop. 31. in ellipſi verò & circulo iuxta coroll. noſtrum 2. ad prop. 25. extra ſectionem ipſam. Ductaque ſit recta linea CE producenda vtrimque, ex puncto E contactus per centrum C ſectionis. Sitque etiam data recta linea BG ordinatim applicata diametro AB in eius B vertice, conueniens in G cum recta CE producta vltra E ſi opus ſit emiſſaque ab centro C per contactum E: hæc recta BG ſecabit in F obuiam rectam ED contingentem. In Hyperbola de producta recta EC vltra centrum C, ponatur per prop. 3. lib. 1. elem. recta CK vltra centrum æqualis ipſi CE: In ellipſi verò & circulo, producta recta EC vltra centrum C, terminetur in puncto K circumferentiæ; erit ex natura circuli recta CK æqualis ipſi CE; & in ellipſi etiam per propoſ. 30. Iam verò per prop. 11. lib. 1. elem. ex puncto E contactus erigatur ad angulos rectos ipſi EC contingenti rectæ recta EH: fiatque per prop. 12. lib. 6. elem. vt EG ad FE, ſic dupla ipſius ED ad aliam rectam quartam proportionalem, cui per 3. prop. lib. 1. elem. æqualis detrahatur recta EH, de longiſſima modo ducta EH, erit per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt FE ad EG, ſic recta quædam hoc eſt inuenta recta EH ad duplam ipſius ED, (hoc eſt vti textus ſonat,

vt

vt recta FE portio contingentis ED sita inter tactum E & applicatam BFG; ad rectam EG portionemue rectæ CEG emissæ ex centro C per tactum E, sitam inter tactum E & applicatam BFG: ita quædam recta linea prædicta EH ad duplam contingentis ED.) Præterea vniantur puncta K & H, recta linea HK. Insuper assumptum sit aliquod punctum puta L in linea curua sectionis diuersum ab E contactu, per quod iuxta prop. 31. lib. 1. elem. transmissa sit recta linea LMX æquidistans rectæ tangenti ED; hæc recta LMX secabitur ab diametro AB, in puncto aliquo puta X, per prop. 11. Procli, & duobus in punctis L, V, sectionem, per coroll. nost. 3. ad prop. 18. & secabit obuiam rectam CE in M in circulo & ellipsi, in hyperbola verò per prop. 11. Procli, nam producta recta CE vltra tactum, procedit semper in infinitum intra locum hyperboles numquam eam secando nisi in puncto vnico E, per coroll. nost. ad propos. 31. & coroll. nost. 1. ad prop. 26. Ad hæc ex puncto L assumpto intelligatur recta linea LN ordinatim applicata diametro AB, secans in R obuiam rectam per tactum E & centrum C transmissam, productam vel non productam: hæc recta LC, erit æquidistans rectæ GFB, per defin. 12. inter primas, quia sunt ambæ ordinatim applicatæ eidem diametro AB. Tùm etiam ex puncto M agatur rectalia MP parallela ipsi rectæ EH, per prop. 35. lib. 1. elem. quam secabit recta HK in P, per prop. 11. Procli. Denique ex centro C, per cit. prop. 31. lib. 1. elem. ponatur CSO æquidistans rectæ KH, secabitur per cit. prop. 11. Procli ab recta HE in S, & ab recta PM in O. His positis Affeto quadratum rectæ LM esse æquale rectangulo sub EM, MP, adiacenti rectæ EH inuentæ, latitudinemque habenti rectam ME; in hyperbola quidem excedens figura simili contentæ sub linea recta dupla ipsius CE. & sub inuenta EH; in ellipsi verò & circulo, eàdem deficiens. (hoc est iuxta Authoris verba, Recta linea LM quæ ab puncto L assumpto in linea curua sectionis ad lineam CE productam vel non productam, æquidistans tangenti ED, ex centro C per tactum E, poterit spatium rectangulum quod adiacet rectæ EH inuentæ, latitudinemque habens rectam ME sitam inter tactum E & ipsam LM; in hyperbola quidem excedens figura simili contentæ sub linea recta dupla ipsius CE quæ est inter centrum C & tactum E, & sub inuenta linea EH; in ellipsi verò & circulo, eàdem deficiens.

Demonstratio. Quia est per apparatum recta EC æqualis rectæ CK, erit per 2. prop. lib. 6. elem. in triangulo HEK in quo est recta CS parallela basi HK, vt EC ad CK, ita ES ad SH; ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 54. lib. 5. elem. quia prima est æqualis secundæ, erit tertia ES æqualis quartæ SH. Et quoniam datur vt FE ad EG, ita HE ad duplam ED, ipsiusque HE est semissis SE; erit per propos. 15. lib. 5. elem. vt HE ad duplam ipsius DE, sic SE ad DE: quare per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt FE ad EG, sic SE ad ED. Et quia duæ rectæ lineæ GMR, se mutuò decussant in M, & latera GF, LR, sunt parallela, tùm etiam latera EF, ML, parallela; erit in triangulis GEF, LMR, per lem. 50. vt FE ad EG, sic LM ad MR: ergo cùm ostenderimus paulò ante, esse FE ad GE, sicut SE ad ED; erit per prop. 11. lib. 5. element. vt LM ad MR, sic SE ad ED. Igitur quandoquidem probauerimus in propos. 43. in hyperbola quidem triangulum XLN minus esse quàm triangulum CRN, triangulo CGB; in ellipsi verò & circuli circumferentia, triangulum prædictum XLN vnà cum ipso CRN, æquale est triangulo CGB: Communibus sublatis, in hyperbola quidem, triangulo ECD, & quadrilatero NRMX; in ellipsi verò & circulo, triangulo MXC; erit per 3. ax. lib. 1. elem. triangulum LMR æquale quadrilatero MEDX. Sed est recta MX posita parallela rectæ DE, & anguli in M ad verticem æquales per 15. prop. lib. 1. elem. ergo per lem. 15. rectangulum sub LM, MR, æquale est rectangulo sub EM, & vtraque ipsarum ED, MX. Sed etiam est in triangulis MCX ECD, recta MX parallela ipsi ED, ergo per lem. 50. erit vt MC ad CE, sic MX ad ED, & MO ad ES; igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt MO ad ES, sic MX ad ED; & iuxta prop. 18. lib. 5. elem. componendo, vt simul MO, ES, ad ES, sic simul MX, ED, ad ED; & per prop. 16. lib. eiusdem 5. elem. permutando erit, vt simul MO, ES, ad simul MX, ED, sic ES ad ED. Iam verò si assumamus pro communi altitudine rectam EM, & pro basibus rectam compositam ex MO, ES, & rectam compositam ex MX, ED; erit per 1. prop. lib. 6. elem. vt vtraque simul MO, ES, ad vtramque simul MX, ED, sic rectangulum sub EM & sub vtraque simul MO, ES, ad rectangulum sub EM, & sub vtraque simul MX, ED. Quia verò probauimus esse ES ad ED, sicut FE ad EG, vel vt LM ad MR; nimirum quadratum rectæ LM ad rectangulum sub LM, MR, (assumendo pro communi altitudine rectam LM, & pro basibus rectas LM, MR,) iuxta prop. 1. lib. 6. elem. erit per 11. prop. lib. 5. elem. vt rectangulum sub vtraque simul MO, ES, & EM, ad rectangulum sub vtraque simul MX, ED, & EM, sic quadratum rectæ LM ad rectangulum sub LM, MR: quare per prop. 16. lib. 5. elem. vicissim erit, vt rectangulum sub vtraque simul MO, ES, & sub EM, ad quadratum rectæ LM, ita rectangulum sub vtraque simul MX, ED, & sub EM, ad rectangulum sub LM, MR. Est autem probatum rectangulum sub LM, MR æquale rectangulo sub EM, & sub vtraque simul MX, ED; ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 54. lib. 5. elem. quadratum rectæ LM

æquale

æquale erit rectangulo sub recta EM, & sub vtraque simul MO, ES: Probauimus autem rectam ES esse æqualem rectæ SH; & ista SH est in parallelogrammo OH æqualis ipsi OP per propos. 34. lib. 1. elem. Igitur quadratum rectæ LM erit æquale rectangulo sub EM, MP, quandoquidem MO, ES, per axioma 19. lib. 1. element. simul sumptæ æquales sunt ipsi MP. Denique quia rectangulum sub EM, MP, est æquale quadrato rectæ LM; erunt per prop. 17. lib. 6. elem. tres istæ rectæ proportionales EM, LM, MP: cùmque sit recta KCE diameter seu transuersum latus in datis sectionibus, per coroll. nostrum 1. ad propos. 47. & in hyperbola rectum latus sit pars tertiæ proportionalis MP, per defin. 27. inter secundas; & per lemma 43. recta MP in triangulo PKM sit maior quàm recta EH, cui adiacet rectangulum sub EM, MP, ipsummet rectangulum excedere dicetur iuxta defin. 6. lib. 6. element. figura quidem simili contentæ sub linea KCE, dupla ipsius CE, & sub inuenta recta EH, idque per prop. 24. eiusdem libri 6. si perficiatur rectangulum sub KM, MP. In ellipsi verò cùm rectum latus sit maius quàm tertia MP proportionalis iuxta defin. 28. inter secundas; sitque recta EH maior quàm MP in triangulo EKH per lemma 43. cui rectæ EH adiacet rectangulum sub EM, MP; deficiet istud rectangulum per defin. 6. lib. 6. elem. & quidem figura simili sub KCE dupla ipsius CE, & sub EH, per propos. 24. eiusdem libri, si perficiatur parallelogrammum rectangulum sub KCE & EH. In circulo denique cùm rectum latus sit æquale diametro KCE ipsius circuli, per defin. 30. inter secundas; sitque per lemma 43. recta EH maior quàm MP in triangulo EKH; & rectæ EH adiacere detur rectangulum sub EM, MP; istud rectangulum per 6. defin. lib. 6. element. deficere manifestum est; figura quidem simili ei quæ sub recta KCE dupla ipsius CE, & sub EH, iuxta prop. 24. lib. 6. elem. si perficiatur rectangulum sub KCE, EH. Atque ita tota propositio exactè demonstrata relinquetur.

Ex Eutocio Casus huius theorematis erunt ijdem qui propositionis quadragesimæ tertiæ.

COROLL. NOSTRVM I.

Recta linea EH, est rectum latus respectu transuersi KCE, in Hyperbola.

Est enim per apparatum perpendicularis transuerso suo lateri KCE vt exigit natura lateris recti in genere, explicata defin. 19. inter secundas; & est pars tertiæ proportionalis datis duabus rectis EM, LM, ex natura lateris recti hyperboles proposita in defin. 28. inter secundas. Quod sit minor quàm MP seu pars illius, probatum est in demonstratione ad hanc prop.

COROLL. NOSTRVM II.

Recta EH est rectum latus in Ellipsi, respectu lateris eius transuersi KCE.

Cvm enim sit ex apparatu perpendicularis transuerso lateri KCE in vertice eius E, ex natura lateris recti in genere explicata in defin. 19. inter secundas: & sit vti ostendimus in demonstratione propositionis huius, maior quàm MP, tertia proportionalis, datis tribus rectis EM, LM, iuxta naturam specificam lateris recti ellipseos traditam in defin. 28. inter secundas: manifestum ipsam rectam EH esse latus rectum in ellipsi, respectu lateris eius transuersi KCE.

PROPOSITIO LI.

Si quamlibet oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conueniat; & per tactum & centrum linea producatur vsque ad alteram sectionem; à vertice verò ducatur linea æquidistans ei quæ ordinatim applicata est, conueniensque cum linea per tactum & centrum ducta: Et fiat vt portio contingentis inter applicatam & tactum, ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum; ita quædam recta linea ad duplam contingentis. Quæ in altera sectione ducitur æquidistans contingenti ad lineam per tactum & centrum ductam; poterit rectangulum quod adiacet inuentæ lineæ, latitudinem habens lineam quæ est inter ipsam & tactum, excedensque figura simili ei quæ inter oppositas sectiones interiecta, & inuenta linea continetur.

Svppositio. Oppositarum sectionum alteram recta linea CD contingens in C puncto vnico, conueniat in D cum diametro AB, & quidem infra centrum E per coroll. ad prop. 31. sed & diameter AB, & centrum E, erunt per propos. 14. communia oppositis ambabus sectionibus, tùm etiam per def. 5. inter secundas, Ductaque sit linea CE per tactum

tactum C & centrum E, extensaque vltra E, occurrat alteri sectioni oppositæ in puncto F, iuxta propos. 29. Præterea ex B puncto verticis sectionis contactæ ab recta CD, concipiatur recta linea BLG versus partes puncti C, parallela rectæ lineæ ordinatim applicatæ concipiendæ ad diametrum AB; hæc recta linea BLG iuxta prop. 17. continget in vnico puncto B verticis sectionem ipsam, quare producta in infinitum semper extra sectionem cadet, ideoque intra triangula mixtilinea CEB, CDE; igitur per ax. 28. lib. 1. element. secabit in L obuiam rectam CD tangentem, & rectam CE in puncto G. fiat verò per propos. 12. lib. 6. elem. vt CG ad LC, sic dupla ipsius CD, ad aliam quæ sit. K. erit per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. LC ad CG, vt quædam recta, quæ est K inuenta, ad duplam ipsius CD: (id est iuxta Authoris textum, vt LC portio contingentis rectæ CD, sita inter applicatam rectam BLG & inter tactum C, ad CG portionem rectæ CE ductæ per tactum C & centrum E, sitam inter tactum C & prædictam applicatam BLC; ita recta linea K inuenta, ad duplam contingentis CD.) Manifestum autem est per propos. præcedentem 50. in sectione hyperbolica contacta ab recta CD, rectas omnes lineas æquidistantes contingenti CD, ductas ad rectam lineam EC in directum productam intra locum ipsius hyperboles, posse spatia adiacentia rectæ lineæ K, latitudinem habentia lineam quæ inter ipsas & tactum, & excedentia figura simili sub EF, & sub linea K continentur: dupla enim est recta EF, ipsius CE per propos. 30. Dico autem idem euenire in hyperbola opposita AF.

Apparatus. Per punctum F concipiatur recta linea FM, sectionem AF contingens in vnico eius puncto F; hæc recta conueniet cum diametro AB in M puncto inter verticem A & centrum E, per coroll. propos. 31. ideoque resultabunt duo triangula mixtilinea AEF, AMF. Denique ex vertice A sectionis AF agatur recta linea AN parallela ipsi BG; ad partes contactus F; secabitur in N ab recta CEF per propos. 11. Procli; & ab obuia FM, secabitur in X.

Demonstratio. Quandoquidem sunt oppositæ sectiones AF, BC, & ipsas contingunt rectæ CD, MF, ab extremitatibus rectæ ECF transeuntis per centrum E & terminatæ vtrimque in sectionibus datis oppositis; erunt per coroll. nost. 2. ad propos. 44. duæ rectæ lineæ CD, FM, parallelæ & æquales: & quia se mutuò in E intersecant duæ rectæ MD, CF, erit per lemma 50. vt FM ad ME, sic CD ad DE, prima verò FM ostensa est æqualis tertiæ CD; ergo per propos. 14. lib. 5. elem. secunda ME erit æqualis quartæ DE. Cùm igitur in triangulis MFE, DCE, tria latera sint ostensa æqualia respectiuè, erunt per propos. 8. lib. 1. elem. anguli MFE, DCE, æquales obuersi basibus ME, DE æqualibus: & quoniam sunt parallelæ rectæ XN, LG, cùm sint partes parallelarum positarum AN, BG, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli FNX, CGL æquales; ideoque in triangulis FXN, CLG, reliqui tertij anguli designati medijs characteribus, æquales erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. ideoque dicta triangula æquiangula. Igitur per 4. prop. lib. 6. element. erit vt LC ad CG, sic XF ad FN; sed ex suppositione est vt LC ad CG, sic recta K ad duplam ipsius CD, vel ad duplam ipsius FM ostensæ æqualis ipsius CD, idque per prop. 7. lib. 5. elem. ergo per prop. 11. lib. eiusdem 5. elem. erit vt XF ad FN, sic recta K ad duplam ipsius FM contingentem in F, hyperbolen AF. est autem recta AN parallela posita ipsi BG quæ est posita parallela rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad diametrum AB; ergo per prop. 30. lib. 1. elem. recta linea AN erit etiam parallela prædictæ lineæ rectæ ordinatim applicatæ diametro AB in hyperbola BC: possumus autem ex puncto F, hyperboles AF, concipere alteram rectam lineam ordinatim applicatam eidem diametro AB, quæ per defin. 12. inter primas, erit parallela prædictæ ordinatim applicatæ eidem diametro AB in opposita sectione; ergo etiam per cit. prop. 30. lib. 1. elem. recta linea AN erit parallela rectæ ordinatim applicatæ ad diametrum AB ex puncto F in hyperbola AF. Igitur per prop. 50. præcedentem quælibet recta linea ab sectione opposita AF, ducta parallela contingenti rectæ FM, vel CD, parallelis ostensis, ad lineam rectam CEF productam intra locum sectionis oppositæ alterius, poterit rectangulum adiacens rectæ lineæ K inuentæ, latitudinemque habens rectam quæ inter ipsam ductam & tactum F interijcitur, excedensque figura simili illi quæ sub CEF, & inuenta K recta continetur. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Itaque his demonstratis, perspicuum est in Parabola, vnamquamque rectarum linearum, quæ diametrò ex generatione ducuntur æquidistantes, diametrum esse. In Hyperbola verò, & Ellipsi, & oppositis sectionibus, vnamquamque earum quæ per centrum ducuntur. Et in parabola quidem applicatas ad vnamquamque diametrum æquidistantes contingentibus, posse rectangula ipsi adiacentia: In Hyperbola, & oppositis, posse rectangula ipsi adiacentia, quæ excedunt figura eadem: In Ellipsi autem, quæ eadem deficiunt. Postremo quæcumque circa sectiones adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt; & alijs diametris assumptis, eadem contingere.

INspiciamus per partes hoc Apollonij corollarium deductum ex demonstratis.

O Per-

Perſpicuum eſt in Parabola, vnamquamque linearum quæ diametro ex generatione ducuntur æquidiſtantes, diametrum eſſe.

Imprimis notandum eſt in omnibus conicis ſectionibus diametrum ex generatione, ſeu principalem vocari ab Apollonio, quam nos originariam vel primariam ideo vocauimus non ſæpe; eam quæ in generatione ipſarum conicarum ſectionum, Paraboles, Hyperboles, Ellipſeos, oppoſitarum ſectionum, & etiam circuli, eſt ſectio communis plani trianguli per axem coni, & plani ſecundi ſecantis, efficientis ſectionem conicam; eſtque recta linea iuxta prop 3. lib. 11. elem.

Pro Parabola recognoſce figuram ſecundam propoſitionis 46. in qua ſit recta ABD diameter ex generatione ſeu principalis; vel primaria ſeu originaria: ſitque alia recta MC inſtar omnium, parallela ducta intra locum Paraboles attingens in vno puncto ſuo extremo C, lineam curuam ipſius Paraboles; hæc erit ex mente Apollonij diameter alia ipſius Paraboles, iuxta defin. 10. inter primas. hoc enim demonſtrauimus in coroll. noſtro primo ad propoſ. citatam 46.

In Hyperbola verò, Ellipſi, & oppoſitis (ſupple ſectionibus;) vnamquamque earum quæ per centrum ducuntur, (ſupple diametrum eſſe.)

Pro Ellipſi & Hyperbola, & etiam circulo, conſule figuras propoſitionis 47. & pro oppoſitis ſectionibus, vide figuram prop. 48.

Itaque in ellipſi & circulo; inſtar omnium recta CE producta vltra E centrum vſque ad P punctum aliud circumferentiæ, erit diameter alia ſectionis: & in Hyperbola recta CE deducta ex centro C, incedenſque intra locum hyperboles, erit ſemidiameter ſectionis, vti demonſtrauimus in coroll. noſtro 1. ad prop. 47.

Denique in oppoſitis ſectionibus recta ECL tranſiens per centrum C, ac terminata vtrimque in ſectionibus in punctis E & L, inſtar omnium huiuſmodi rectarum, erit diameter ſectionum oppoſitarum tranſuerſa quidem, vti oſtendimus in coroll. noſtro 2. ad prop. 48.

In Parabola quidem applicatas ad vnamquamque diametrum æquidiſtantes contingentibus; poſſe rectangula ipſi adiacentia.

Hiatus videtur eſſe in poſtremis verbis (poſſe rectangula ipſi adiacentia) ſuppleipſi rectæ, quæ eſt portio diametri, de qua ſermo eſt, ſita inter verticem & ipſam applicatam rectam; cuius rectanguli aliud latus ſit rectum latus reſpectu diametri datæ: vel ipſi rectæ quæ reperitur ex præſcripto prop. 49.

Recognoſce figuram propoſ. 49. in qua ad diametrum DN parallelam diametro Paraboles parallelæ principali CBM, recta linea KL applicata æquidiſtans rectæ contingenti DC ipſam parabolam in vertice eius D; poteſt rectangulum ſub recta DL, & G, adiacens rectæ G inuentæ vti præcipit propoſitio 49. vel poteſt rectangulum ſub DL portione ipſius diametri DN, ſita inter D verticem & applicatam KL, & ſub G recto latere reſpectu diametri DN; quod rectangulum adiacet prædictæ ipſi rectæ DL. Hæc ita eſſe conſtar ex prop. 49. & quod recta G ſit latus prædictum rectum, patet ex coroll. noſtro 1. ad illam propoſ. Et ſic de omnibus alijs applicatis rectis ad diametrum DN, parallelis contingenti Parabolam in vertice eius ſeu extremo diametri ipſius ſito in linea curua Paraboles.

In Hyperbola verò, & oppoſitis ſectionibus, (ſupple rectas lineas applicatas ad vnamquamque diametrum, æquidiſtantes contingentibus) poſſe rectangula adiacentia ipſi, quæ extedunt eadem figurâ.

Supplenda eadem videntur quæ monuimus paragrapho præcedente in parabola.

Recognoſce figuram Hyperboles propoſitionis præcedentis quinquageſimæ; & pro oppoſitis ſectionibus figuram propoſitionis huius 51. Itaque in Hyperbola, inſtar omnium rectarum applicatarum diametro KCER, æquidiſtantium rectæ ED tangenti ipſam Hyperbolam, Recta LM poteſt rectangulum ſub EM, MP, adiacens ipſi EH inuentæ, excedenſque figura ſimili ei quæ ſub KCE, & ipſa EH inuenta In ipſa propoſ. 50. Cùm enim ipſa recta KCE ſit diameter Hyperboles vti demonſtrauimus in corollario noſtro 1. ad prop. 47. ſitque recta LM parallela tangenti rectæ ED, ipſam hyperbolam in vertice E; poterit per prop. ipſam 50. rectangulum prædictum ſub EM, MP, adiacens rectæ EH, vel EM, excedenſque figura ſimili ei quæ ſub EH & KCE: ſic explico Apollonij verba obſcura iſta (eâdem figura,) ex alijs eius in propoſitione 50. & ſic de alijs huiuſmodi rectis lineis parallelis tangenti rectæ EC, applicatis ad diametrum CER, in Hyperbola.

In oppoſitis autem ſectionibus idem euenire probauimus in demonſtratione huius propoſitionis 51. explicando verba Apollonij prout paulo antè explicauimus in vna tantum Hyperbola.

In Ellipſi autem, quæ eadem deficiunt. (Supple rectas lineas applicatas ad vnamquamque diametrum æquidiſtantes contingentibus, poſſe rectangula adiacentia ipſi, prout immediatè ante dixerat de Hyperbola & oppoſitis ſectionibus.)

Luſtra figuram propoſ. 50. in qua in ellipſi quadratum rectæ LM applicatæ diametro ECK æquidiſtantis rectæ ED tangenti ellipſim in vertice E, poteſt rectangulum ſub EM, MP, adiacens rectæ EH inuentæ, deficienſque figura ſimili ei quæ ſub ECK & EH comprehenditur, per ipſam prop. 50.

Etſi Apollonius mentionem nunc faciat proprietatis huius in circulo, tamen ei conuenit ex ipſa prop. 50.

Poſtremò. Quæcumque circa ſectiones adhibitis principalibus diametris demonſtrata ſunt; & alijs diametris aſſumptis, eadem contingere.

Apollo-

Apollonius his verbis multa comprehendit, dicens omnia quæ principalibus seu originarijs diametris conuenire demonstrauit in præcedentibus propositionibus, etiam demonstrari posse omnibus alijs assumptis diametris sectionum conicarum. Exemploque vno contentus fuit assertionem suam illustrare. Docuerat prop. 11. rectas omnes ordinatim applicatas diametro principali seu originariæ in parabola, posse rectangula sub portione illius diametri à vertice ad applicatas proprias, & sub alia recta inuenienda, adiacentia ipsi: tùm etiam propositione 12. rectas ordinatim applicatas diametro ex generatione in hyperbola, posse rectangula adiacentia rectæ inueniendæ latitudinem habentia portiones ipsius diametri prædictæ inter verticem & proprias applicatas, excedentiaque figura simili ei quæ sub tota diametro originaria & subinuenienda: tùm in prop. 13. rectas ordinatim applicatas diametro primariæ in ellipsi, posse rectangula adiacentia rectæ inueniendæ, latitudinemque habentia portionem ipsius diametri originariæ inter verticem & applicatas proprias, deficientiaque figura simili ei quæ sub tota diametro & subinuenienda continetur: Denique ex propositione 14. colligi potest idem in oppositis sectionibus, quod asseruit in prop. 12. in vna tantùm Hyperbola. Quia verò rectæ omnes lineæ applicatæ in sectionibus prædictis conicis diametris eius, parallelæ tangenti rectæ in vertice ipsarum, sunt etiam ordinatim applicatæ dictis diametris, per coroll. nostrum 7. ad prop. 48. quis non videat excitatis propositionibus, 11. 12. 13. & 14. prædictam affectionem conuenire etiam alijs diametris ipsarum sectionum ab originarijs: præsertim cùm in parabola ea probata fuerit in prop. 49. In Hyperbola verò, ellipsi & circulo, in propos. 50. & in oppositis sectionibus in prop. præsenti 51.

Apollonius committit Geometræ experto alias affectiones diametrorum principalium demonstratas, demonstrandas in alijs etiam diametris sectionum conicarum non originarijs. Quod facile erit ab exemplo allato vnico prædicto, Geometræ experto in demonstrationibus præcedentium propositionum.

COROLL. NOSTRVM I.

Data diametro quacumque in Parabola, & recta linea ordinatim applicata ad hanc diametrum: Latus eius rectum reperire.

SVppositio. In Parabola CAE, sit eius diameter quæcumque AB, ad quam sit applicata ordinatim recta linea CD, oporteatque reperire latus rectum in hac parabola respectu diametri eius AB.

Apparatus. Per prop. 11. lib. 6. elem. Datis determinatis duabus rectis CD secunda quæ est data recta ordinatim applicata diametro AB datæ, & prima AD quæ est portio datæ diametri inter CD ordinatim applicatam & verticem A, reperiatur tertia proportionalis AF, constituenda perpendiculariter per prop. 11. lib. 1. element. ipsi diametro datæ AB in vertice A, æqualisque ponenda per 3. prop. lib. 1. element. inuentæ ipsi AF. Dico hanc rectam AF esse rectum latus quæsitum.

Cùm enim per apparatum recta AF sit tertia proportionalis datis duabus, prima AD portione diametri AB, inter verticem A & ordinatim applicatam rectam CD ipsi diametro AB: secunda verò ipsamet CD ordinatim applicata, & sit perpendicularis diametro AB ex eius A vertice ad vnam partem: erit per defin. 26. inter secundas recta linea AF rectum latus in Parabola ipsius diametri AB. Atque ita fecerimus imperatum.

COROLL. NOSTRVM II.

Data diametro transuersa seu latere transuerso quocumque in Hyperbola, & recta linea ordinatim applicata huic transuerso lateri: Latus eius rectum reperire.

SVppositio. In Hyperbola CAE, data sit diameter eius quæcumque AB, & recta linea CD ad illam ordinatim applicata: Et ex his datis oporteat latus rectum reperire respectu diametri datæ AB.

Apparatus. Quandoquidem datur recta CD ordinatim applicata datæ diametro AB productæ vltra A verticem intra locum Hyperbolæ; determinata erit AD portio diametri AD productæ, inter verticem A & ipsam applicatam rectam CD. Præterea ex puncto D diametri transuersæ erigatur per prop. 11. lib. 1. element. recta linea DH longissima perpendicularis ipsi diametro BAD. Tùm per prop. 11. lib. 6. elem. datis duabus rectis AD prima, secunda CD, reperiatur tertia linea proportionalis DH, cui per 3. propos. lib. 1. elem. ponatur æqualis recta DH, in recta longissima priùs ducta ex puncto D. Insuper per extremum H huius rectæ DH, ab extremo altero B, transuersi dati lateris AB quod in linea curua Hyperboles minimè inest, transmittatur recta linea BH. Denique ex vertice A versus partes H, erigatur altera linea recta AF perpendicularis ipsi AB transuerso lateri, hæc recta AF erit per prop. 28. lib. 1. element. parallela rectæ HD, ob angulos in D & A rectos; & per prop. 11. Procli secabitur in F ab recta BH. Dico autem rectam AF esse latus rectum in Hyperbola data quæsitum ex datis.

Demonstratio. Imprimis per lemma 43. Recta AF erit minor quàm DH tertia proportionalis datis duabus, prima AD portione transuersi lateris inter verticem A & rectam lineam CD ordinatim illi transuerso lateri ap-

plicatam, secunda verò ipsamet recta linea CD ordinatim applicata: perpendicularis verò lateri transuerso AB in puncto eius D in quo ordinatim applicatur ipsa CD data: estque etiam recta AF perpendicularis ipsi transuerso lateri in puncto verticis A, determinata ipso puncto A verticis, & altero puncto F sectionis communis ipsius & rectæ lineæ BH transmissæ ab altero B extremo lateris transuersi AB minimè sito in linea curua Hyperboles, per extremum H dictæ rectæ DH tertiæ proportionalis perpendiculariter positæ transuerso lateri AB, ab eius puncto D. Igitur per defin. 27. inter secundas, recta linea AF erit latus rectum in Hyperbola inuentum ex datis, transuerso eius latere, & recta linea CD ordinatim applicata dicto transuerso lateri.

COROLL. NOSTRVM III.

Data diametro quacumque in Ellipsi, & recta linea ordinatim applicata ipsi datæ diametro; Rectum latus in Ellipsi reperire respectu data diametri.

SVppositio. In Ellipsi ACB data sit diameter AB, & recta linea CD ipsi ordinatim applicata. Oporteatque ex his datis reperire rectum latus in ellipsi data, respectu datæ diametri AB.

Apparatus. Quandoquidem datur recta CD ordinatim applicata diametro datæ AB, determinata erit recta AD portio diametri AB sita inter verticem A & datam ordinatim applicatam CD. Iam verò ex puncto D diametri AB, erigatur recta linea longissima DH ad angulos rectos ipsi AB, per propos. 11. lib. 1. elem. Tùm per prop. 11. lib. 6. element. datis duabus rectis AD prima, & secunda CD, reperiatur tertia linea proportionalis, cui per prop. 3. lib. 1. elem. de recta longissima DH, detrahatur ex puncto D recta linea DH æqualis. Ad hæc ex puncto A verticis etiam ponatur ad partes rectæ DH, recta linea longissima AF perpendicularis ipsi diametro AB; erunt hæ duæ rectæ AF, DH, parallelæ per prop. 28. lib. 1. elem. Denique puncta B & H, nectantur recta linea BH incedens per extremum H rectæ lineæ DH æqualis positæ inuentæ tertiæ proportionali; & producatur recta BH vltra H, secabit in F rectam AF parallelam ipsi DH sectæ ab illa BH, idque per propos. 11. Procli. Assero autem rectam AF interceptam inter verticem A, & rectam BHF, esse rectum latus quæsitum in ellipsi ex datis, respectu diametri datæ AB.

Demonstratio. Est enim recta illa AF perpendicularis diametro datæ AB in eius vertice A, terminata ipso vertice A, & recta linea BHF educta ex altero B extremo dictæ diametri AB, incedente per H extremum rectæ DH perpendicularis diametro AB, in puncto eius D ad quod applicata est data recta linea CD ordinatim, tertiæque proportionalis datis duabus; prima AD portione diametri AB inter verticem A & rectam CD ordinatim applicatam diametro prædictæ; secunda verò ipsa recta CD ordinatim data applicata: Estque maior ipsa AF, quàm recta DH tertia proportionalis inuenta, idque per lemma 43. Ergo per definitionem 28. inter secundas recta linea AF erit latus rectum quæsitum in ellipsi respectu eius diametri datæ AB; ex datis, dicta diametro, & recta CD ordinatim applicata dictæ diametro.

COROLL. NOSTRVM IV.

Data quacumque diametro transuersa vel transuersa latere in oppositis sectionibus, & recta linea ordinatim applicata ad dictam diametrum in qualibet sectionum datarum oppositarum: reperire latera illarum recta, respectu data diametri transuersæ.

PEr corollarium nostrum 2. Accepta vna solùm hyperbola è duabus datis, ex latere eius dato transuerso, & recta linea ordinatim applicata dictæ diametro transuersæ datæ, intra assumptam hyperbolam, reperiatur rectum latus in illa, respectu datæ diametri transuersæ. Dico quod si ad verticem alterius oppositæ sectionis constituatur altera recta linea æqualis lateri recto inuento, ad angulos rectos ipsi diametro transuersæ: hæ duæ rectæ lineæ æquales orthogoniæ lateri transuerso in verticibus oppositarum sectionum, erunt latera recta quæsita, iuxta defin. 29. inter secundas.

COROLL. NOSTRVM V.

Reperire rectum latus in coni sectione quæ circulus est; ex data eius diametro.

COnstituatur ad angulos rectos recta linea ad vnam partem diametri circuli ex eius extremo; & per prop. 3. lib. 1. elem. ex ista posita perpendiculari detrahatur ab extremo prædicto diametri, recta linea æqualis ipsi diametro circuli. hæc recta erit latus rectum in circulo per def. 30. inter secundas.

PROPOSITIO LII.

Recta linea data in plano, ad vnum punctum terminata: Inuenire in plano Coni sectionem, quæ Parabole appellatur; ita vt eius diameter sit data recta linea, vertex lineæ terminus; quæ verò à sectione ad diametrum in dato angulo

gulo applicatur, poſſit rectangulum contentum linea, quæ eſt inter ipſam & verticem ſectionis, & altera quadam data linea.

SVppoſitio. Data ſit AB recta linea in plano, ſaltem terminata in vno puncto A, (nam licet ex altera parte concipiatur indeterminata nihil refert.) Oporteat autem in plano dato inuenire coni ſectionem quæ Parabola dicitur, ita vt eius vna diameter ſit data recta AB, vertex verò A, lineæ datæ terminus determinatus; quæ verò à ſectione ſeu ab linea curua ſectionis Parabolicæ deſcribendæ in plano, ad diametrum in dato angulo rectilineo applicatur, poſſit rectangulum contentum linea quæ eſt inter ipſam & A, verticem ſectionis, & altera quædam data recta linea AD.

Apparatus. Quandoquidem datur recta linea AD quæ cum portione diametri AB datæ ſita inter verticem A & rectam lineam ordinatim applicatam ipſi diametro AB, ſecundum datum angulum, rectangulumque efficiat æquale quadrato rectæ lineæ applicatæ diametro datæ; ipſa recta AD, erit rectum latus in parabola deſcribenda, reſpectu diametri datæ AB, iuxta defin. 26. inter ſecundas. Igitur per prop. 11. lib. 1. elem. ex puncto A dato termino diametri AB datæ, conſtituatur ad vnam partem recta linea AD data perpendiculariter ipſi diametro AB: Et ſumantur infinito numero puncta in linea AB, verbi gratiâ C, O, E, diuerſa; in quibus per prop. 23. lib. 1. elem. conſtituantur anguli hinc & inde contrapoſiti ACG, FCO; HOE, AOI; AEL, KEB, æquales dato angulo rectilineo. Prætereaper propoſ. 13. lib. 6. elem. reperiatur media recta proportionalis inter duas DA, AC, & per 3 prop. lib. 1. elem. ſumantur rectæ CF, CG, æquales ipſi mediæ ptoportionali inuentæ: ſimiliter ſumantur rectæ æquales DH, DI, inuentæ mediæ proportionali inter duas DA, AO: ſimiliter aliæ duæ EK, EL, æquales mediæ inuentæ proportionali inter duas DA, AE: & ſic de reliquis. Dico lineam curuam deſcribendam conſtanti manu ſine angulis, eſſe quæſitam coni ſectionem quæ vocatur Parabole, habentem diametrum datam AB, verticem A, latuſque rectum AD datum, & rectas ordinatim applicatas FCG, HOI, KEL, diametro datæ AB, ſecundum datum angulum rectilineum; & ſemiſſem vniuſcuiuſque, verbi gratiâ FC, poſſe rectangulum ſub DA latere recto, & AC, portione diametri AB datæ, ſita inter verticem A, & ipſam FC ordinatim applicatam; & ſic de cæteris.

Demonſtratio. Imprimis dictæ rectæ lineæ FCG, HOI, KEL, & ſic de reliquis, erunt per prop. 28. lib. 1. elem. parallelæ, ob angulos æquales dato tertio factos; vna igitur illarum poteſt aſſumi cui reliquæ ſint parallelæ; ſuntque biſariàm diuiſæ per ipſum apparatum, nam ſunt æquales ſumptæ portiones hinc & inde propriæ ab diametro AB; ergo in linea curua deſcripta erunt ordinatim applicatæ diametro eius AB, per defin. 10. & 12. inter primas. Suntque per apparatum mediæ proportionales inter latus rectum AD, & portiones proprias diametri eius AB ſitas inter verticem A & ipſas proprias: & quia rectangulum ſub DA, AC, minus eſt quàm rectangulum ſub DA, AO, per propoſ. 1. lib. 6. elem. exiſtente recta AC minore quàm recta AO; ideo quadratum rectæ FC æquale rectangulo minori ſub DA, AC, erit minus quàm quadratum rectæ HO æquale rectangulo maiori ſub DA, AO; quare vlterius recta FC minor erit quàm recta HO: & ſic probabuntur reliquæ rectæ ordinatim applicatæ prædictæ, eò maiores in infinitum quò remotiores à vertice A; vnde linea curua deſcripta per extrema illarum ordinatim applicatarum diametro datæ, quæ ſunt etiam mediæ proportionales inuentæ, non claudet ſpatium ex parte oppoſita vertici A, quia magis & magis diuaricabuntur ab inuicem eius extrema ſi producantur. Igitur per defin. 21. inter ſecundas, deſcripta linea curua in plano, erit Parabola obtinens conditiones datas. Sub diametro AB data; habens verticem A datum, rectum latus AD datum; & ordinatim applicatas rectas datæ diametro AB, ſecundum angulum datum rectilineum: & vnaquaque iſtarum ordinatim applicatarum rectarum poterit rectangulum ſub dato latere AD recto, & ſub portione diametri ſita inter A verticem, & ipſam ordinatim applicatam. Atque ita fecerimus imperatum in vniuerſum; nam modus traditus in conſideratione noſtra 41. fuit in caſu quo diameter data eſſet axis, ideoque rectæ lineæ ad eam applicatæ efficerent angulos rectos iuxta defin. 18. inter primas. Hæc verò methodus eſt ſecundum omnem datum angulum huic rectum, ſiue non rectum, rectilineum; & ſecundum datam quamcumque diametrum, datumque quodlibet rectum latus.

PROPOSITIO LIII.

Datis duabus rectis lineis terminatis, quæ ad rectos inter ſe angulos conſtituantur; & altera producta ad eaſdem partes anguli recti. Inuenire in linea producta coni ſectionem, quæ Hyperbola dicitur in eodem plano, in quo ſunt

O 3 datæ

datæ rectæ lineæ: ita vt producta sit diameter sectionis, & vertex punctum quod ad angulum consistit; quæ verò à sectione ad diametrum applicatur, angulum faciens æqualem dato, possit rectangulum quod adiacet alteri lineæ, latitudinem habens lineam interiectam inter applicatam & verticem sectionis, excedensque figura simili & similiter posita ei quæ datis à principio lineis continetur.

SVppositio. Datæ sint duæ rectæ lineæ BA, AD, sibi mutuò insistentes ad angulos rectos in communi puncto seu extremo A; & altera BA producta vltra A, hoc est ad easdem partes anguli recti A rectilinei. Oporteat inuenire in hoc plano anguli recti A, (nam omnes anguli rectilinei sunt in vno plano per prop. 2. lib. 11. elem.) seu describere lineam curuam sectionis coni quæ Hyperbole nuncupatur: ita vt producta BA vltra A, sit eius diameter vna transuersa seu transuersum latus, & vertex A punctum quod ad angulum BAD rectum consistit; quæ verò à sectione ad diametrum BA productam vltra A intra sectionem ordinatim applicatur, angulum faciens rectilineum æqualem dato, possit rectangulum quod adiacet alteri lineæ rectæ AD, latitudinem habens rectam lineam positam inter applicatam & verticem A sectionis, excedensque figura simili & similiter posita ei quæ datis à principio lineis rectis BA, AD; continetur.

Apparatus. Quandoquidem datur recta linea AB producta vltra A, diameter sectionis conicæ, & recta AD ipsi perpendicularis in puncto A, verticis sectionis quæ Hyperbola dicitur; & datur vt secundum datum angulum rectilineum quæcumque recta linea ordinatim applicata dictæ diametro AB intra sectionem, possit rectangulum applicatum seu adiacens rectæ lineæ AD, latitudinem habens portionem diametri AB sitam inter verticem A, & ipsam rectam applicatam, excedensque figura simili similiterque posita ei quę sub AB, AD, continetur; ipsa recta AD erit rectum latus quæsitæ Hyperboles & describendæ in plano rectarum datarum AB, AD, angulum rectum efficientium; per defin. 27. si ab altero B extremo datæ diametri recta linea BD ducatur per extremum D, dictæ rectæ AD, quæ producta vltra D, transibit per extremum cuiuscumque alterius rectæ lineæ quę sit tertia proportionalis, datis duabus, prima portione diametri productæ AB inter verticem A & ordinatim applicatam, secunda ipsa ordinatim applicata; ipsa verò tertia proportionalis sit posita perpendicularis ad partes rectæ AD, ipsi diametro AB, in puncto diametri ad quod data applicata applicatur: si enim non transiret recta BD producta vltra D, per extremum dictæ tertiæ proportionalis, sed per aliquod eius alterum punctum productæ vel non productæ, cùm sint inuicem parallelæ recta ista AD, & ordinatim applicata, per prop. 28. lib. 1. element. ob angulos rectos quos efficiunt cum diametro AB: rectangulum sub hac recta maiore vel minore quàm tertia inuenta proportionalis, & sub portione diametri AB inter verticem A & ipsam prædictam rectam sita, erit æquale quadrato rectæ lineæ ordinatim applicatæ, per considerationem nostram 39. Sed per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum idem est æquale rectangulo sub dicta portione diametri, & sub recta tertia proportionali inuenta: ergo per 1. ax. lib. 1. elem. duo illa rectangula erunt inæqualia, eandem latitudinem habentia seu eandem basim, videlicet portionem diametri AB constitutam inter verticem A & rectam lineam ordinatim applicatam, vel rectam lineam tertiam proportionalem prædictam inuentam & constitutam ad angulos rectos diametrum AB in puncto eius ad quod data recta linea ei applicatur; diuersam verò seu inæqualem altitudinem, nimirum tertiam proportionalem inuentam; & alteram rectam ei inæqualem. Hoc verò est contra lemma 49. igitur recta linea BD producta incedet per extremum dictæ tertiæ proportionalis rectæ. Igitur si in productione diametri BA, vltra A, sumantur diuersa puncta infinito numero dissita, exempli gratiâ C, O, E, & per prop. 23. lib. 1. elem. in ipsis fiant anguli contrapositi ACF, GCO; AOH, IOE; AEK, LEP; æquales dato tertio angulo rectilineo quocumque, erunt per 1. ax. lib. 1. elem. dicti anguli æquales, ideoque per prop. 28. lib. eiusdem, parallelæ erunt rectæ lineæ FCG, HOI, KEL. Præterea ex dictis punctis C, O, E, productionis diametri AB, erigantur rectæ lineæ perpendiculares CM, ON, EP, ipsi diametro, ad partes D; erunt per propos. 28. lib. 1. elem. parallelæ inter se, ideoque per prop. 11. Procli secabuntur ab recta BD producta, prima quidem in M, secunda in N, tertia in P; eruntque singulæ maiores quàm AD rectum latus, per lemma 43. Insuper per prop. 13. lib. 6. elem. datis duabus rectis AC, CM, reperiatur media recta linea proportionalis, cui de recta FCG, ex puncto C, sumantur hinc & inde æquales rectæ CF, CG, quæ erunt æquales inter se per 1. ax. lib. 1. element. Eodem modo, duabus datis AO, ON, reperiatur media recta linea proportionalis, cui detrahatur ex puncto O, de recta HOI, hinc

&

& inde, rectæ lineæ æquales OH, OI, quæ erunt æquales inter se. Eadem ratione, duabus datis AE, EP, inueniatur media recta proportionalis, cui abscindantur de recta KEL, ex puncto K, hinc & inde, rectæ KE, EL, æquales, quæ erunt æquales inter se: eritque tota FCG bifariàm diuisa in C; & tota HOI, bifariàm diuisa in O; & tota KEL, bifariàm diuisa in E. Quod si plura puncta sumantur, erit similiter idem faciendum circa illa, atque fecimus circa puncta C, O, E. Dico autem quod si linea curua in plano punctorum extremorum A, F, H, K, ex vna parte, & ex alia A, G, I, L, describatur sine angulis, erit sectio coni quæ Hyperbola vocatur, quæsita, habens conditiones datas in propositione.

Demonstratio. Imprimis quia recta AB producta vltra A, diuidit bifariàm rectas omnes lineas, verbi gratiâ FCG, HOI, KEL, parallelas cuicumque illarum, ipsa recta AB erit diameter lineæ curuæ descriptæ per defin. 10. inter primas: & ipsæ rectæ parallelæ prædictæ, erunt ordinatim applicatæ dictæ diametro AB, per defin. 12. inter easdem primas. Et quia recta linea FC ordinatim applicata ad datam diametrum AB, est media proportionalis inter AC portionem diametri inter verticem A & rectam FC ordinatim applicatam, & inter rectam CM maiorem quàm rectum latus AD; & recta OH ordinatim applicata diametro AB, est media proportionalis inter rectam AO, sitam inter verticem A & ordinatim HO applicatam, & rectam aliam ON maiorem quàm AD rectum latus: & sic de alijs. Et quia comparando primam rectam AC, & tertiam proportionalem CM; & aliam primam AO & tertiam ON cum prima AO, & tertia ON proportionali; primam cum prima, & tertiam cum tertia, AC & CM sunt minores quàm AO, ON; rectangulum sub duabus AC, CM, erit minus quàm rectangulum sub AO, ON, per lemma 49. ergo quadratum rectæ CF æquale per propos. 17. lib. 6. elem. rectangulo sub AC, CM, erit minus quadrato rectæ ON æquali rectangulo sub AO, ON, per 1. ax. lib. 1. elem. quare recta FC, minor erit quàm recta HO; seu maior recta HO quàm CF: & sic deinceps rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro AB productæ, quò remotiores ab vertice A, eò maiores: vnde linea curua descripta per dicta puncta inuenta sine angulis, semper diuaricabitur ab inuicem ex parte opposita vertici A, & nunquam spatium claudet. Igitur per def. 22. inter secundas, hæc linea curua descripta erit Hyperbola: & sibi vendicabit conditiones datas, nimirum habebit datam rectam AB pro diametro transuersa; & pro recto latere rectam AD; & rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ diametro AB, secundum angulum datum rectilineum, verbi gratiâ recta FC, poterit rectangulum adiacens recto lateri AD, latitudinem habens rectam AC, quæ est portio diametri inter verticem A; & ipsam ordinatim applicatam FC, excedens figura simili & similiter posita ei quæ sub tota AB & tota AD continetur, iuxta prop. 24. lib. 6. element. fecerimus ergo imperatum. Hic verò modus describendi Hyperbolen ex data diametro transuersa, & latere recto, est vniuersalis: nam alter traditus in consideratione nostra 42. ad secundas definitiones, est dato axe & latere recto.

PROPOSITIO LIV.

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos. Inuenire circa diametrum alteram ipsarum, coni sectionem, quæ Ellipsis appellatur, in eodem plano in quo sunt datæ lineæ: ita vt vertex sit punctum ad rectum angulum; & à sectione ad diametrum applicatæ in angulo dato, possint rectangula adiacentia alteri lineæ, quæ latitudinem habeant lineam inter ipsas & verticem sectionis interiectam, deficientque figura simili & similiter posita ei, quæ datis rectis lineis continetur.

Suppositio. Datæ sint duæ rectæ AB, AD, constitutæ sibi inuicem perpendiculares in extremo A communi. Et oporteat circa alteram illarum, puta AB, tanquam diametrum, in plano describere coni sectionem quæ Ellipsis appellatur; ita vt vertex eius sit punctum A anguli BAD recti facti ab datis duabus rectis; & ab linea curua sectionis ad diametrum AB, rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ, in angulo rectilineo dato, possint rectangula adiacentia alteri rectæ AD, latitudinem habentia portionem diametri AB inter ipsas & verticem A, deficientiaque figura simili & similiter posita ei quæ datis rectis lineis AB, AD, continetur.

Apparatus. Puncta D & B non communia extrema datarum rectarum linearum AB diametri transuersæ seu transuersi lateris, & AD recti lateris, vniantur recta linea BD. Tum in diametro AB, sumantur infinita numero puncta diuersa, verbi gratiâ C, O, E, ad quæ per propos. 23. libri 1. element. constituantur anguli ACG, AOI, AEL, æquales dato angulo rectilineo siue recto siue non recto, qui erunt omnes æquales inter se per 1. axio. lib. 1.

elem. Sed aduerte quod si datus angulus sit rectus, non poterunt esse datæ duæ rectæ lineæ AB, AD, æquales, sed inæquales, nam si ductæ rectæ lineæ angulos rectos cum diametro AB efficiant, ipsæ erunt in ellipsi futura, ordinatim applicatæ ad angulos rectos ipsi diametro AB, & per defin. 58. inter primas ipsa AB erit axis: ergo per coroll. nostrum 56. ad prop. 13. latus eius rectum AD datum, erit inæquale ipsi axi AB: producanturque rectæ GC, IO, LE, ad aliam partem diametri AB; istæ omnes rectæ erunt parallelæ inuicem, per prop. 28. lib. 1. elem. Præterea ex eisdem punctis C, O, E, erigantur rectæ lineæ CM, ON, EP, per prop. 11. lib. 1. elem. perpendiculares ipsi diametro AB, quæ erunt per cit. prop. 28. lib. 1. elem. parallelæ inter se, & lateri recto AD; ideoque secabuntur ab recta BD, per prop. 55. Procli, in punctis M, N, P: Sed & per lemma 43. singulæ erunt minores recto latere AD, quare dici poterunt portiones dicti lateris recti AD. Insuper iuxta prop. 13. lib. 6. elem. datis duabus rectis AC, CM, reperiatur media proportionalis recta, cui per prop. 3. lib. 1. elem. æquales detrahantur singulæ rectæ CF, CG: & datis duabus AO, ON, inueniatur alia recta media proportionalis; cui æquales ponantur singulæ OH, OI: & datis duabus AE, EF, quæratur media proportionalis; cui æquales EK, EL constituantur singulæ: & sic de alijs. Denique intelligatur in hoc plano in quo ductæ prædictæ lineæ insunt, descripta linea curua sine angulis incedens per extrema designatarum rectarum, F, H, K, L, I, G, & per extrema A & B datæ diametri. Dico hanc figuram planam descriptam, esse coni sectionem quæsitam, quæ vocatur Ellipsis.

Demonstratio. Nam per apparatum est linea curua in plano recepta; quæ quia incedit per extrema puncta prædicta, & terminos A, B, diametri AB datæ, spatium seu figuram planam continet, vel continere potest si transmittatur linea prædicta curua per omnia prædicta puncta extrema. Cumque rectæ lineæ omnes FCG, HOI, KEL, & sic de reliquis, sint per apparatum bifariàm diuisæ, & parallelæ inter se, vel vni earum, erit recta AB diameter dictæ lineæ curuæ per def. 10. inter primas; eruntque rectæ omnes prædictæ lineæ bifariàm ab illa diametro AB, ordinatim ipsi applicatæ, secundum vtramque acceptionem def. 11. inter easdem primas. Denique quia per apparatum singulæ illæ rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro AB, iuxta secundam explicationem def. cit. 12. sunt mediæ proportionales, inter segmenta diametri AB terminata vertice A, & ipsis proprijs rectis lineis ordinatim applicatis. Et quoniam est latus eius transuersum AD, efficit angulum rectum BAC cum transuerso dato latere AB, in vertice eius A: & ab linea curua figuræ descriptæ rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ sunt mediæ proportionales inter portiones diametri AB, ab vertice A ad ipsas, & rectas minores latere AD recto probatas in apparatu: erunt per propos. 17. lib. 6. elemen. quadratarum dictarum rectarum ordinatim applicatarum diametro AB, æqualia rectangulis sub proprijs portionibus diametri AB prædictis, & proprijs lineis rectis minoribus latere recto AD prædictis: suntque latera quadratorum illorum applicata diametro AB ordinatim secundum angulum datum rectilineum; deficiuntque dicta rectangula adiacentia dato lateri AD recto contepta, figura simili & similiter posita ei quæ datis rectis AB, AD, inæqualibus continetur, si intelligantur rectangula sub AB, AD, & rectangula prædicta perfecta, quæ circa diametrum eandem DB consistunt, vti constat ex prop. 24. lib. 6. elem. Ellipsis descripta erit per defin. 23. inter secundas, conditiones omnes habebit requisitas in præsenti propositione. Quare ad praxim propositum reduxerimus; eamque rectè factam esse demonstrauerimus.

PROPOSITIO LV.

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos. Inuenire oppositas sectiones, quarum diameter sit vna datarum linearum, & vertices lineæ termini: Applicatæ verò ab vtraque sectione in dato angulo, posßint spatia adiacentia alteri lineæ, excedentia figura simili ei quæ datis lineis continetur.

Suppositio. Sint duæ datæ rectæ lineæ terminatæ AB, AD, sibi inuicem perpendiculares in extremo communi A, angulum A rectum efficientes. Et oporteat inuenire seu describere in plano huius anguli recti, oppositas sectiones; quarum diametar transuersa sit vna datarum rectarum vtpote AB, altera verò sit rectum latus; vertices diametri AB termini A, B: applicatæ denique rectæ lineæ ab lineis curuis ambarum sectionum diametro AB, ordinatim, in dato angulo rectilineo, possint spatia adiacentia alteri rectæ seu lateri recto AD, excedentiaque figura simili ei quæ datis rectis lineis AB, AD, continetur.

Apparatus. Per propos. 53. data diametro AB transuersa, & recto latere AD, & datis in propositione, describatur Hyperbola LBK. Tùm data eadem diametro AB, & latere recto BD æquali dato AD, describatur alia Hyper-

Hyperbola LAK, per cir. prop. 53. Dico sectiones LAK, LBK, esse oppositas descriptasque circa diametrum AB; & habere conditiones propositas.

Demonstratio. Vtraque enim est per apparatum Hyperbola, seu linea curua in plano descripta, spatium continere se ipsa nequiens; ad quarum diametrum transuersam AB communem recta quæuis linea in vtraque ordinatim applicata, est media proportionalis inter portionem diametri AB transuersæ terminatam vertice proprio, tùm ipsa recta ordinatim applicata. Et quia per ipsum apparatum, iuxta prop. 53. rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro communi AB, efficiunt eum ipsa angulum rectilineum æqualem dato; & possunt spatia adiacentia recto lateri AD dato, vel BD ipsi æquali, excedentia figura simili ei quæ sub datis rectis AB, AD, vel AB, BD, continetur: manifestum est per defin. 24. inter secundas, dictas sectiones LBK, LAK, esse oppositas, & habere conditiones propositas.

PROPOSITIO LVI.

Datis duabus rectis lineis, sese bifariam secantibus: circa vtraque ipsarum sectiones oppositas describere; ita vt rectæ lineæ sint coniugatæ diametri; & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

Svppositio. Sint datæ duæ rectæ lineæ AC, DE, se mutuò bifariàm diuidentes in puncto B, secundum quemcumque angulum datum rectilineum CBE. Oporteatque circa vtramque AC, DE, in plano describere sectiones oppositas, ita vt datæ ipsæ rectæ AC, DE, sint coniugatæ diametro; & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

Apparatus. Per lemma 21. Dato quadrato rectæ DE, reperiatur recta linea CL, quæ cum recta AC efficiat rectangulum sub AC, CL, æquale quadrato rectæ DE: & per propos. præcedentem 55. datis duabus rectis AC, CL, sibi inuicem perpendicularibus in communi puncto C, describantur in plano harum rectarum & aliarum datarum, & angulorum dati CBE & recti ACL, duæ HCK, FAG, sectiones oppositæ, ita vt earum diameter transuersa sit recta AC; vertices A, C, rectum latus CL, & rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro AC transuersæ secundum angulum datum CBE possint spatia adiacentia recto lateri CL, excedentia figura simili ei quæ sub AC, CL continetur. Similiter per lemma 21. Dato quadrato rectæ AC & recta DE, repetiatur alia recta linea DR, quæ cum recta DE, efficiat rectangulum sub ED, DR, æquale quadrato rectæ AC: tùm per propos. præcedent. 55. datis duabus rectis ED, DR, ad angulos rectos sibi inuicem insistentibus in extremo D communi, describantur duæ sectiones oppositæ MDN, OEX, habentes pro diametro transuersa rectam ED, & rectum latus DR; & rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ diametro ED, in vtraque ipsarum, secundum angulum datum CBE, possint spatia adiacentia lateri recto DR, excedentia figura simili ei quæ sub ED, DR continetur. Dico sectiones istas oppositas vnà cum alijs duabus prædictis, esse coniugatas; ita vt datæ rectæ lineæ AC, DE, sint earum coniugatæ diametri; & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum aliarum: hoc est quod AC diameter transuersa oppositarum sectionum HCK, FAG, possit figuram sub ED, DR, aliarum oppositarum sectionum MDN, OEX; & quod diameter ED transuersa oppositarum sectionum MDN, OEX, possit figuram sub AC, CL, aliarum oppositarum HCK, FAG.

Demonstratio. Quandoquidem per apparatum rectangulum sub AC, CL est æquale quadrato rectæ DE, erunt tres proportionales AC, DE, CL, per propos. 17. libri 6. element. Est autem diameter transuersa AC diuisa bifariàm in B ex datis, ergo per defin. 3. inter secundas, punctum B erit centrum oppositarum sectionum HCK, FAG: est autem DE media proportionalis ostensa inter latera AC, CL, figuræ sub AC, CL; hoc est sub latere AC transuerso, & recto CL; inceditque per centrum B: ergo per defin. 4. inter secundas recta DE erit secunda diameter seu coniugata diametro AC transuersæ dictarum oppositarum sectionum HCK, FAG. Similiter quia per apparatum, rectangulum sub ED, DR, est æquale quadrato rectæ AC, erunt per propos. 17. libri 6. element. tres rectæ lineæ proportionales ED, AC, DR: estque diameter ED diuisa bifariàm in B ex datis; ergo per definit. 3. inter secundas punctum B erit centrum oppositarum sectionum MDN, OEX: probauimus autem rectam AC esse mediam proportionalem inter latera ED, DR, figuræ seu rectanguli sub ED, DR, inceditque per centrum B; ergo iuxta defin. 4. inter secundas, recta AC erit secunda seu coniugata diameter diametro ED transuersæ oppositarum sectionum MDN, OEX. Denique cùm demonstrauerimus diametrum AC transuersam sectionum oppositarum HCK, FAG, posse rectangulum sub ED, DR, lateribus figuræ

figurę aliarum oppositatum sectionum MDN, OEX: & diametrum ED transuersam sectionum oppositarum MDN, OEX, posse rectangulum sub CA, CL, lateribus figuræ aliarum oppositarum sectionum HCK, FAG: sectiones oppositæ descriptæ, erunt per definit. 32. inter secundas, sectiones oppositæ coniugatæ; conditionesque omnes in hac propositione datas obtinebunt; hôc est ita vt rectę lineæ datæ AC, DE, bifariàm diuisæ in B secundum quemcumque angulum datum CBE, sint coniugatæ diametri; & quarumlibet oppositarum duarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum, seu rectangulum sub lateribus transuerso ac recto aliarum duarum oppositarum sectionum. Atque ita fecerimus imperatum, & rectè factum probauerimus.

COROLL. NOSTRVM I.

Modi describendi in plano Parabolam, Hyperbolam, Ellipsim, & sectiones oppositas, traditi propositionibus proprijs 52. 53. 54. 55. sunt vniuersales: ex datis earum quibuscumque diametris transuersis, & lateribus earum rectis proprijs: non autem traditi à nobis in considerationibus nostris ad secundas definitiones, consideratione videlicet 41. 42. 43. 44.

NAm in dictis considerationibus datur axis, & latus eius rectum, vnde rectæ lineæ ordinatim applicatæ axi debent esse per definit. 18. inter primas, perpendiculares illi. In hisce verò propositionibus citatis datur quælibet diameter transuersa, siue sit axis, siue non; nam angulus rectilineus datus secundum quem debent ordinatim applicari rectæ lineæ ad datam transuersam diametrum, potest esse rectus, vel non rectus. Quare modi isti postremi sunt vniuersales, illi verò assignati in considerationibus sunt particulares ac determinati secundum angulum rectum rectilineum. Non tamen sunt reprehendendi, licet vniuersales sufficiant.

COROLL. NOSTRVM II.

Diameter data ad Parabolam in plano describendam per propositionem 52. rectè assignatur ab Apollonio ad vnum punctum determinata tantummodo necessariò.

DEbet enim illud punctum esse vertex in Parabola descripta: & licet sit infinita ex altero extremo nihil refert: nam ad eius aliud extremum nihil referunt eorum quæ ad praxim vel demonstrationem praxeos faciant: igitur rectè solùm assignatur ab Apollonio vnum eius determinatum punctum necessariò.

COROLLARIVM NOST. III.

Recta alia linea data diuersa ab diametro Parabolæ ad ipsam describendam in plano iuxta prop. 52. debet esse vtrimque terminata.

REctangulum enim factum ab illa, & portione diametri datæ inter verticem & rectam lineam ordinatim applicatam diametro datæ, ad quod comparatur quadratum ipsius rectæ lineæ ordinatim applicatę prædictæ iuxta propos. 11. & ipsam 52. cùm sit figura finita, debet habere latera finita ac determinata; cumque vnum latus huius figuræ sit alia recta linea data diuersa ab diametro data, consequens est vt ipsa recta de qua sermo est, sit vtrimque terminata.

COROLL. NOSTRVM IV.

Rectæ duæ lineæ requisitæ in propos. 52. ad Parabolam in plano describendam sunt inæquales, estque illa quæ diameter esse debet maior altera, si produci debeat Parabola linea curua.

IMprimis per corollarium nostrum 3. præcedent. recta data diuersa ab diametro data debet esse vtrimque determinata: diameter verò per coroll. 2. cùm necessariò ad vnum solum punctum determinetur; & possit assumi ad partes illius sui extremi infinita; tùm ab puncto extremo determinato possit per prop. 3. libri 1. element. sumi de illa infinita, æqualis alteri datæ; iterumque assumi linea infinita punctum aliud dissitum magis ab dato extremo determinato, versus infinitudinem; & per illud punctum ducere rectam lineam efficientem cum ea angulum æqualem dato per propos. 23. lib. 1. element. & sic deinceps: denique per puncta extrema mediæ proportionalis inueniendæ & ponendæ hinc & inde ab dicto puncto supra prædictam rectam, producere seu extendere lineam curuam Paraboles: manifestum est tunc necessariò diametrum debere esse maiorem altera data recta.

COROLL. NOSTRVM V.

Duæ datæ rectæ lineæ requisitæ ad describendam in plano Hyperbolam iuxta prop. 53. sunt vtrimque determinatæ ab Apollonio appositè.

CVm enim vna ex illis sit diameter transuersa seu transuersum latus Hyperboles quod per definit. 3. inter secundas, bifariàm diuiditur ab centro; necessum est vt vtrimque extremis proprijs terminetur, alioqui bifariàm diuidi non posset. Altera verò data linea, cùm debeat esse latus alterum figuræ latus finitæ, debet esse necessario vtrimque determinata punctis: quæ ratio etiam militat pro recta data alia

alia quæ diameter transuersa assumitur. Atque ita manifesta est assertio corollarij.

COROLL. NOSTRVM VI.

Duæ datæ rectæ lineæ ad Hyperbolam in plano describendam per prop. 53. possunt esse æquales, vel inæquales; & qualibet maior altera, vel minor.

Quomodocumque enim sint, modo sint vtrimque determinatæ per corollarium præcedens, fient omnia quæ apparatu ad demonstrationem propos. cit. 53. præcepimus, & demonstratio praxeos rectè institutæ sequetur, vti consideranti Geometræ patere potest facilè.

COROLL. NOSTRVM VII.

Duæ datæ rectæ ad sectiones oppositas in plano delineandas iuxta prop. 55. esse possunt æquales, vel inæquales; & qualibet maior altera, vel minor: modo sint ambæ terminatæ vtrimque.

Ambæ enim sectiones cùm sint hyperbolæ, communem habentes diametrum transuersam, & latera recta æqualia iuxta propos. 14. vel defin. 24. inter secundas; & ostenderimus in corollario 5. posse esse datas rectas quarum vna est diameter transuersa communis ambarum oppositarum, altera verò eius rectum latus, posse esse æquales vel inæquales, & quamlibet illarum rectarum maiorem vel minorem altera, modò sint punctis extremis suis determinatæ vtrimque iuxta corollarium 5. manifestum est propositum huius coroll. nostri sexti.

COROLL. NOSTRVM VIII.

Duæ datæ rectæ lineæ ad sectiones oppositas coniugatas in plano describendas iuxta prop. 56. præsentem possunt esse æquales, vel inæquales; & quamlibet illarum maiorem vel minorem altera determinate quis potest.

Nam æquè succedet apparatus & demonstratio allata, in quocumque casu ex assignatis, vti Geometræ recogitanti in hac præsente propositione quæ præcepimus & demonstrauimus manifestum est.

COROLL. NOSTRVM IX.

Duæ datæ rectæ lineæ ad Ellipsim ex præscripto propositionis 54. in plano describendam; possunt esse inæquales.

Nam constat ex nostro corollario 16. ad propos. 13. nullum latus rectum in Ellipsi esse æquale transuerso suo lateri proprio quod sit axis: ergo cùm vna ex datis rectis debeat esse latus rectum ellipseos describendæ, alia verò transuersa eius diameter vel latus transuersum; necessariò poterunt esse inæquales.



LEM-



quadratum esse æquale quartæ parti rectanguli dati altera parte longioris.

Demonstratio. Quadratum hoc factum est per coroll. nostrum ad prop. 20. lib. 6. elemen. sub quadruplum quadrati æqualis rectangulo dato altera parte longiori: ergo per prop. 7. lib. 5. element. erit etiam quarta pars rectanguli prædicti. Fecerimus ergo imperatum.

LEMMA III.

Producto vno latere anguli rectilinei vltra ipsum angulum; & ducta recta linea subtendente angulum exteriorem seu deinceps ad datum. Si ex angulo dato recta linea ponatur parallela prædictæ subtendenti angulum prædictum deinceps: diuidet ipsum datum angulum. Est nostrum.

Svppositio. Subtendat recta DB, angulum externum seu deinceps DAB, ad datum BAC: & recta linea AE ex puncto A anguli dati BAC posita recta linea AE parallela ipsi DB subtendenti angulum DAB deinceps prædictum. Dico rectam AE diuidere angulum BAC datum.

Demonstratio. Imprimis recta AE cum rectis BA, AC, angulum datum BAC continentibus, non potest congruere, quæ secantur seu conueniunt cum recta DB ex datis; alioqui contra defin. 34. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ DB, AE, positæ parallelæ, conuenirent. Sed neque ipsa recta AE non potest incidere intra triangulum DAB, sicuti recta AF; sic enim diuidendo angulum DAB dicti trianguli, producta vltra F tandem secaret per ax. 29. lib. 1. elem. rectam DB cui datur parallela, & sic destrueretur datum, vel idem absurdum quod supra eueniret contra def. 34. lib. 1. elem. sed neque extra angulos DAB, BAC prædictos incedere poterit recta AE parallela ipsi DB data, sicuti recta GA: nam producta vltra A, cùm insistat rectæ DAC, angulosque efficiat cum illa, necessariò in puncto A se mutuò intersecabunt per ax. 11. lib. 1. elem. & abibit vel intra triangulum DAB, vt recta GAH, vel intra locum anguli dati BAC vt recta GAE: si primum, producta secabit rectam DB cui datur parallela, vnde absurdum idem quod suprà, indicat hanc positionem esse falsam: restat igitur vt recta GAE posita ex angulo BAC dati puncto A, parallela rectæ DB subtendenti angulum eius deinceps BAD, diuidat ipsum angulum BAC datum: quandoquidem excluserimus omnes alios casus possibiles.

LEMMA IV.

Si duo rectangula æqualia, habuerint duo latera æqualia; vnum in vno, alterum in alio: erunt & alia duo æqualia, sub quibus & dictis continentur. Est nostrum.

Svppositio. Duo rectangula AC, DF, sint æqualia, comprehensumque illud sub lateribus AB, BC, istud sub lateribus DE, EF; sintque latera AB, DE æqualia, vnum AB in rectangulo AC, aliud DE in altero rectangulo DF. Dico reliqua BC, EF, esse æqualia.

Demonstratio. Cùm sint duo data rectangula AC, DF, æqualia, & angulos in B & E rectos habeant æquales per ax. 12. lib. 1. element. erit per propos. 14. lib. 6. element. vt AB ad DE, sic FE ad BC; dantur verò æqualia latera AB, DE, ergo per coroll. nostrum 2. ad prop. 14. lib. 5. element. erunt etiam æqualia latera FE, BC. Quod erat concludendum.

LEMMA V.

In omni rectilineo parallelogrammo quadrilatero: si duæ diametri ducantur, se mutuò bifariàm intersecabunt in vno inferiore puncto, ex quo si aliæ rectæ transmittantur versus latera opposita dicti parallelogrammi, ipsa secantia, parallela alijs lateribus; bifariàm etiam singula diuidentur in puncto illo; & resultabunt parallelogramma octo comprehensa in dato. Et si in parallelogrammo ducta sit recta per puncta media duorum eius laterum oppositorum, quæ bifariàm diuidatur: recta linea emissa ex hoc medio puncto ad angulos duos oppositos parallelogrammi, vnicam efficient rectam eius lineam diagonalem. Est nostrum.

Svppositio pro prima parte & secunda, & tertia, demonstranda. Datum sit ABCD parallelogrammum quadrilaterum, ductæque in eo diametri duæ AC, BD; has dico se mutuò intersecare in puncto G interiore bifariàm: ex quo puncto G si aliæ rectæ lineæ EGF, HGI, versus latera opposita, parallelæ alijs lateribus transmissæ sint, ipsa latera opposita secantia: Dico has rectas EGF, HGI, secare se mutuò bifariàm in G, & resultare octo parallelogramma DH, IB, DF, EB, EI, IF, EH, HF, comprehensa in dato parallelogrammo ABCD.

Demonstratio. Quandoquidem recta linea AC diagonalis diuidit bifariàm datum parallelogrammum, per prop. 34. lib. 1. elem. recta alia diagonalis BD traducta ab angulo B ad D angulum intra ipsum datum parallelogrammum obuiam diuidet diagonalem AC in puncto G interiore. Præterea cùm sint per defin. 35. lib. 1. element. latera AB, DC, opposita parallela; in eaque incidat diagonalis



per 1. lemma ad lib. 2. elem. compleantur rectangula OL, LX; illud sub LK, KO, istud sub LM, MX, vel KM. Et quia recta KO æqualis ipsi KE, minor est quàm recta KM, per 8. ax. lib. 1. elem. vel quàm recta MX æqualis ipsi KM, secabit recta OS parallela ipsi KL, obuiam rectam MX in puncto P: tùm per prop. cit. 11. lib. 1. elem. ex puncto H excitetur alia recta HR perpendicularis ipsi KL ad partes aliarum MX, LA, secabit in R latus XA, rectanguli LX: & resultabunt per lem. nost. 2. ad lib. 2. elem. diuersa rectangula, HA quidem sub HL vel KE æqualibus, & sub LA, vel HR, vel MX, vel KM, æqualibus ex facto apparatu, & prop. 34. lib. 1. elem. tùm rectangulum aliud MO, sub KM, KO vel KE æqualibus; tùm rectangulum aliud XH, sub MH & HR vel MX, vel KM æqualibus; tùm aliud rectangulum PR sub XR vel MH æqualibus, & sub PX vel ME æqualibus, nam si ab KM, MX æqualibus positis detrahantur æquales MP, KE, relinquentur per 3. ax. lib. 1. element. æquales PX, ME; tum aliud rectangulum HO, sub HK & KO, vel KE, vel MP, vel HL æqualibus. Denique aliud rectangulum HA, sub HL vel KE æqualibus, & sub LA, vel MX, vel KM æqualibus.

Demonstratio. Rectangulum HA, rectangulo MO erit æquale per lemma 49. ad lib. 1. horum conic. ob æquales longitudines LA, KM ostensas, & ob æquales latitudines HL, KO etiam probatas: quibus æqualibus rectangulis si addatur commune rectangulum XH, erit per 2. ax. lib. 1. elem. totum rectangulum LX vel MA, æquale rectangulo XH simul cum rectangulo MO, hoc est duobus simul rectangulis HO, PR: est verò rectangulum LX contentum sub LM, MK; & rectangulum HO contentum sub HK, KE; & rectangulum PR contentum sub HM, ME. Cùm igitur demonstrauerimus rectangulum HO simul cum rectangulo PR, æquale esse rectangulo LX; erit per 1. ax. lib. 1. elemen. rectangulum sub HM, ME, simul cum rectangulo sub HK, KE, æquale rectangulo sub KM, ML. Quod erat probandum.

LEMMA VII.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò bifariàm secent. Rectæ lineæ coniungentes extrema illarum ad easdem partes, respectu angulorum ad verticem intersectionis; erunt parallelæ & æquales. Et si harum parallelarum æqualium puncta media nectantur rectis lineis cum puncto intersectionis datarum primarum rectarum se mutuò bifariàm diuidentium, vnicam efficient rectam lineam; vel si puncta prædicta media, recta linea reuinciantur, ipsa incedet per punctum prædictum intersectionis primarum datarum, Est nostrum.

Supposítio. Duæ rectæ lineæ AB, CD, se mutuò bifariàm in E intersecent; ita vt EA, EB, sint portiones æquales totius AB; & EC, ED, sint portiones æquales totius CD. Dico primò ipsas rectas AD, BC, esse æquales, quæ vniunt puncta extrema A & D, tùm C & B, datarum sita ad easdem partes angulorum AED, CEB ad verticem E intersectionis mutuæ ipsarum datarum rectarum AB, CD. Quod si harum duarum rectarum AD, BC, puncta media F, G, vniantur cum puncto E intersectionis prædictæ, rectis lineis FE, GE; Dico 2. has efficere vnicam rectam lineam FEG. Quod si eadem puncta F, G, media, rectarum AD, BC, vinciantur recta linea FG; Dico tertiò hanc rectam FG transire per E punctum intersectionis rectarum primarum datarum AB, CD.

Demonstratio primæ assertionis. Quandoquidem per propos. 15. lib. 1. element. anguli contrapositi AED, BEC, sunt æquales; & ex datis sunt latera AE, ED, respectiuè æqualia lateribus BE, CE; erunt per 4. prop. lib. 1. elem. in triangulis AED, BEC, bases AD, BC æquales, & anguli EAD, EBC æquales, alterni incidente recta AEB, in rectas AD, BC, igitur per prop. 27. lib. 1. element. ipsæ rectæ AD, BC, paulò ante probatæ æquales, erunt etiam parallelæ, sicuti prima pars asserebar.

Demonstratio secundæ assertionis. Quoniam in triangulis EAF, EBG, latera EA, EB, dantur æqualia; & per ax. 7. lib. 1. elemen. latera AF, BG, vtpote dimidia æqualium AD, BC, ostensarum in prima assertione, sunt æqualia; & per prop. 29. lib. 1. elem. anguli in A & B, sunt æquales facti ab incidente recta AEB in parallelas ostensas AD, BC, in prima assertione; erunt per 4. prop. lib. 1. elem. anguli AEF, BEG, æquales: igitur per 4. propos. Procli, duæ rectæ FE, GE, in directum erunt, seu efficient vnam rectam lineam FEG.

Demonstratio tertiæ assertionis. Esto si fieri possit recta FG non transeat per punctum E; nihilominus rectæ EF, EG, rectam lineam efficiunt vti probauimus in secunda assertione, transibit igitur per punctum E. Iam verò quia hæc recta linea FEG incedens per E punctum, & alia ab aduersario introducta terminata eisdem punctis extremis F, G, non transit per E punctum; nihilominus per ax. 21. lib. 1. elem. congruere totæ debent; vel igitur introducta non transire per E punctum, incedet vt alia FEG, vel demonstrata FEG incedere per punctum E, non incedet vt alia introducta. Quodcumque autem eligatur ex his duobus eùm sit contradictorium, & deductum sit ex positione aduersarij contradicente huic tertiæ assertioni; ipsa positio contradicens erit falsa, & assertio vera.

æ
et.
nt
H
m.
et-
psi
um
ode
ſe-
no
rat
bus
erò
re-
Ao
ſtra
nſ-
am
ir-
en-
ſta
s.t.
go
æ-
hoc
gi-
el-
ur-
n-

M.

vne
uor

iſe
en-
tes
bri

B,
æ-
&
æ
ius
B
D,
lle
uæ
li-

ſnt
on-
eſt
pli
nis
B,

AB, est minor quàm CF prima pars alterius magnitudinis CD:) Ex puncto A detrahatur de magnitudine AB, recta AG æqualis rectæ CF; tunc punctum G erit vltra E versus B, quia maior ponitur CF quàm AE. Quod si datæ magnitudines fuerint aliæ quantitates quàm rectæ lineæ, tunc erit proportione seruata, ex alijs principijs de tota AB demere quantitatem æqualem ipsi CF, videlicet AG, quæ AG maior etiam erit quàm AE.

Demonstratio. Differentia inter AE & AG, est EG; ergo cùm sint per apparatum æquales magnitudines AG, CF; differentia inter AE & CF, erit EG, per 3.axio.lib.1.element. Sed etiam differentia inter EB, GB, est eadem EG prædicta; est autem GB æqualis ipsi FD, (si enim ab æqualibus datis AB, CD, demantur æquales positæ per apparatum AG, CF, relinquentur æquales GB, FD per cit. ax. 3.) ergo per idem axioma, eadem differentia erit EG, inter EB, FD. Igitur quæ differentia erit inter AE, CF, partes primas datarum magnitudinum æqualium, eadem erit inter secundas seu postremas EB, FD. Quod erat demonstrandum.

LEMMA X.

Si sint quatuor quantitates AE, EB, CF, FD, hoc ordine; & eadem differentia sit inter primam AE & tertiam CF, qua inter secundam EB, & quartam FD. Dico primam AE coniunctam secunda EB, esse æqualem aggregato ex tertia CF & quarta FD. Est Eutocij ad prop.48. libri huius 2.conic.

Consulendo figuram superioris lemmatis, sit apparatus huiusmodi. Iungantur in vnam AEB, prima AE, & secunda EB; tùm in vnam aliam CFD, tertia CF & quarta FD. Iam verò quia dantur differre prima AE & tertia CF, si detrahatur de tota AEB, vna AG æqualis ipsi CF, apparebit differentia illarum EG; atque ita patebit differentia EG inter AE primam, & AG seu CF tertiam: dantur autem differre secunda EB ab quarta FD, eâdem differentiâ quâ prima AE differt ab tertia CF; ergo etiam EG erit nota differentia inter secundam EB & quartam FD. Erit igitur secundum eandem differentiam EG, vt prima AE ad tertiam CF vel AG ipsi æqualem, sic secunda EB ad quartam FD. Quocirca si detrahamus ex EB secunda, differentiam prædictam EG qua differt ab quarta FD, relinquetur GB æqualis ipsi FD, ex natura subtractionis.

Demonstratio. Tota AEGB composita est ex AE prima, & EG differentia inter primam ipsam AE & tertiam CF, & ex GB æquali ipsi quartæ FD; & tota CFD, composita est ex tertia CF & quarta FD æquali ipsi GB; ostendimus autem AEG & CF esse æquales; tùm GB & FD. Igitur si æqualibus AEG, CF, addantur æquales GB, FD; GB quidem ipsi AEG & FD ipsi CF: fient per 2 axiom.lib.1.elem. AEGB, & CFD æquales; hoc est prima AE simul cum secunda EB, erit æqualis aggregato ex tertia CF & quarta FD. Quod erat demonstrandum.

LEMMA XI.

Circuli circumferentia facti centro ellipseos, interuallo maiore quàm sit semiaxis minor, minore tamen quàm sit semiaxis maior: secabit circumferentiam ellipseos in quatuor punctis, quorum duo erunt opposita secundum diametrum circuli facti & ellipseos, & alia duo opposita secundum diametrum aliam ipsius circuli & ellipseos: & non occurret alteri puncto ellipseos. Est nostrum.

Apparatus 1. Assumendo duos axes datæ ellipseos, maiorem EFG, & minorem HFI: nam omnium conceptu ipsa ellipsis longior est quàm lata; qui duo axes coniugati, sunt etiam diametri ellipseos, ac propterea se mutuò diuidunt bifariàm in centro F, per prop.30.lib. 1.tùm ad angulos rectos per 18.def.inter primas lib. 1. Assumatur autem quæcumque alia ellipseos diameter CFD, quæ maior sit quàm HFI axis minor, minor tamen quàm axis maior EFG; hæc diameter CFD, sicuti omnes aliæ diametri ellipseos, bifariàm in F centro diuidetur, per cit.prop.30.lib.1. quare per propos. 15. lib. 5.elem. FC maior erit quàm FH vel FI, sed minor quàm FG vel FE. Tùm ab extremo puncto C diametri CFD, transmittatur per 31.propos.lib. 1.elem. recta COA parallela ipsi HFI axi minori, hæc secabitur ab axe EFG bifariàm in puncto O, & ad angulos rectos. per 10.12.& 18.def.inter primas lib.1. eritque ad ipsum axē ordinatim applicata. Ducatur autem recta FA, quæ per 4. prop.lib. 1. element. æqualis erit ipsi FC, ob æqualia latera CO, FO, lateribus AO, FO, respectiuè, in triangulis rectangulis COF, AOF: etsi producatur recta AF vltra centrum F, donec attingat circumferentiam ellipseos in puncto B; erunt quatuor rectæ FC, FA, FD, FB, æquales inter se, per cit propos.30.lib.1.& per ax.1.lib.1.elem. Et quia ponitur recta FC minor quàm FE & quàm FG, demi poterunt per 3.prop.lib.1.elem.rectæ FK, FL, singulæ æquales minori FC; tùm quia ponitur recta FC maior quàm FH & quàm FI, producto ipso axe minore HFI vtrimque longissimè, poterunt detrahi per 3.prop.lib.1.elem.rectæ FM, FN, singulæ, æquales ipsi FC, & puncta extrema M, N, erunt extra ellipsim; puncta verò duo K, L, erunt intra ellipseos aream; & puncta quatuor C, A, D, B, erunt in ipsa circumferentia ellipseos. Cumque sint rectæ octo FC, FK, FA, FN, FD, FL, FB, FM, æquales ostensæ vel positæ; circumferentia circuli facti centro F, incedet iuxta 15.ax.lib.1.elem.per omnia puncta octo, C, K, A, N, D, L, B, M, terminantia illas æqua-



CFD; quarum prima secabit in I & K, circumferentiam circuli intra ellipseos aream, & secunda secabit circumferentiam ellipseos in N & O intra circuli aream: erit autem GFH diameter ellipseos maior quàm circuli diameter IFK, per 8. axio. lib. 1. elem. ideoque etiam maior quàm diameter AFB circuli prædicti, per 1. ax. lib. eiusdem cit. 1. elem. quæ diameter AFB est etiam diameter ellipseos. Sed alia diameter NFO, minor est per cit. ax. 8. quàm diameter circuli LFM; ergo per cit. ax. 1. minor etiam erit diameter NFO quàm diameter AFB, ellipseos; & multò minor quàm alia eiusdem ellipseos diameter GFH. Inæquales erunt igitur multæ diametri in ellipsi; vtpotè GFH, AFB, OFN. Sicuti fuit in prima parte huius corollarij propositum.

LEMMA XII.

Datis duabus rectis inæqualibus, CG prima maiore, GB secunda minore, & data tertia CB: addere ad hanc tertiam, aliam rectam, ita vt composita ex data CB & addita, sit ad ipsam additam, sicut prima CG ad GB secundam è datis. Est nostrum.

Apparatus. De prima CG, per propos. 3. lib. 1. element. maiore, detrahatur recta GE æqualis ipsi minori GB; recta CE erit differentia maioris CG, & minoris GB seu GE æqualium. Quia verò datur addenda rectæ CB alia quædam recta, Ita vt aggregatum ex CB & addita, sit ad additam, vt CG maior ad GB minorem: si eodem modo detrahamus ex illo aggregato ipsam additam, relinquetur recta CB pro excessu illius aggregati ex data CB & addita, supra ipsam additam. Iam verò tribus datis rectis lineis hoc ordine CE, EG, CB, reperiatur quarta linea recta proportionalis BD. Dico hanc rectam BD additam in directum ipsi CB datæ tertiæ, soluere propositum: ita vt sit CBD tota composita ex CB data & BD addita, ad ipsam additam BD, sicut est CG maior ad GB minorem.

Demonstratio. Quia per apparatum est CB ad BD, vt CE ad EG vel GB; erit per propos. 18. lib. 5. elem. componendo, vt CG ad GE vel GB, sic CBD ad BD. Atque ita fecerimus imperatum.

Aliter. Apparatus, Producatur prima maior CG data vltra G; & per prop. 3. lib. 1. element. sumatur in productione, recta GB æqualis minori datæ GB: tùm per 1. propos. lib. 1. elem. super recta CGB, fiat triangulum CAB æquilaterum: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto G agatur recta linea GFH parallela lateri CA, ad partes A, secabitur in F ab alio latere AB, per 1 5. prop. Procli; & per prop. 3. lib. 1. elem. sumpta recta FH æquali ipsi FG; & recta FK æquali ipsi FB, ducatur recta HK quæ erit per lemma 7. parallela ipsi GB, & æqualis ipsi; productaque vltra K, occurret in I, lateri AC, per cit. propos. 11. Procli; resultabitque parallelogrammum IHGC; vnde per propos. 34. lib. 1. element. rectæ IH, CG erunt æquales. Ad hæc transmittatur ex A per H recta linea AH producenda vltra H, hæc per prop. 11. Procli occurret in D, rectæ CGB, producendæ vltra B. Insuper per lemma 52. ad lib. 1. inter duo producta vel nō producta latera AC vel AB, trianguli CAB, accommodetur recta data linea eb tertia, parallela basi CGB, & producatur vltra b, donec occurrat in d, lateri AD producto, vel non producto, occurret enim per prop. 11. Procli. Dico esse rectam bd additam datæ cb, ita vt sit cbd ad bd, sicut est CG ad GB.

Demonstratio. Quandoquidem ex apparatu constat esse IH, CG, æqualea, tùm GB, KH; erit per prop. 7. lib. 5. elem. coroll. nostrum, IH ad HK, sicut CG ad GB: est verò per coroll. nostrum ad prop. 4. lib. 6. elemenr. IK ad KH, vt CB ad BD; & componendo est per propos. 18. lib. 5. elem. IH ad HK, vt CD ad DB; & ostendimus esse IH ad HK, sicut CG ad GB, ergo per propos. 11. lib. 5. element. erit CD ad DB, vt CG ad GB. Sed etiam est per nost. coroll. cit. ad propos. 4. lib. 6. elem. eb ad bd, sicut CB ad BD, ergo componendo erit per propos. 18. lib. 5. elem. ed ad db, sic CD ad DB: probauimus autem esse CD ad DB vt CG ad GB; ergo per propos. 11. lib. 5. elem. erit cd ad db, sicut CG ad GB. addidimus igitur datæ rectæ eb, rectam bd, ita vt tota composita cd sit ad superadditam bd, sicut datur maior CG ad minorem datam GB.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Data recta diuisa in duo segmenta inæqualia, addere rectam lineam; ita vt composita ex data & adiecta, sit ad superadditam, sicut segmentum maius data, ad segmentum minus eiusdem.

Svppositio. Data sit recta CB diuisa inæqualiter in G, ita vt CG sit segmentum maius, & GB minus: oporteatque ipsi datæ CB, addere rectam lineam aliquam; ita vt composita ex data & adiecta sit ad superadditam, sicut CG segmentum maius datæ CB, ad eius GB segmentum minus.

Apparatus. Fiat prima pars apparatus ad superioris secundæ methodi demonstrationem. Dico rectæ CB datæ, esse additam BD; ita vt sit tota composita CBD ad DB additam, sicut CG ad GB.

Demonstratio eadē quæ allata fuit in secunda methodo, inseruiet demōstrationi propositi.

Solutio lemmatis propositi in hoc corollario nostro, est per locum planum. Age verò soluamus illud per locum solidum.

Apparatus. Circa rectam CB describatur circulus centro A, puncto medio rectæ CB inueniendo per propos. 10. lib. 1. element. & per propos. 11. lib. eiusdem ex puncto G excitetur

ndo,
ndo
cut
ll.
ut
d-
&

a.
B,
o-
C;
n.
ll.
n-
ad
esse
p.11.
GC;
lib.6.
C,ergo
ement.
m, erit
imus au-
ut BG ad
GC;

GC; ergo per prop. 21. lib. 5. elem. erit d b data tertia vel ei æqualis ad d c compositam ex ipsa data d b, & ei addita in directum b c, sicut data minor BG ad maiorem GC datam.

LEMMA XIV.

Dato rectangulo, vel quadrato, & recta linea: adijcere alteram rectam lineam in directum ipsi data; ita vt rectangulum sub ipsa data & adiecta, tanquam vna recta linea, & adiecta, sit æquale ipsi dato rectangulo vel quadrato. Est nostrum.

SVppositio. Datum sit quadratum sub recta DE; vel si datum sit rectangulum, reducatur per prop. 14. lib. 2. elem. ad quadratum, cuius latus sit DE; vel per coroll. nostrum 3. ad prop. 35. lib. 3. elem. vel per coroll. nost. 5. ad prop. 36. lib. eiusdem 3. elem. sitque alia recta data FG: oporteatque rectæ FG adijcere aliam rectam in directum; ita vt rectangulum sub data FG & adiecta veluti vna recta, & sub adiecta sit æquale quadrato super recta DE, ideoque etiam per 1. axioma lib. 1. elem. dato rectangulo conuerso in æquale quadratum lateris DE.

Apparatus. recta FG diuidatur bifariàm in H per prop. 10. lib. 1. elem. tùm per prop. 11. lib. 1. eiusdem ad extremum E lateris DE excitetur ad vnam partem recta linea EH perpendicularis ipsi DE, ponaturque per 3. propos. lib. elem. recta EH æqualis ipsi FH semissi datæ rectæ FG. Tum ducatur recta DH, complens triangulum rectangulum DEH: centroque H, interuallo autem HE describatur circulus EFG quem tanget in E recta linea DE perpendicularis semidiametro EH circuli facti, idque per coroll. prop. 16. lib. 3. elemen, secabitque circumferentia circuli facti in F, latus DH subtensum angulo recto DEH, quia maius est per prop. 19. lib. 1. elem. latere HE subtenso angulo D acuto per coroll. 1. propos. 17. lib. eiusdem 1. elem. Producatur verò recta DFH ultra H centrum circuli facti, donec occurrat in G puncto circumferentiæ: erunt per defin. 15. lib. 1. elem. rectæ HE, HG, æquales; tùm etiam HE, HF, HG, æquales; ideoque tota FG diameter circuli facti erit æqualis datæ rectæ FG, si enim æqualibus FH semidiametro circuli & FH semissi datæ FG, æquales addantur rectæ HE, HG, per 2. ax. lib. 1. element. erunt totæ FG data & FHG diameter circuli, æquales per 2. ax. lib. eiusdem 1. elem. Iam assero rectam DF esse quæsitam rectam, quæ adiecta datæ FG, soluat propositum; ita vt rectangulum sub DG recta composita ex data GF, & ei adiecta FD in directum, tanquam vna recta, & sub adiecta FD, sit æquale quadrato lateris DE, vel rectangulo dato & conuerso in æquale quadratum lateris DE.

Demonstratio. Quoniam recta DE circulum contingit in E per apparatum, & ab puncto D extra circulum sito iuxta prop. 16. lib. 3. elem. deducta est recta linea DFG ipsum circulum secans; erit per prop. 36. lib. 3. element. rectangulum sub tota secante DFG, & sub eius segmento DF, æquale quadrato rectæ DE. Recta autem secans DFG, est composita ex data FG vel ei æquali, & ex adiecta FD, & adiecta est recta FD, & DE est latus quadrati. Ergo rectangulum sub recta FG & ei adiecta FD in directum, tanquam vna recta, & sub ipsa FD adiecta, erit æquale quadrato dato lateris DE, vel dato rectangulo conuerso in æquale quadratum lateris DE; atque ita propositum erit ad praxim reductum.

COROLL. NOSTRVM I.

Eisdem datis, & factis: rectangulum sub DG, DF, erit applicatum ad rectam datam GF, excedens figura quadrata, recta DF.

PRima pars est manifesta ex defin. 6. lib. 6. elem. vltima explicatur; cum enim sit rectangulum sub DG, DF, angulus in D erit rectus; & si sumatur recta DF pro altitudine huius rectanguli, erit rectangulum sub DF altitudine, & basi DF, quadratum, ob æqualitatem laterum duorum efficientium angulum rectum. igitur excessus erit quadratum rectæ DF.

COROLL. NOSTRVM II.

Ad datam rectam lineam applicare rectangulum æquale dato rectilineo, excedens figura quadrata.

PEr prop. 45. lib. 1. element. datum rectilineum reducatur ad rectangulum; & hoc rectangulum reducatur ad quadratum per propos. 14. lib. 2. elem. cuius latus sit exempli gratiâ recta DE. Sitque data recta FG ad quam applicandum sit rectangulum æquale quadrato lateris DE, ideoque etiam æquale dato rectilineo iuxta 1. ax. lib. 1. elem. Præterea per hoc lemma 14. quia datur quadratum lateris DE, & alia recta FG; poterimus datæ rectæ FG adijcere in directum rectam FG, ita vt rectangulum sub DG, tota composita ex data FG & ei adiecta in directum FD, & sub adiecta FD, sit æquale dato quadrato super latere DE: quod rectangulum erit per præcedens nost. coroll. 1. applicatum ad datam rectam FG, æqualeque ostensum quadrato rectæ DE, & excedens figura quadrata rectæ DF. Atque ita

LEMMA XV.

Datis duabus rectis alteri earum alteram in directum adijcere; ita vt alia è datis sit media proportionalis inter compositam rectam ex altera & adiecta tanquam vnam, & inter adiectam. Est nostrum.

Suppo-

omnes recti rectilinei æquales per 12. ax. lib. eiusdem. Igitur ijdem anguli BACC, & DACC, erunt æquales & inæquales. Quod est absurdum: ergo falsa erit positio vnde est deducta: nimirum quod recta AC perpendicularis chordæ AB circuli non incedenti per centrum D, non secet circulum in A & C: secabit igitur, sicuti propositum fuit in hoc lemmate, quod ideo demonstratum erit.

LEMMA XX.

Si recta linea secetur quomodocumque. Quadratum totius, maius est rectangulo sub tota & quolibet eius segmento. Est nostrum.

SVppositio. Recta linea AB secta sit quomodocumque in quotlibet partes, verbi gratiâ duas AC, CB, æquales vel inæquales. Dico quadratum totius AB, esse maius rectangulo sub tota ipsa AB, & quolibet eius segmento, AC vel CB.

Apparatus. Concipiatur rectangulum sub tota AB, & quolibet eius segmento: Certè eùm quadratum sit etiam rectangulum; quadratum istud & rectangulum eandem habebunt altitudinem, videlicet eandem rectam datam AB, perpendicularem basibus suis proprijs, videlicet ipsi AB, tùm segmento alterutro è partibus factis ipsius AB.

Demonstratio. Quandoquidem quadratum rectæ AB, & rectangulum sub AB & vno ex eius segmentis AC vel CB, eandem obtinent altitudinem; erit per prop. 1. lib. 6. elem. quadratum rectæ AB ad rectangulum sub AB & vno ex eius segmentis AC, vel CB, sicut basis AB, ad AC vel CB basim: est autem per 8. axioma libri 1. element. tota AB maior quàm AC vel CB; ergo quadratum rectæ AB maius est rectangulo sub tota ipsa AB, & eius segmento AC vel CB. Quod erat probandum.

LEMMA XXI.

Si figurarum similium, similiterque positarum rectilinearum; prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: erit prima latus homologum ad secunda latus homologum, maiorem habens rationem, quàm tertia latus homologum ad quarta latus homologum. Et si prima ad secundam minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, prima latus homologum ad secunda latus homologum, minorem obtinebit rationem, quam tertiæ latus homologum ad quarta latus homologum. Est nostrum.

SVppositio. Sint figuræ similes rectilineæ, similiterque positæ, A, B, C, D; sitque A ad B in maiori ratione quàm C ad D. Dico latus homologum primæ A ad latus homologum secundæ B maiorem habere rationem, quàm latus homologum tertiæ C ad latus homologum quartæ D. Quod si prima A ad secundam B habeat minorem rationem, quàm tertia C ad quartam D: assero latus homologum primæ A minorem habere rationem ad latus homologum secundæ B, quàm latus homologum tertiæ C ad latus homologum quartæ D.

Demonstratio. Per prop. 20. lib. 6. elem. Similia polygona rectilinea habent duplicatam rationem laterum homologorum: ergo cùm figura prima A ad secundam B detur habere maiorem rationem quàm tertia C ad quartam D, maior erit ratio duplicata lateris homologi primæ A ad latus homologum secundæ B, quàm lateris homologi tertiæ C ad latus homologum quartæ D: Quod si prima A ad secundam B detur habere minorem rationem quàm tertia C ad quartam D; minor erit ratio duplicata lateris homologi primæ A ad latus homologum secundæ B, quàm lateris homologi tertiæ C ad latus homologum quartæ D. Ergo in primo casu, maior erit ratio lateris homologi primæ A ad latus homologum secundæ B, quàm lateris homologi tertiæ C, ad latus homologum quartæ D: & in secundo casu, minor erit ratio lateris homologi primæ A ad latus homologum secundæ B, quàm lateris homologi tertiæ C ad latus homologum quartæ D. Quæ omnia erant demonstranda.

LEMMA XXII.

Si sint duo triangula ABC, DEF, & BC habeat maiorem rationem ad CA, quàm EF ad FD; sitque angulus C æqualis angulo F. Dico angulum B esse minorem angulo FED. Est lemma 6. Pappi ad hunc librum secundum.

APparatus, per prop. 12. lib. 6. elem. datis tribus rectis hoc ordine, BC, CA, EF, reperiatur quarta proportionalis FG: erit igitur EF ad FG, sicut BC ad CA; sed datur BC ad CA maiorem habere rationem quàm EF ad FD; ergo per prop. 13. lib. 5. elemen. EF ad FG maiorem obtinebit rationem quàm EF ad FD: igitur per prop. 10. lib. 5. elemen. FG erit minor quàm FD; poterimus ergo per prop. 3. lib. 1. elemen. de maiore FD detrahere rectam FG æqualem ipsi FG inuentæ, & ducere rectam EG: vnde resultabit triangulum EGF, cuius angulus FEG erit minor angulo FED, per 8. axioma lib. 1. elem.

Demonstratio. In duobus triangulis ACB, GFE, cùm dentur anguli C & F, æquales, circa quos sunt per apparatum proportionalia latera, videlicet BC ad CA, sicut EF ad FG; erunt per propos. 6. libri 6. element. ipsa triangula æquiangula, & anguli CBA, FEG, æquales; Sed angulus FEG est minor angulo FED; ergo per 1. axioma libri 1. element. angulus B ostensus æqualis angulo FEG, minor

n-
go
m.
es:
ic;
o-
m
o-
æ-
gi-
gu-
de-
nsi
uli
DH
,6.
um
bri
ſi.

e-
ab
in-

C,
tas
bus
ri-
ri-
im
o-

n-
m
m
e.

ſe-
r.
m
ad
n
n

A
-
m
d
er
er
t

.

LEMMA XXV.

Dato rectangulo, & quadrato, & altero rectangulo, ordine predicto: Reperire quadratum, ad quod sit rectangulum datum postremum, sicut rectangulum primum ad quadratum datum. Est nostrum.

SVppositio. Datum sit primum rectangulum ABCD, & quadratum N, & aliud rectangulum secundum GHIK: Oporteatque reperire aliud quadratum, puta O, ad quod rectangulum postremum seu secundum datum GHIK, eandem habeat rationem, quam rectangulum ABCD datum primum obtinet ad quadratum N datum.

Apparatus. Per prop. 45. lib. 1. element. vel per lemma nostrum 1. propositionis 22. lib. 10. elem. ad rectam datam lineam DC, quæ est vnum latus rectanguli dati primi, applicetur rectangulum DCFE æquale quadrato dato N: Tùm per prop. 12. lib. 6. elem. datis tribus rectis lineis hoc ordine AD, DE, GK, reperiatur quarta proportionalis; cui per 3. ax. lib. 1. elem. de producta GK, vltra K, sumatur æqualis KL: & per nostrum lemma 1. ad lib. 2. elem. perficiatur rectangulum KIML sub KL, KI. Denique per prop. 14. lib. eiusdem 2. element. conuertatur rectangulum KIML in æquale quadratum O. Dico rectangulum GHIK ad quadratum O esse, vt rectangulum ABCD ad quadratum N.

Demonstratio. Quia sunt per apparatum quatuor rectæ lineæ proportionales AD, DE, GK, KL; & rectangula supra AD, DE, eandem habent altitudinem DC; tùm rectangula supra GK, KL, eandem habent altitudinem KI: erit per prop. 1. lib. 6. elemen. rectangulum ABCD ad rectangulum DCFE, sicut AD ad DE; tùm etiam rectangulum GHIK ad rectangulum IKLM, vt GK ad KL: ergo per prop. 11. lib. 5. element. erit rectangulum ABCD ad rectangulum DCEF, sicut rectangulum GHIK ad rectangulum KIML. Sunt autem per apparatum æqualia, rectangulum DCFE, & quadratum N; tum æqualia, rectangulum KIML, & quadratum O; ergo per prop. 7. & 11. lib. 5. element. vt rectangulum ABCD ad quadratum N, sic erit rectangulum GHIK ad quadratum O. Atque ita ad praxim reduxerimus propositum, & rectè factam demonstrauimus.

LEMMA XXVI.

Si duo triangula ABC, EFG, habuerint ab verticibus A & E, deductas rectas AD, EH, perpendiculares ad opposita dictis verticibus latera BC, FG, producta vel non producta; sintque segmenta laterum dictorum proportionalia, (hoc est sit BD ad DC, vt FH ad HG;) sintque rectangula sub dictis segmentis ad quadrata propriarum perpendicularium proportionalia, (hoc est sit rectangulum sub BD, DC, ad quadratum rectæ DA, vt rectangulum sub FH, HG, ad quadratum rectæ HE. Dico primò tota triangula data ABC, EFG, similia esse. Secundò reliqua triangula in quæ diuiduntur data ab dictis perpendicularibus rectis, esse similia respectiuè. (hoc est triangulum ABD esse simile triangulo EFH; & triangulum ADC esse simile triangulo EHG. Est Federici Commandini ad prop. 52. libri huius secundi.

DEmonstratio. Quandoquidem est ex datis vt BD ad DC, sic FH ad HG; tùm est per 1. prop. lib. 6. element. vt BD ad DC, sic quadratum rectæ BD ad rectangulum sub DC, BD; & vt FH ad HG, sic quadratum rectæ FH ad rectangulum sub HG, FH: erit per propos. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ BD ad rectangulum sub DC, BD, sic quadratum rectæ FH ad rectangulum sub HG, FH. Est verò ex datis, vt rectangulum sub DC, BD, ad quadratum rectæ AD, sic rectangulum sub HG, FH, ad quadratum rectæ EH: igitur per 22. prop. lib. 5. element. ex æqualitate erit, vt quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ AD, sic quadratum rectæ FH ad quadratum rectæ EH: quare per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt recta BD ad rectam DA, sic recta FH ad rectam EH. Ex eisdem principijs probabimus esse rectam CD ad rectam AD, sicut recta GH ad rectam EH. Quoniam igitur circum angulos æquales rectos in D & H, habemus latera proportionalia; erit per 6. prop. lib. 6. elem. & defin. 1. lib. eiusdem, triangulum EHF erit simile triangulo ADB; & triangulum EHG, simile triangulo ADC: ac proinde angulus FEH æqualis angulo BAD; & angulus HEG æqualis angulo DAC. Angulus ergo FEG totalis erit æqualis angulo BAC totali, per 2. ax. lib. 1. element. si angulis ostensis æqualibus addantur æquales ostensi. Sed quia in triangulis ADB, EHF, sunt ostensi anguli BAD, FEH æquales; suntque anguli in D & H recti ex datis, ideoque æquales per ax. 12. lib. 1. elemen. erunt reliqui anguli in B & F æquales per coroll. nostrum 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. æquiangula ergo erunt triangula data totalia ABC, EFG, quandoquidem probauerimus angulos BAC, FEG æquales, tùm angulos ABC, EFG æquales, & reliqui in C & G sint æquales per coroll. nostrum 3. ad propos. 32. lib. 1. elem. quare dicta triangula data BAC, FEG, per prop. 4. lib. 6. element. obtinebunt latera proportionalia circum æquales angulos: quocirca per defin. 1. lib. 6. elemen. erunt similia. Probauimus autem triangulum BAD esse simile triangulo BAC, & triangulum DAC simile triangulo HEG: ergo etiam triangula in quæ diuiduntur data ab rectis AD, EH perpendicularibus ad latera BC, FG, producta vel non producta, demissis ab verticibus A & E, erunt respectiuè similia, sicuti fuit propositum.



LEMMA XXVII.

Si sint duo triangula ABC, DEF, habentia angulos in B & E æquales; triangulum verò ABC habuerit angulum A minorem angulo EDF, trianguli DEF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quàm FE ad ED. Est Pappi lemma 11. ad hunc lib.

APparatus. Quia datur angulus EDF maior angulo A; poterimus per propos. 23. lib. 1. element. ad punctum D, rectæ ED, constituere versus DF, angulum EDG æqualem angulo dato A, trianguli BAC; & hic angulus factus EDG, continebitur in maiore EDF quàm BAC; diuidet ergo recta DG, angulum EDF, quare per axioma 29. libri 1. element. recta DG secabit rectam EF in puncto G.

Demonstratio. Quandoquidem in triangulis ABC, DEG, sunt anguli in B & E æquales ex datis; factique sunt anguli A, EDG, æquales per apparatum: erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui tertij anguli C, EGD, æquales: ideoque triangula BAC, EDG, erunt æquiangula: quare per propos. 4. lib. 6. elem. erit vt CB ad BA, sic GE ad ED; sed per prop. 8. lib. 5. elem. GE ad ED, minorem habet rationem quàm FE ad ED: ergo per coroll. nost. 5. ad prop. 13. lib. 5. element. CB ad BA minorem habebit rationem quàm FE ad ED, quomodo fuit propositum.

LEMMA XXVIII.

Si duæ quantitates habuerint ad duas alias; singulæ antecedentes ad suas proprias consequentes, eandem, vel diuersam rationem: dimidia antecedentium ad easdem consequentes suarum totarum propriarum antecedentium; habebunt eandem, vel diuersam rationem, quam habebant suæ propriæ antecedentes totales. Est nostrum.

SVppositio. Duæ quantitates antecedentes A, C, habeant ad suas consequentes B, D, eandem, vel diuersam rationem; hoc est sit A ad B, vt C ad D; vel A ad B habeat maiorem rationem, quàm C ad D; vel A ad B habeat minorem rationem, quàm C ad D; sitque E semissis ipsius A, & F semissis ipsius C. Dico esse E ad B, sicut F ad D; vel E ad B habere maiorem rationem, quàm F ad D; vel E ad B habere minorem rationem quàm F ad D: prout antecedentes totales A & C, fuerint ad suas proprias consequentes B & D, modo assignato.

Demonstratio in casu quo sit A ad B, vt C ad D. Per prop. 15. lib. 5. element. est E ad F vt A ad C; ergo per prop. 16. lib. 5. elemen. erit permutando E ad A sicut F ad C; sed ex datis est A ad B vt C ad D: ergo per prop. 22. lib. 5. elem. ex æquo erit E ad B, vt F ad D.

Demonstratio in casu quo A habeat ad B maiorem rationem, quàm C ad D. Per prop. 15. lib. 5. elem. est E ad F, vt A ad C; estque permutando iuxta prop. 16. lib. 5. elem. E ad A, vt F ad C; datur verò A ad B maiorem habere rationem, quàm C ad D: ergo ex æqualitate per coroll. nostrum 1. ad prop. 31. lib. 5. elem. erit E ad B in maiore ratione, quàm F ad D, sicuti fuit assertum.

Demonstratio in casu quo sit A ad B in minori ratione quàm C ad D. Per prop. 15. lib. 5. elem. est E ad F, vt A ad C; estque per propos. 16. lib. eiusdem 5. vicissim E ad A, vt F ad C; daturque A ad B in minore ratione quàm C ad D: ergo per coroll. nostrum 2. ad propos. 31. lib. 5. element. E ad B minorem rationem obtinebit, quàm F ad D. Atque ita propositum demonstrauerimus.

LEMMA XXIX.

Datarum quatuor quantitatum, si prima ad secundam habuerit maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: reperiendo aliam quartam, ad quam sit tertia vt prima ad secundam. Dico hanc repertam quantitatem esse minorem quarta data. Est nostrum.

SVppositio. Prima A quantitas ad secundam B habeat maiorem rationem, quàm C tertia ad quartam D; Repertaque sit alia quantitas E quarta, ad quam tertia C habeat eandem rationem quam prima A ad secundam B. Dico quartam repertam E esse minorem quarta data D.

Demonstratio. Est C ad E vt A ad B; estque A ad B in maiore ratione quàm C ad D ex datis: ergo per prop. 13. lib. 5. elem. C ad E maiorem habebit rationem, quàm C ad D: igitur per prop. 10. lib. 5. elem. E reperta quarta quantitas minor erit quàm D quarta data. Quod erat concludendum.

LEMMA XXX.

Si fuerint duo triangula similia KLE, XSP; productisque lateribus EL, PS, vltra L & S, in H & M, ita vt sit rectangulum sub HL, LE, ad quadratum rectæ KL, sicut rectangulum sub MS, SP, ad quadratum rectæ XS: Ductis rectis KH, XM, Erit triangulum HLK, simile triangulo MSX; totumque triangulum HKE, toti triangulo MXP simile. Est nostrum.

DEmonstratio. Quia datur vt rectangulum sub EL, LH, ad quadratum rectæ KL, sic rectangulum sub PS, SM, ad quadratum rectæ SX; erit eadem ratio inter dictas quatuor quantitates; seu æquales erunt rationes, vna inter primam & secundam, altera inter tertiam & quartam: Proportio autem rectanguli sub EL, LH, ad quadratum rectæ KL, per prop. 23. lib. 6. elem. componitur ex ratio-



LEMMA XXXIII.

Si ad vnam rectam lineam sint similiter inclinatæ inæquales rectæ lineæ parallelæ, eamque attingant: Extrema alia maiorum rectarum huiusmodi parallelarum, magis distabunt ab dicta recta linea, quàm extrema minorum parallelarum. Est nostrum.

SVppositio. Ad rectam lineam AB, sint similiter inclinatæ rectæ lineæ DC, EF, parallelæ inuicem: sitque maior DC quàm FE; & attingant rectam AB in C & E punctis. Dico quod D aliud extremum maioris rectæ DC, magis distet ab data recta AB, quàm aliud extremum F, alterius rectæ FE datæ minoris.

Apparatus. Quandoquidem dantur rectæ lineæ DC, FE, similiter inclinatæ ad rectam AB, erunt anguli inclinationum ex vna parte acuti, videlicet DCA, FEA; si enim essent recti, non dicerentur propriè inclinatæ ad rectam AB lineam, sed perpendiculares. Igitur per propos. 12. lib. 1. element. poterimus ex punctis D & F, demittere rectas lineas perpendiculares DG, FH, ad datam rectam AB, quæ per coroll. 2. ad propos. 17. lib 1. element. cadent ad partes prædictorum angulorum acutorum: & resultabunt triangula DGC, FHE, quorum anguli in G & H erunt æquales vtpote recti; sed & dantur alij anguli in E & C æquales ob similitudinem inclinationum ad rectam AB; vel per propos. 29. lib. 1. element. probabuntur æquales, incidente recta AB, in parallelas datas DC, FE: reliqui igitur eorum anguli in F & D erunt æquales per corollar. nostrum 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. Quare ipsa triangula DGC, FHE, erunt æquiangula. His paratis fit propositi

Demonstratio. Quandoquidem triangula DGC, FHE. sunt æquiangula ostensa; erit per 4. propos. lib. 6. element. vt CD ad DG, sic EF ad FH; sed ex datis prima CD maior est quàm tertia EF; ergo per propos. 14. libri 5. element. secunda DG maior erit quàm quarta FH. Igitur cùm distantia punctorum ab recta linea sumatur penes rectas lineas perpendiculares ab ipsis punctis ad ipsam rectam lineam; & probauerimus rectam lineam DG perpendicularem ab puncto D ad rectam AB, esse maiorem recta alia FH perpendiculari ab puncto F ad eandem rectam AB: punctum D erit remotius quàm punctum F, ab recta AB. Quod erat concludendum.

LEMMA XXXIV.

Rectarum æqualium linearum inæqualiter inclinatarum ad eandem rectam lineam, eamque attingentium vno è suis extremis: punctum aliud extremum minus inclinatæ, magis distat ab dicta recta, quàm aliud extremum magis inclinatæ. Est nostrum.

SVppositio. Ad eandem rectam lineam AB, sint rectæ lineæ æquales CD, EF, inæqualiter inclinatæ; & suo extremo C, recta CD attingat ipsam AB; tùm alia recta EF, suo extremo E, eandem rectam AB attingat; sitque recta CD minus inclinata quàm EF; hoc est angulus DCB acutus sit maior angulo acuto FEB. Dico quod extremum D, rectæ CD minus inclinatæ ad rectam AB, sit magis remotum ab recta AB; quàm aliud F punctum rectæ EF magis inclinatæ ad eandem rectam AB.

Apparatus. Centro C, interuallo CD describetur circulus secans in N, rectam AB: & per propos. 23. lib. 1. element. ad punctum C, rectæ NC, fiat angulus NCI æqualis minori acuto angulo FEB: hic angulus minor NCI factus continebitur in maiore DCB; ideoque recta CI diuidens angulum maiorem DCB, secabit circumferentiam circuli facti, in puncto I sito inter D & N: nam per prop. 33. lib. 6. element. corollarium nostrum, arcus NI minor erit quàm arcus ND. Præterea ex punctis D, I, F, demittantur per prop. 12. lib. 1. elem. rectæ lineæ DG, IK, FH; perpendiculares ad rectam AB. Tunc verò ex coroll. nostr. 2. ad propos. 16. lib. 12. elem. recta IK secabit semidiametrum CN facti circuli in puncto K sito inter G & N puncta.

Demonstratio. In triangulis CIK, EFH, quia duo anguli ICK, FEH, sunt facti æquales, & sunt anguli in K & H recti æquales per axio. 11. lib. 1. element. erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. element. reliqui eorum anguli tertij æquales CIK, EFH. quare cùm sint dicta triangula æquiangula, erit per 4. prop. lib. 6. elem. vt CI ad IK, sic EF ad FH; tùm vt CI ad CK, sic FE ad EH; CI autem est æqualis ipsi CD per defin. 15. lib. 1. elemen. & EF ipsi CD ex datis, ergo per 1. axio. lib. 1. elem. CI est æqualis ipsi EF, prima tertiæ: ergo per prop. 14. lib. 5. element. IK secunda erit æqualis quartæ FH, in prima comparatione; & recta CK secunda erit æqualis quartæ EH in secunda comparatione. Productis autem rectis DG, IK, vltra semidiametrum CN, vsque ad L, M, puncta alia circumferentiæ circuli diuersa ab D & I; secabuntur chordæ DGL, IKM, bifariàm in G, & K, per prop. 3. lib. 3. element. eò quod secentur ad angulos rectos ab semidiametro CN: Est autem CK maior quàm CG; ergo per defin. 4. lib. 3. elem. chorda IM remotior erit ab centro C, quàm chorda DL:

quare per prop. 15. lib. eiusdem 3. elem. chorda IM erit minor quàm chorda DL: ergo per prop. 15. lib. 5. elem. semissis IK illius minoris IM, erit minor semisse DG istius maioris DL; sed ostensa est FH æqualis ipsi IK; ergo per 1. ax. lib. 1. element. etiam FH erit minor quàm DG per 1. ax. lib. 1. elem. Cùm igitur distantia punctorum ab recta linea æstimetur ex rectis lineis ab eis demissis perpendiculariter ad rectam; & probauerimus rectam lineam FH perpendicularem rectæ AB ex puncto F extremo rectæ FE magis inclinatæ, esse minorem recta linea alia DG perpendiculari ad eandem rectam AB ex puncto D extremo rectæ lineæ DC minùs inclinatæ ad eandem rectam AB: punctum D minus inclinatæ magis distabit ab recta linea AB, quàm punctum F magis inclinatæ. Quod erat probandum.

LEMMA XXXV.

Rectam datam lineam AB diuidere in duo segmenta; AG, GB; ita vt rectangulum sub illis sit æquale dato quadrato, cuius latus non sit maius dimidio totius rectæ datæ AB.

Apparatus. Diuidatur per prop. 10. lib. 1. elem. recta AB bifariàm in C; & centro C, interuallo CA, vel CB describatur circulus, cuius diameter erit recta data AB. Tùm per prop. 11. lib. 1. eiusdem 1. elem. ex punctis A, & C, erigantur rectæ lineæ AD, CE, perpendiculares diametro AB, ad vnam eius partem: recta AD tanget circulum per propos. 16. lib. 3. elem. & alia recta CE occurrens circumferentiæ circuli in E, erit eius semidiameter. Præterea per propos. 3. lib. 1. elem. de semidiametro CE dematur recta CF æqualis lateri dato quadrati minori quàm CE; & de recta alia AD dematur recta AD æqualis eidem dato lateri; punctaque D, F, vniantur recta linea DF, quæ obuiam circumferentiam circuli secabit in puncto I; ab quo per prop. 12. lib. 1. elem. demittatur recta linea IG perpendicularis diametro AB. Dico rectam AB sectam esse in G, ita vt rectangulum sub AG, GB, segmentis eius sit æquale dato quadrato lateris CF.

Demonstratio. In rectangulo DG resultante, latus IG æquale est lateri AD æquali lateri dati quadrati. Et quia recta IG est demissa ab puncto I circumferentiæ circuli ad eius diametrum AB perpendicularis; erit per lemma 47. ad lib. 1. Apollonij, quadratum rectæ IG æquale rectangulo AG, GB; igitur per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum idem sub AG, GB erit æquale dato quadrato. Ergo diuiserimus rectam AB iuxta propositum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Rectangula sub segmentis duobus recta linea diuisa iuxta methodum apparatus ad demonstrationem huius lemmatis; vel sub segmentis diametri circuli duobus, adæquantibus totam ipsam diametrum; deficiunt quadrato minoris segmenti si diuisa fuerit diameter in duas partes inæquales; vel semissis eius si diuisa fuerit bifariàm; suntque applicata datæ rectæ.

Cvm enim latus vnum rectanguli sit portio minor diametri, vel eius semissis, & latus aliud sit aliud segmentum eiusdem diametri prædictum; manifestum est fieri quadratum ex duobus æquis lateribus; & iuxta prop. 28. lib. 6. elem. rectangulum prædictum applicatum ad diametrum circuli, deficiens quadrato.



COM-

COMMENTARIVS
IN DEFINITIONES
A NOBIS ADDITAS AD
LIBRVM II.
CONICORVM
APOLLONII PERGÆI.

I.

Figuram vocat. Rectangulum sub transuerso & recto latere sectionis conicæ.



HÆc definitio iam proposita est libro primo definitione 31. inter secundas. Figuræ enim nomine vtitur Apollonius modo prædicto definitę. Quod si ex antedictis vel adiunctis figuræ nomen aliud connotet, relinquitur prudenti lectori figuræ nominis intelligentia.

II.

Quartam partem figuræ vocat. Rectangulum vel quadratum quod est æquale quartæ parti figuræ definitæ definitione præcedente prima.

QVomodo verò sumenda sit quarta pars figuræ prædictæ, quæ quarta pars sit rectangulum vel quadratum; sic erit operandum. Quodlibet latus figuræ de qua sermo est, bifariàm secetur per prop. 10. lib. 1. elem, & iterum bifariàm semissis vicinior alteri lateri figuræ: rectangulum sub hac quarta parte lateris secti & alio toto latere non secto, erit quarta pars quæsita figuræ; cùm enim hoc rectangulum & figura data eandem habeant altitudinem videlicet latus non diuisum, inter se erunt vt bases per prop. 1. lib. 6. elem. basis autem rectanguli facti est quarta pars baseos seu lateris diuisi figuræ: ergo rectangulum factum erit quarta pars figuræ. Quod si quæratur quarta pars figuræ quæ sit quadrata: primò inquire rectangulum modo prædicto quod sit quarta pars figuræ: tùm per propos. 14. lib. 2. elem. vel per corollarium nostrum 3. ad prop. 35. vel per coroll. nost. 5. ad propos. 36. lib. 3. conuerte rectangulum inuentum in quadratum, factum erit imperatum. Aduerte in circulo facillimum esse desumere quadratum quod sit æquale quartæ parti figuræ: sumendo enim semidiametrum circuli, illa erit latus quadrati æqualis quartæ parti figuræ: nam latus transuersum & rectum cùm sint æqualia, figura in circulo, de qua sermo est, erit quadrata; est autem semissis lateris quadrati huius semidiameter, & semissis lateris quadrati efficit quadratum quod est quarta pars quadrati totius dati, per coroll. nostrum ad prop. 20. lib. 6. element. ergo semidiameter circuli exhibebit latus quadrati quod sit quarta pars figuræ in circulo.

III.

Lineas asymptotos vocat. Rectas duas lineas ductas ab centro Hyperboles, per extrema duarum rectarum linearum vnam efficientium contingentem hyperbolen in eius vertice, bifariàm sectam in ipso puncto verticis seu contactus; cuius vnaquæque semissis possit quartam partem figuræ.

EXempli gratiâ. Centrum Hyperboles sit B in medio lateris eius transuersi AC, vertex C; & recta linea FCD contingat hyperbolem in vertice eius C, sintque semisses CF, CD, totius rectæ FCD bifariàm sectæ ab AC transuerso latere, seu bifariàm sectæ in puncto verticis C, seu contactus; & vnaquæque semissis CF, CD, possit quartam partem figuræ definitam in superiore secunda

definitione. Rectæ lineæ eductæ ab centro B, per puncta F, D, extrema totius FCD; vel rectarum CF, CD, vnam efficientium, & habentium conditiones requisitas & assignatas: vocantur ab Apollonio Asymptoti, hoc est nunquam occurrentes lineæ curuæ hyperboles ex euius centro per prædicta puncta transmissæ sunt. Et quælibet illarum vocabitur asymptotos. hæc proprietas demonstrabitur propos. 1. huius libri. Nunc solum huiusmodi rectas sic intelligi debere monemus.

IV.

Angulum Hyperboles vocat. Angulum rectilineum in centro Hyperboles effectum ab duabus eius asymptotis lineis.

Videlicet in figura definitionis tertiæ, angulus rectilineus FBD factus in centro B, Hyperboles, ab asymptotis eius rectis lineis duabus BF, BD: erit angulus Hyperboles & sic vocabitur.

V.

Angulum continentem Hyperbolen vocat. Angulum ipsius Hyperboles.

Itaque angulus rectilineus FBD factus in centro B, Hyperboles, ab duabus suis asymptotis rectis BF, BD, duplici nomine insignitur, Anguli Hyperboles, & anguli continentis Hyperbolen. Anguli quidem Hyperboles quia fit in centro eius ab suis proprijs asymptotis: Anguli verò continentis Hyperbolen, quia de facto intra diuaricationes crurium seu laterum quæ sunt asymptoti ipsius Hyperboles, continetur ipsa Hyperbole, ita vt nunquam ab ipsis cruribus attingatur, vti nunc supponimus.

VI.

Angulum deinceps in Hyperbola vocat. Angulum rectilineum factum ab vna asymptoto ipsius Hyperboles producta vltra centrum eius, & alia asymptoto eiusdem Hyperboles non producta vltra centrum.

In figuratione definitionis 3. Producta sit vltra centrum B, Hyperboles, vna eius asymptotos DB vsque ad E: Angulus EBF, factus in centro B ab asymptoto DB producta vltra centrum B, & ab alia asymptoto FB non producta vltra centrum B: est secundum Apollonij mentem angulus deinceps in Hyperbola, vel Hyperbolæ. Et sic vocatur quia est angulus deinceps ad angulum FBD ipsius Hyperboles, vel deinceps ad angulum FBD continentem hyperbolen.

VII.

Angulum deinceps angulo sectionem seu Hyperbolen continenti, vocat. Angulum deinceps in Hyperbola.

Sicuti idem angulus rectilineus FBD, vocatus est duobus nominibus diuersis, nimirum definit. 4. angulus Hyperboles, & defin. 5. angulus continens hyperbolen: ita vt etiam eundem angulum rectilineum EBF, duplici nomine insignitus est, videlicet definit. 6. anguli deinceps in Hyperbola, & hac definit. 7. anguli deinceps angulo Hyperbolen continenti.

VIII.

Locum inter Hyperbolen & asymptotos lineas vocat. Intermedium inter Hyperboles curuam lineam, & lineas eius asymptotos, excludendo locum intra curuam lineam Hyperboles ipsius.

In eadem figura definit. 3. vbi expressus est character G, designatur locus inter hyperbolam & eius asymptotos lineas definitus hac definitione.

IX.

Oppositas sectiones coniugatas vocat. Duas & duas sectiones oppositas Hyperbolicas; ita vt duarum oppositarum transuersa diameter sit coniugata transuersa diametro aliarum duarum oppositarum.

Hæc definitio cum multis additis iam proposita à nobis est definitione 32. inter secundas ad librum primum; cuius figuram consule; in qua si sint duarum sectionum oppositarum HCK, FAG, & aliarum duarum oppositarum MDN, OEX, diametri transuersæ CBA, DBE, coniugatæ inuicem: ipsæ quatuor hyperbolæ, seu duæ & duæ sectiones oppositæ; coniugatæ sectiones oppositæ vocabuntur iuxta hanc definitionem.

X.

Sectiones deinceps vocat. Duas oppositas sectiones, vel alteram illarum, respectu alterius è sectionibus oppositis coniugatis, in ipsismet coniugatis sectionibus oppositis.

Exempli gratiâ in figura propositionis vltimæ seu 56. lib. 1. In sectionibus oppositis coniugatis, respectu vnius ipsarum, puta sectionis DEF, sectio GHI, vel KLM, alterutra ipsarum oppositarum, vel ambæ simul, dicentur deinceps. Sunt enim vna ad vnam partem, & altera ad aliam partem respectu assumptæ DEF.

XI.

XI.

Lineas in Ellipsi ad mediam sectionem inclinatas vocat. Duas rectas lineas ab extremis axeos vnius ad extremum alterius axeos.

IN ellipsi ACBD, sint duo axes AB maior, CD minor: duæ rectæ lineæ AC, BC, ab extremis A & B, axeos maioris ad vnum C extremum minoris CD; vocabuntur iuxta hanc definitionem, ad mediam sectionem inclinatæ. Simili modo aliæ duæ rectæ CA, DA, ab extremis, C & D, axeos minoris CD, ductæ ad A extremum vnum maioris AB axeos: dicentur lineæ in ellipsi ad mediam sectionem inclinatæ. Quod si dentur aliæ duæ quæuis diametri ellipseos, & ab extremis vnius ad extremum vnum alterius rectæ lineæ emissæ sint; non dicentur ad mediam sectionem inclinatæ: quia hæ diametri non sunt axes: vel etiam duæ aliæ rectæ, vt AE, BE, vel CF, DF, rectæ, ab extremis vnius axeos inclinatæ ad idem punctum E, vel F, circumferentiæ ellipseos, non censebuntur inclinatæ ad mediam sectionem.

Hæc definitio applicari potest in circulo, quando duæ diametri sunt sibi inuicem ad angulos rectos; tunc enim sunt axes licet æquales.

XII.

Angulum ad mediam sectionem in Ellipsi vocat. Angulum rectilineum factum ab lineis ad mediam sectionem inclinatis.

SIc in figura definitionis præcedentis angulus rectilineus ACB, vel CAD, erit angulus ad mediam sectionem in ellipsi: quia ille fit ab duabus rectis AC, BC, ab extremis axeos maioris AB ad vnum C extremum minoris axeos CD. Eodem modo discurrere oportebit in circulo.

Notandum est Apollonium non inuehere lineas in alijs sectionibus conicis ad mediam sectionem inclinatas; neque angulum ad mediam sectionem in illis. Quia sicut illæ suis lineis curuis spatium non comprehendunt; sic medium punctum in ipsis lineis curuis non datur ad quod ab extremis axeos vnius ad vnum alterius extendantur: præsertim cùm ipsæ aliæ sectiones diuersæ ab ellipsi & circulo, sibi non vendicent duos axes, vti probabit Apollonius.

XIII.

Lineam rectam in sectione conica accommodatam voco. Rectam lineam vtrimque in linea curua sectionis conicæ terminatam; vel inter oppositas sectiones vtrimque terminatam.

HÆc definitio reponi poterat in numero secundarum lib. 1. à nobis additarum; quæ quia manifesta satis est, eam pluribus non explicamus.



COM-

COMMENTARIVS IN PROPOSITIONES LIBRI SECVNDI CONICORVM APOLLONII PERGÆI.

PROPOSITIO I.

Si Hyperbolen recta linea ad verticem contingat; & ab ipso ex vtraque parte diametri sumatur æqualis ei quæ potest quartam figuræ partem. Lineæ, quæ à sectionis centro, ad sumptos terminos contingentis ducuntur; cum sectione non conuenient. (hoc est erunt asymptoti.)



Vppositio. Hyperboles GBI, sit diameter transuersa AB, centrum C, rectumque latus BF, vertex B: & in B vertice recta linea DBE contingens ipsam hyperbolen; sintque vtrimque sumptæ partes eius duæ BD, BE, singulæ potentes quartam partem figuræ, hoc est iuxta def. 1. ad hunc librum, rectanguli sub latere AB transuerso & recto BF, ipsius hyperboles; quæ rectæ lineæ DB, BE, erunt æquales, per propos. 26. Procli, quandoquidem earum quadrata sunt æqualia quartæ parti figuræ. Ductæ verò sint ab centro C, per extrema D & E, rectæ DBE, producendæ rectæ lineæ CD, CE, vltra D & E. Dico istas rectas CD, CE, productas modo prædicto nunquam occursuras sectioni GBI Hyperbolicæ; seu vt loquitur sæpe Apollonius, esse asymptotos, juxta defin. 2.

Apparatus. Si ita non sit vti asseritur. Esto recta CD producta vltra D, occurrat in G, ipsi Hyperbolæ: & ex puncto G concipiatur recta linea GH ordinatim applicata diametro transuersæ AB productæ intra locum ipsius Hyperboles: vel per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto G ducatur recta linea GHI parallela rectæ contingenti DBE datæ, ipsa imprimis erit secta ab diametro ABH transuersa in puncto H per prop. 21. Procli, & per prop. 18. lib. 1. occurret alteri puncto I ipsius hyperboles; & per coroll. nostrum 3. ad prop. 48. lib. 1. erit ordinatim applicata diametro ABH. Sed sumimus hoc loco partem eius GH, quæ etiam dicitur ordinatim applicata diametro ABH, vti explicauimus in definit. 12. inter primas lib. 1.

Demonstratio. Per lemma 1. ad hunc librum est vt AB ad BF, sic quadratum rectæ AB ad rectangulum sub AB, BF; quadratum verò rectæ CB dimidiæ totius lateris transuersi AB, (nam per defin. 1. inter secundas libri 1. transuersum latus hyperboles bifariàm in centro diuiditur, datumque est centrum C lateris AB transuersi datæ hyperboles) est quarta pars quadrati rectæ AB per coroll. nostrum ad prop. 20. lib. 6. elem. & quadratum rectæ BD, est ex datis quarta pars rectanguli sub AB, BF, seu figuræ; ergo erit per propos. 15. lib. 5. elemen. vt quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD, sic quadratum rectæ AB ad rectangulum sub AB, BF; ostendimus autem esse quadratum rectæ AB ad rectangulum sub AB, BF, vt recta AB ad rectam BF, seu vt latus transuersum ad rectum: ergo per prop. 11. lib. 1. elemen. erit quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD,

BD, vt latus AB transuersum ad rectum BF. Et quia in triangulo rectilineo GCH, est per apparatum recta BD parallela basi GH; erit per lemma 50. lib. 1. vt CB ad BD, sic CH ad HG. Igitur per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD, sic quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ HG: & quia ostendimus esse quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD, vt recta AB ad rectam BF, seu vt latus transuersum AB ad rectum BF; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt latus transuersum AB ad rectum BF, sic quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ HG: sed per prop. 21. lib. 1. & per coroll. prop. 4. lib. 1. elemen. est vt AB transuersum latus ad rectum BF, sic rectangulum sub AH, HB, ad quadratum rectæ HG; ergo per cit. proposi. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ CH ad quadratum rectæ HG, ita rectangulum sub AH, HB, ad quadratum rectæ HG. Igitur per 9. prop. lib. 5. elem. rectangulum sub AH, HB, erit æquale quadrato rectæ CH. Recta autem AH est composita ex recta AB diuisa bifariàm in C, & ex adiecta BH ipsimet AB; igitur per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub composita AH, & sub adiecta HB, vnà cum quadrato rectæ BC dimidiæ rectæ AB, erit æquale quadrato rectæ CH compositæ ex dicta CB dimidia, & adiecta BH. Igitur cùm probauerimus rectangulum sub AH, HB, seorsim sumptum esse æquale quadrato rectæ CH, & ostenderimus idem rectangulum sub AH, HB, vnà cùm quadrato rectæ CB, esse æquale eidem quadrato rectæ CH: erit per 1. axioma lib. 1. elem. rectangulum sub AH, HB, æquale rectangulo sub AH, HB, vnà cum quadrato rectæ CB, pars & totum, contra 8. axioma lib. 1. elem. Hoc absurdum deductum ex positione contradicente assertioni huius propositionis, manifestam facit falsitatem positionis, & veritatem assertionis propositæ.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Recta linea DBE contingens hyperbolen, per cuius extrema D, E, transmittuntur ex centro eius asymptoti bifariàm diuiditur in puncto contactus B.

PRobauimus enim in suppositione partes eius ab vertice B seu contactu, videlicet BD, BE, esse æquales inter se.

PROPOSITIO II.

Iisdem manentibus. demonstrandum est, non esse alteram asymptoton, quæ angulum DCE diuidat.

SVppositio sit eadem quæ in præcedente prima propositione, quam recognosce: nam Apollonius vult eandem manere; & proponit demonstrandum nullam aliam rectam lineam diuidentem angulum DCE, qui continet Hyperbolen datam iuxta definitio. 5. esse asymptoton. Et aduerte Apollonium prudenter proponere rectam lineam diuidentem angulum DCE: nam si ducerentur ex centro C aliæ rectæ lineæ non diuidentes ipsum angulum DCE continentem Hyperbolen; ipsæ quidem latè sumpto nomine asymptoti lineæ; essent asymptoti, hoc est nunquam occurrerent ipsi Hyperbolæ; cùm enim semper magis diuaricentur ab asymptotis proprijs CD, CE, multò magis nunquam occurrerent hyperbolæ: præsè verò & propriè sumpto nomine asymptoti lineæ, quæ debet ex centro C egredi per extrema rectæ lineæ contingentis hyperbolen in vertice, in quo diuiditur ipsa recta contingens, & partes eius singulæ hinc & inde ab vertice debent posse quartam partem figuræ; non erunt asymptoti per defin. 3. quia non transeunt per extrema huiusmodi partium contingentis rectæ. Sed neque etiam propriè erunt asymptoti, rectæ lineæ diuidentes angulum DCE continentem Hyperbolen, quia non incedunt per huiusmodi prædicta extrema. Verumtamen ostendendum est quod neque latè sumpto nomine asymptoti rectæ lineæ, huiusmodi omnes rectas lineas diuidentes angulum DCE continentem Hyperbolen non esse asymptotos.

Apparatus. Si fieri possit, recta linea CH diuidens angulum DCE, non occurrat sectioni, seu sit asymptotus. Ex puncto B verticis per prop. 31. lib. 1. element. agatur recta linea BH parallela CD rectæ asymptoti datæ seu probatæ in prop. 1. (aduerte rectam istam BH in figura non esse parallelam, sed concipiendam parallelam ipsi CD, parallela enim duci non potuit ob loci figuræ angustias;) recta CH introducta, occurret in H rectæ BH, per prop. 11. Procli, & quidem extra ipsam Hyperbolen, quandoquidem ponitur ab aduersario recta CH asymptotus. Præterea ex puncto H concipiatur recta linea parallela tangenti DBE, quæ per prop. 11. Procli secabitur in L ab transuerso ABL, tùm etiam in M ab alia recta CE asymptoto; secabitque obuiam lineam curuam hyperboles in puncto K; eritque per coroll. nostrum 3. ad proposi. 48. lib. 1. ordinatim applicata diametro transuersæ CBL: resultabitque triangulum rectilineum GCL, cuius basi GL, est parallela recta DB; & aliud rectilineum triangulum GCM, & aliud LCM; eruntque basibus parallelæ rectæ DBE, BE, sed & resultabit parallelogrammum GDBH, cuius opposita latera DB, GH, æqualia; & alia opposita DG, BH, æqualia per proposi. 34. lib. 1. elem. his positis demonstrabimus propositum.

Demon-

Demonstratio. Cùm in triangulo GCM sit parallela recta DBE, basi GLM, & recta CBL diuidat bifariàm in B, rectam DBE per coroll. nostrum ad prop. præcedent. diuidet etiam bifariàm in L rectam GLM per coroll. nostrum ad prop. 4. lib. 6. elem. Recta verò GK maior est quàm GH, nam H punctum ex positione aduersarij debet esse extra Hyperbolen, & K est punctum lineæ eius curuæ; & GH rectæ æqualis est ostensa recta DB; ergo per 1. ax. lib. 1. elemen. recta GK maior erit quàm recta DB, vel quàm recta BE æqualis ipsi DB. Sed & recta LM æqualis est ipsi GL, & GL maior quàm GK; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. recta LM & multo magis KM maior erit quàm recta GK, & multò maior quàm recta DB, vel BE. Iam verò cùm recta AB sit per defin. 3. lib. 1. inter secundas, diuisa bifariàm in centro C, & ipsi addita sit in directum recta BL; erit per propos. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub AL, LB, vnà cum quadrato rectæ CB, æquale quadrato rectæ CL: Rectangulum autem sub MK, KG, maius est rectangulo sub DB, BE, seu quadrato rectæ DB, per lemma 49: ad lib. 1. Et quia in superiore propositione demoustrauimus ita esse quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD, vt est latus transuersum AB ad rectum BF; estque per propos. 21. lib. 1. Apoll. & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt AB transuersum latus ad BF rectum, sic rectangulum sub AL, LB, ad quadratum rectæ KL: erit per prop. 11. lib. 5. element. vt quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD, sic rectangulum sub AL, LB, ad quadratum rectæ KL: Cùmque sit per lemma 50. vt CB ad BD, sic CL ad LG; erit per prop. 22. lib. 6. elem. vt quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD, sic quadratum rectæ CL ad quadratum rectæ LG: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ CL ad quadratum rectæ LG, sic rectangulum sub AL, LB, ad quadratum rectæ LK. Quia verò probauimus rectangulum sub AL, LB, simul cum quadrato rectæ CB, esse æquale quadrato rectæ CL: Et quia recta GM secta est bifariàm in L ex probatis, & non bifariàm in K; erit per prop. 5. lib. 2. elemen. rectangulum sub MK, KG, simul cum quadrato rectæ LK, æquale quadrato rectæ LG. Igitur si à toto quadrato rectæ CL, auferatur rectangulum sub AL, LB, relinquetur quadratum rectæ CB: & si à toto quadrato rectæ LG, dematur quadratum rectæ LK, reliquum erit rectangulum sub MK, KG. Cùm igitur probauerimus esse quadratum rectæ CL, ad quadratum rectæ LG, sicut rectangulum sub AL, LB, ad quadratum rectæ LK; erit totum ad totum, sicut ablatum ad ablatum: ergo per prop. 19. lib. 5. elem. erit reliquum quadratum rectæ CB ad reliquum rectangulum sub MK, KG, vt totum ad totum, videlicet vt quadratum rectæ CL ad quadratum rectæ LG: & conferendo ista postrema cum antedictis, erit per prop. 11. lib. 5. elem. erit quadratum rectæ CB ad rectangulum sub MK, KG, sicut quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD. Igitur quandoquidem ostendimus esse quadratum rectæ CB ad rectangulum sub MK, KG, vt ipsum quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BD: erit per 9. prop. lib. 5. elem. rectangulum sub MK, KG, æquale quadrato rectæ BD, contra concessa ex demonstratis. Pugnantia hæc cùm proueniant ex positione rectæ CH diuidentis angulum DCE Hyperboles datæ, vtcumque asymptoti, falsa erit ipsa positio, & assertio propositionis ei contradicens vera. videlicet ipsam CH diuidentem angulum DCE, & omnes alias huiusmodi rectas eundem angulum DCE continentem Hyperbolam, non esse asymptotos vllo modo.

COROLL. NOSTRVM I.

In omni Hyperbola non sunt plures quàm duæ rectæ asymptoti propriè loquendo, vna ad vnam partem, altera ad aliam.

Cum enim ex defin. 3. constet illas transire debere per extrema solùm duo puncta rectæ lineæ contingentis in vertice hyperbolam, ita vt eius duæ partes, vna ad vnam partem verticis, altera ad aliam, sint æquales, & possint singulæ quartam partem figuræ, eductæ ex centro vnico hyperboles; manifestum est duas solùm esse lineas asymptotos vna ad vnam partem ipsius hyperboles, altera ad aliam.

COROLL. NOSTRVM II.

In Hyperbola rectæ lineæ eductæ ab centro eius, & non diuidentes angulum continentem ipsam Hyperbolam; sunt asymptoti latè sumpto nomine asymptoti.

Hoc declarauimus in suppositione huius propositionis secundæ.

COROLLARIVM NOST. III.

Rectæ lineæ diuidentes angulum Hyperboles sui continentem ipsam, nulla ratione sunt asymptoti, latè vel presse sumpto nomine asymptoti, & occurrent ipsi Hyperbolæ.

Ostendimus enim in demonstratione propositionis huius semper ipsas occurrere ipsi Hyperbolæ; ergo nulla ratione erunt asymptoti, siue pressè siue latè sumatur nomen asymptoti. ergò occurrent ipsi Hyperbolæ, alioqui essent asymptoti.

COROL-

COROLL. NOSTRVM IV.

In Hyperbola innumeræ esse possunt lineæ rectæ asymptoti, sumpto latè nomine asymptoti.

NAm per coroll. nostrum 3. rectæ lineæ eductæ ab centro Hyperboles & non diuidentes eius angulum, sunt asymptoti, sumpto latè nomine asymptoti: Sed innumeræ esse possunt huiusmodi rectæ lineæ, vt consideranti apparet: ergo sumpto latè nomine asymptoti, possunt esse innumeræ rectæ lineæ asymptoti in Hyperbola, sicut fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM V.

Recta omnis linea diuidens angulum Hyperboles, vel ipsam continentem; si producatur versus Hyperbolen ipsam, procedet intra locum eius, eiusque lineam curuam interfecabit.

PEr corollarium nostrum 3. nulla ratione erit asymptota: ergo ipsi Hyperbolæ occurret per idem coroll. igitur per prop. 3 1. lib. 1. lineam curuam Hyperbolæ interfecauit & procedet intra locum illius.

COROLL. NOSTRVM VI.

Data Hyperbola, & eius centro, & axe, & latere recto: asymptotos eius duas rectas ducere.

APparatus. Ex latere transuerso dato videlicet axe, & latere recto fiat rectangulum per lemma nostrum 1. ad lib. 2. element. tùm ex his quæ diximus in defin. 1. sumatur recta linea potens quartam partem dicti rectanguli sub figuræ definitæ defin. 2. & producto latere transuerso intra locum hyperboles, ex punctis diuersis huius lateris producti intra locum hyperboles educantur rectæ lineæ perpendiculares ipsi lateri transuerso per prop. 11. lib. 1. element. erunt ordinatim applicatæ ipsi lateri recto, per defin 10. 12. & 17. lib. 1. inter primas: quare si ex puncto verticis dati lateris transuersi quod in linea curua hyperbo les est, recta linea educatur parallela vni ex dictis ordinatim applicatis transuerso lateri, per prop. 31. lib. 1. elemen. hæc parallela continget hyperbolam per prop. 17. lib. 1. ex ista autem recta parallela & contingente vtrimque producta, sumantur per prop. 3 lib 1. element. duæ rectæ æquales inuentæ potenti quartam partem figuræ, ex puncto contactus, vna ex vna parte, altera ex alia: & ab centro hyperboles per extrema harum rectarum non communia ducantur rectæ lineæ duæ. Dico has esse asymptotos hyperbolæ datæ.

Demonstratio. Hoc enim manifestum est, vel per traditam def. 3. vel per prop. 1.

COROLL. NOSTRVM VII.

Omnis transuersa diameter Hyperboles diuidit angulum continentem ipsam Hyperbolen, factum ab eius asymptotis.

OMnis diameter transuersa Hyperboles deducitur ab centro eius, & debet attingere & secare lineam curuam Hyperboles per coroll. prop. 51. lib. 1. Igitur nulla asymptotus erit eius diameter, quia asymptotus ex natura sua nō debet cōuenire cum Hyperbola. Quod si daretur aliqua diameter in Hyperbola non diuidens angulum prædictum, sed extra asymptotos procedens, cùm debeat attingere Hyperbolen, necessariò obuiam intermediam secaret asymptotum vnam in aliquo puncto; & sic duæ rectæ spatium clauderent, contra 14. ax. lib. 1. elem. hoc absurdum indicat nullam posse dari diametrum Hyperboles quæ non secet seu diuidat angulum continentem ipsam factum ab eius asymptotis. Omnis ergo diameter Hyperboles dictum angulum diuidet.

PROPOSITIO III.

Si Hyperbolen contingat recta linea; cum vtraque asymptoto conueniet, & ad tactum bifariàm secabitur. Quadratum verò vtriusque eius portionis, æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum per tactum ductam constituitur.

SVppositio. Hyperbolen ABC contingat in B recta linea HBK; sintque duæ rectæ asymptotæ datæ ipsius Hyperboles, quæ necessariò per definit. 3. ex centro datæ ipsius Hyperboles procedere debent; itaque vel centrum E è quo procedere debent datur, vel non datur; productæ datæ duæ asymptoti versus B punctum contactus, concurrent in vnum punctum E, quod erit centrum Hyperboles, nam in vno tantùm puncto se interfecant duæ rectæ lineæ, per axiom. 11. lib. 1. elem. itaque inuenerimus centrum E, si non fuerit datum. Sintque duæ asymptotæ datæ EF, EG. Dico rectam HBK contingentem in B puncto hyperbolam datam conuenire cum vtraque asymptoto, & quidem in F cum asymptoto EF, & in G cum asymptoto EG. Insuper dico hanc rectam contingentem bifariàm diuidi in B, ita vt sint partes æquales BF, BG. Denique assero quadratum vtriusque portionis BF, BG, esse æquale quartæ parti figuræ quæ ad diametrum per tactum B ductam constituitur.

Apparatus. Ex centro E, hyperboles dato; vel inuento ex dictis in suppositione transmittatur recta linea EB, per punctum B contactus dati; hæc recta EB, producta vltra B, procedet intra locum hyperboles per corollar. nostrum 1. ad prop. 31. lib. 1. de producta autem eadem BE vltra centrum E, sumatur per 3. prop. lib. 1. element. recta ED æqualis ipsi EB: tota verò recta DEB, erit diameter transuersa hyperboles datæ, per defin. 3. lib. 1. inter secundas, & per coroll. prop. 51. & per ea quæ nunc subiungemus: sumantur puncta infinita separata ab inuicem in producta recta DEB intra locum hyperboles; & per prop. 31. lib. 1. element. ex illis agantur rectæ lineæ tangenti datæ HBK; hæ omnes rectæ intra hyperbolam ductæ & accommodatæ, secabuntur per prop. 47. lib. 1. ab recta DEB producta vltra B; igitur ipsa DEB erit diameter datæ hyperboles, per definit. 10. lib. 1. inter primas. Iam verò ex hac diametro DEB transuersa seu latere transuerso, & vna ex prædictis ordinatim applicatis ad ipsammet diametrum DEB transuersa, eliciemus per coroll. nost. 2. ad prop. 51. lib. 1. rectum latus in hyperbola data, respectu diametri transuersæ DEB. Itaque per lemma 1. ad lib. 2. element. poterimus rectangulum efficere sub latere transuerso DEB, & sub latere recto inuento: & per lemma 2. reperire latus quadrati æqualis quartæ parti dicti rectanguli, quod erit figura definita in defin. 1. hoc verò latus erit determinatum ac finitum. Iam verò, si fieri possit, recta linea HBK contingens producta vtrimque in infinitum nunquam conueniat cum asymptotis datis EF, EG: tunc per 3. prop. lib. 1. elem. de recta HBK producta vtrimque in infinitum, ex puncto B, detrahemus rectas vtrimque puta BH, BK, æquales lateri inuento quadrati æqualis quartæ parti figuræ, quarum extrema H & K, erunt intra locum inter asymptotos EF, EG, & ipsam hyperbolen, iuxta defin. 8. nam si essent in ipsis dictis asymptotis, recta tangens data conueniret cum ipsis asymptotis datis; sed eadem puncta extrema vltra ipsas asymptotos, extra locum prædictum, esse non possunt ex mente aduersarij; nam sic etiam data recta tangens occurreret ipsis asymptotis datis; quæ duo consequentia non concedit aduersarius. Esto igitur sint puncta H, K, extrema in loco inter hyperbolen & eius asymptotos datas, & ducamus rectas EH, EK.

Demonstratio. Quandoquidem recta linea HBK, hyperbolen datam contingit in vertice B; & eius partes BH, BK, singulæ possunt quartam partem figuræ; & rectæ lineæ EH, EK, ex centro E hyperboles procedunt per extrema H & K: ipsæ rectæ EH, EK, erunt per prop. 1. asymptoti, hoc est nunquam conuenient cum hyperbola: hæc autem consecutio deducta ex positione aduersarij introducentis rectam HBK contingentem hyperbolen productam vtrimque in infinitum, nunquam concurrere cum asymptotis datis EF, EG. Verùm cùm detur angulus FEG continens hyperbolen datam; & rectæ EH, EK, diuidant ipsum angulum, incedunt enim per locum inter datas asymptotas & datam hyperbolen; occurret ipsæ rectæ EH, EK, ipsi hyperbolæ, & nulla ratione erunt eius asymptoti, per coroll. nostrum 3. ad prop. 2. Igitur eædem rectæ lineæ EH, EK, erunt datæ hyperbolæ asymptoti, & non erunt asymptoti; vel non occurrent datæ hyperbolæ, & occurrent ipsi. quæ duo pugnant inuicem. Igitur positio aduersarij vnde procedunt, falsa erit; & assertio prima propositionis vera: nimirum quod recta linea contingens hyperbolen in B, producta vtrimque occurrat datis duabus eius asymptotis EF, EG, illi quidem in F, isti in G. Secunda assertio probabitur post tertiam demonstratam sic. Si rectæ BF, BG, singulæ non possint quartam partem figuræ quæ ad diametrum transuersam DEB constituitur: poterimus ex apparatu, vel per lemma 2. inuenire rectam lineam quæ possit quartam partem figuræ, hoc est rectanguli sub transuerso latere DEB, & recto, iam inuento in citato apparatu: tùm per prop. 3. lib. 1. elemen. producendo vtrimque rectam FBG si opus sit, detrahere ex puncto B contactus, vtrimque, rectas æquales illi rectæ inuentæ potenti quartam partem figuræ, sintque BH, BK; quarum extrema H, K, vel erunt in loco inter asymptotos datas EF, EG, & ipsam hyperbolen datam; vel vltra ipsas asymptotos dictas; vel in ipsis, si hoc vltimum, consecuti sumus propositum. Si primum, rectæ lineæ EH, EK, diuidentes angulum FEG continentem hyperbolen erunt asymptoti per 1. prop. & non erunt asymptoti per 2. prop. Si secundum, rectæ lineæ Eh, Ek, erunt asymptoti per 1. prop. & quia aliæ duæ datæ EF, EG, asymptoti, diuident angulum hEk continentem hyperbolam, non erunt asymptoti per 2. propos. & sic eædem rectæ lineæ EF, EG, erunt & non erunt asymptoti respectu eiusdem hyperboles datæ. Hæc absurda seu pugnantia, quia procedunt ex positione quod singulæ rectæ BF, BG, non possint quartam partem figuræ constitutæ ad diametrum DEB transuersam, falsa erit; & ideo verum erit propositum. Ex his probatur secunda assertio: quadrata rectarum BF, BG, sunt æqualia quartæ parti figuræ; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. sunt æqualia inter se: igitur per prop. 16. Procli, latera illorum quadratorum æqualium, videlicet rectæ BF, BG, erunt æquales inter se: atque ita tota recta FBG contingens hyperbolam & conueniens vtrimque cum eius asymptotis EG, EF, diuidetur bifariàm in puncto B contactus. Et sic de alijs omnibus huiusmodi rectis lineis. Quæ omnia erant demonstranda.

COROL-

COROLL. NOSTRVM I.

Data Hyperboles centrum reperire; ex duobus segmentis non concurrentibus suarum asymptotorum, vno vnius, altero alterius.

PRoducantur data duo segmenta versus verticem Hyperboles; necessariò ad illas partes concurrent in vno puncto per definit. 3. quod erit per eandem definitionem centrum ipsum Hyperboles datæ.

COROLL. NOSTRVM II.

In omni sectione coni; & circulo. Si rectæ lineæ tangenti ipsam vel circulum, rectæ lineæ ponantur parallelæ ipsi tangenti; occurrent duobus in punctis ipsis sectionibus vel circulo; & bifariàm secabuntur ab diametro incedente per punctum illud contactus; eruntque ordinatim applicatæ ad illam diametrum.

NAm per propos. 11. Procli secabuntur ab dicta diametro; igitur in Parabola, ellipsi & circulo, per nostrum coroll. 1. ad propos. 18. lib. 1. occurrent vtrimque dictis sectionibus & circulo. In hyperbola verò quia per hanc propos. 3. prædicta linea contingens occurrit asymptotis eius; etiam dictæ rectæ lineæ illi tangenti parallelæ occurrent etiam eisdem asymptotis per cit. 11. prop. Procli, ideoque obuiæ lineæ curuæ sectionis quæ hyperbola est, duobus in punctis: quare per coroll. nostrum 7. ad prop. 48. lib. 1. erunt ordinatim applicatæ dictæ diametro: & per defin. 12. & 10. lib. 1. inter primas, bifariàm sectæ ab illa.

PROPOSITIO IV.

Datis duabus rectis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato: describere per punctum, coni sectionem, quæ Hyperbole appellatur; ita vt datæ lineæ, ipsius asymptoti sint.

PRudenter suspicatur Federicus Commandinus, notis suis in hanc propositionem, huius non esse Authorem Apollonium; sed Eutocium vel aliquem alium: nam Eutocius commentario suo in Archimedem, ad prop. 4. lib. 2. de Sphæra & cylindro, proponens hanc eandem, ait in elementis Conicis non esse demonstratam: & Pappus Alexandrinus eandem proponit inter lemmata propria ad lib. 5. conicorum Apollonij. Nihilominus eam recipimus, & explicamus.

Suppositio. Datæ sint duæ rectæ lineæ AB, AC, angulum BAC efficientes; & punctum D intra locum huius anguli. Oporteatque describere Hyperbolen, cuius linea curua incedat per punctum hoc D datum; & rectæ lineæ datæ AB, AC, sint eius asymptoti.

Apparatus. Puncta A & D, iungantur recta linea AD; & ex producta recta AD, vltra A, sumatur per 3. prop. lib. 1. elem. recta AE æqualis ipsi AD: tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto dato D, ducatur versus rectam AC datam, recta linea DF parallela alteri datæ AB, occurret per 11. prop. Procli rectæ AC in F: ponatur verò in ipsa AC ex puncto F, recta linea FC æqualis ipsi FA, per 3. prop. lib. 1. elem. & puncta D & C vniantur recta linea CD, quæ producta vltra D, occurret in B alteri rectæ AB, per prop. 11. Procli. Insuper per lemma 11. ad lib. 1. datis quadrato rectæ CB, & recta DE, inueniatur alia recta DG, ita vt rectangulum DE & DG, sit æquale quadrato rectæ CB: Iam verò quia in triangulo ACB ducta est recta linea FD, parallela lateri AB; erunt per 2. prop lib. 6. elem. latera AC, BC; secta proportionaliter in F & D: igitur quia ex constructione latus AC est bifariàm sectum in F, erit etiam latus BC sectum in D bifariàm. Igitur iuxta coroll. nostrum ad prop. 20. lib. 6. elem. quadratum rectæ CD, vel rectæ BD, erit quarta pars quadrati rectæ BC; ideóque etiam rectanguli sub ED & DG, erit quarta pars, per 7. prop. lib. 5. element. nam facta sunt æqualia, quadratum rectæ BC, & rectangulum sub ED, & DG. Adhæc, datis duabus rectis lineis EAD, & DG, constituendis sibi inuicem ad angulos rectos in communi extremo D, describatur per propos. 53 lib. 1. Hyperbola, cuius diameter transuersa sit recta EAD, & latus rectum DG, & vertex D punctum datum, & rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ ad transuersam diametrum EAD producendam vltra D, efficiant angulum cum diametro transuersa EAD, æqualem angulo ADC, & possint singulæ propria rectangula adiacentia lateri recto DG, latitudinemque habentia lineam interiectam inter lineas prædictas proprias, & verticem D, excedentiaque figura simili & similiter posita ei quæ sub rectis EAD, DG, continetur. Notandum verò ex hac constructione, rectam lineam BDC, esse parallelam prædictis ordinatim applicatis rectis lineis ad diametrum EAD productam vltra D, propter angulos quos faciunt cum diametro EAD, æquales positos angulo ADC; idque per prop 28. lib. 1. ele. quare ipsa recta BDC continget hyperbolam factam, per prop. 32. 1. Dico autē hyperbolam factam, transire per punctū D datum; cuius asymptoti rectæ lineæ sint datæ rectæ AB, AC.

Demonstratio. Per apparatum constat esse descriptam Hyperbolam, cuius linea curua incedit per D punctum, cuius est vertex; diameter transuersa EAD; centrumque A in

medio dictæ diametri transuersæ per definit. 3. inter secundas libri 1. nam sunt factæ æquales eius partes AD, AE. Et quia probauimus in apparatu rectam BDC, contingere ipsam Hyperbolam factam in vertice eius B; effeque bifariàm fectam D, & ex ipso apparatu manifestum est singulas eius partes DB, DC, posse quartam partem figuræ quæ constituitur ad diametrum EAD: & ex centro A, procedunt rectæ AB, AC, per extrema dictarum rectarum DB, DC: ideo per propositio. 1. ipsæ rectæ AB, AC, datæ, erunt asymptoti Hyperboles factæ. Atque ita fecerimus imperatum, & demonstrauerimus esse rectè factum.

PROPOSITIO V.

Si Parabolæ vel Hyperbolæ diameter lineam quandam bifariàm secet: quæ ad terminum diametri contingit sectionem, æquidistans est lineæ bifariàm sectæ.

SVppositio. Paraboles vel Hyperboles ABC, diameter DBE rectam lineam AEC secet bifariàm in E, ita vt eius extrema A, C, existant in linea curua Hyperboles vel Paraboles: tum per B terminum diametri DBE, qui est vertex alterutrius sectionis conicæ, sit recta linea FBG contingens in vnico puncto B, ipsam sectionem. Dico hanc rectam FBG esse parallelam ipsi rectæ AEC bifariàm sectæ.

Apparatus in Parabola. Ex puncto C existente in linea curua Paraboles ducatur recta linea CG parallela diametro eius datæ DBE, per prop 31. lib. 1. element. hæc erit diameter alia Paraboles, per coroll, nostrum 1 ad propos. 46. lib. 1. Porrò cùm recta data FBG contingens Parabolam in vertice B quod est punctum diametri DBE ipsius Paraboles, secet ipsam Diametrum DBE, secabit etiam producta diametrum aliam GC, in puncto G, per propos. 11. Procli, cùm sit parallela diametro sectæ DBE; atque ita recta FBG contingens Parabolam in B, cum diametro eius GC conuenit. Præterea si non sint æquidistantes rectæ AEC, FBG; poterimus ex puncto C ducere rectam parallelam CKH, ipsi GBF contingenti Parabolam, quæ secabitur in K ab diametro DBE per prop. 31. Procli; & occurret alteri puncto H, lineæ curuæ Paraboles per coroll. nost. 3. ad propos. 18. lib. 1. Denique puncta A, H, vniantur recta linea AH, quæ per prop. 10. lib. 1. erit tota intra Parabolam, & producta vltra versus verticem, semper procedet extra ipsam Parabolam: & per prop. 22. lib. 1. occurret diametro DBE, in puncto D.

Demonstratio in Parabola. Quandoquidem datur FBG recta contingens Parabolam in B, & in apparatu ostensa est occurrere diametro CG, in puncto G; & per punctum B contactus prædicti, incedit alia diameter DBE secans in K rectam CKH accommodatam in ipsa Parabola, parallelam ipsi tangenti FBG, ipsam bifariàm secabit in eodem puncto K, per prop. 46. lib. 1. Igitur in triangulo ACH, quandoquidem habemus duo eius latera AC, HC, secta proportionaliter bifariàm, AC quidem in E ex datis, HC verò in K ex demonstratis: erit per prop. 2. lib. 6. ele. recta KE parallela ipsi AH; hoc est AH & diameter DBE, erunt parallelæ rectæ lineæ, in apparatu demonstratæ non parallelæ ex positione quod recta AC data diuisa bifariàm in E ab diametro DBE datæ Paraboles, non sit parallela ipsi FBG contingenti ipsam in B vertice. Falsa igitur erit positio illa, ex qua pugnantia prædicta originem trahebant: erunt igitur parallelæ demonstratæ rectæ FBG, contingens, & AEC diuisa bifariàm in E, in Parabola sicuti fuit propositum.

Apparatus in Hyperbola. Ex puncto C quod est in linea curua Hyperboles per D centrum Hyperboles agatur recta DC linea; hæc erit diameter alia Hyperboles per coroll. prop. 51. lib. 1. diuersa ab data diametro DBE. Et quia datur recta FBG contingens sectionem Hyperbolicam in B, producta occurret diametro DC infra centrum D, in puncto G, per coroll. prop. 31. lib. 1. Iam verò si non sint æquidistantes rectæ lineæ datæ FBG, AEC, poterimus per propos. 31. lib. 1. elem. ducere ex puncto C rectam lineam CKH parallelam ipsi tangenti FBG, quæ per prop. 11. Pro. li secabitur in K ab diametro DBF, & occurret alteri puncto H, lineæ curuæ Hyperboles, per coroll. nost. 3. ad prop. 18. lib. 1. Denique transmittatur recta linea AH, quæ per prop. 10. lib. 1. tota erit intra Hyperbolam, & producta versus verticē, occurret diametro DBE, in puncto I per prop. 22. lib. 1.

Demonstratio in Hyperbola. Datur recta linea FBG contingens Hyperbolen in B, & in apparatu ostensa est occurrere diametro eius DC in G; & per tactum B, & centrum D transit diameter altera eius DBE, secans rectam CKH parallelam ipsi tangenti FBG: igitur per prop. 47. secabitur bifariàm hæc recta CKH, in puncto K. In triangulo autem rectilineo ACH, cùm habeamus duo latera eius AC, CH, illud ex datis bifariā sectū in E ab diametro DBE, istud in K ex probatis iuxta positionem aduersarij; erunt dicta duo latera secta proportionaliter: ergo per 2. prop. lib. 6. elem. recta linea KE, hoc est tota diameter DBE, & recta AH, erunt parallelæ: ostendimus autem in apparatu ex positione aduersarij contradicente affirmationi huius propositionis, dictas rectas AH, DBE, occurrere sibi inuicē, seu quod idem est, non esse parallelas: quæ cùm pugnent inuicem, signum

signum est positionem aduersarij negantis rectam lineam FBG contingentem hyperbolen in B termino diametri DBE bifariàm in E diuidentis rectam AEC accommodatam in Hyperbola, esse parallelam ipsi rectæ AEC; falsam esse. Quare assertio propositionis stabilita erit ac demonstrata vera.

PROPOSITIO VI.

Si Ellipsis, vel circuli circumferentiæ diameter lineam quandam non per centrum transeuntem, bifariàm secet: quæ ad terminum diametri contingit sectionem, æquidistans erit bifariàm sectæ lineæ.

SVppositio. Ellipseos vel circuli circumferentiæ diameter AB, rectam lineam aliquam CD non transeuntem per centrum K, bifariàm diuidat In E, accommodatam in ellipsi vel circulo: & ad A terminum datæ diametri prædictæ AB sit data recta IAL contingens ellipsim vel circuli circumferentiam. Dico hanc rectam lineam IAL esse parallelam datæ rectæ CED bifariàm sectæ in E ab data diametro AB.

Apparatus. Ex centro K ad aliquod punctum puta L rectæ lineæ IAL, diuersum ab A contactu, recta linea transmittatur, quæ secabit in N obuiam circumferentiam, quandoquidem tota recta IAL procedit extra datas sectiones; & producatur vltra K vsque ad alterum M circumferentiæ ellipseos vel circuli punctum; hæc recta erit per coroll. propos.51. lib. 1. diameter. Igitur habebimus rectam lineam contingentem ellipsim vel circulum in vno puncto A, occurrentem in L diametro MKN. Iam verò si recta CED non sit parallela contingenti rectæ IAL, poterimus per prop.31. lib.1. elem. ex puncto D agere rectam chordam in circulo vel ellipsi datis, æquidistantem tangenti rectæ IAL, sitque hæc chorda DGF quæ vel non incedet per centrum K, vel incedet per dictum centrum, vt DKH: In primo casu; ducatur recta FC, quæ per prop.10. lib.1. tota erit intra ellipsim vel circulum, & producta procedet extra ipsarum sectionum aream.

Demonstratio. Ponitur ab aduersario recta DKH parallela ipsi tangenti IAL; transit verò per centrum K, in quo bifariàm diuiditur in circulo per defin.15. lib. 1. elem. & in ellipsi per prop.30. lib.1. excluditur autem ab datis in propositione: igitur introduci nequit huiusmodi recta DKH transiens per centrum K sectionis. Alia demonstratio in casu quo recta DKH incedens per centrum ponatur ab aduersario parallela tangenti datæ IAL. Ex apparatu resultat triangulum AKL: Rectæ verò DKH, MKNL, se mutuò decussant in centro K, ergo per 11.axiom. lib.1. element. transibunt ad partes contrarias, & sic recta HKD diuidet angulum AKL dicti trianguli igitur per 29.axiom. lib. 1. elem. producta vltra D, occurret rectæ IAL in puncto R subtendenti angulum AKL; ideoque rectæ parallelæ positæ ab aduersario IAL, HKD, non erunt parallelæ: hoc absurdum indicat rectam DKH non posse esse parallelam tangenti IAL, ductam ab puncto D. Iam verò demonstremus propositum in casu quo recta DGF introducta ab aduersario parallela tangenti IAL, non incedat per centrum K sectionis, sed supra illud vt recta DGF, vel infrà vt recta DOP; Assumendo primum casum; Per prop. 11. Procli, & coroll. nostrum 7. ad propos.48. lib.1. quia recta DFG chorda est parallela tangenti IAL, vnamque secat IAL, diameter AB in puncto A, contactus, secabit etiam aliam DFG, in G bifariàm & erit ordinatim applicata diametro ipsi AB: ergo si per propos.31. lib.1. elem. rectam lineam per K centrum concipiamus ductam, parallelam ipsi FGD ordinatim applicatæ diametro AB, erit per 4.defin. lib.1. inter secundas, secunda diameter sectionis, seu coniugata datæ diametro AB: ergo cùm recta FC secet ellipsim inter coniugatas diametros, quarum vna est AB, occurret ipsi per propos.23. lib.1. similiter etiam in circulo per coroll. nostrum 1. ad cit. propos. 23. lib.1. Verùm datur recta DEC secta bifariàm in E; & alia DGF quia ordinatim applicata est ostensa diametro AB, erit bifariàm secta in G ab illa per defin.10. lib.1. inter primas; Igitur cùm trianguli CDF, latera duo CD, FD, secta sint bifariàm, hoc est proportionaliter, illud in E, hoc in G; rectæ lineæ EG, hoc est AB, & CF, erunt per prop.2. lib.6. elem. parallelæ, concessæ concurrere. Assumendo autem secundum casum; quia recta POD introducta ab aduersario parallela tangenti rectæ IAL, decussat rectam LD ducendam, transeundo ad partes A, iuxta 11.axiom. lib.1. element. Si concipiamus rectam AD ductam, habebimus triangulum rectilineum ADL, cuius angulum ADL diuidet recta POD decussando ipsas rectas AD, LD, (nulli enim illarum esse potest in directum, alioqui ipsa POD occurreret tangenti rectæ IAL positæ ab aduersario parallela ipsimet IAL.) verùm per axio. 29. lib.1. elem. producta concurret cum ipsamet IAL, contra positionem aduersarij. Igitur quocumque se vertat aduersarius sibi ipsi contradicit; quare absurda hæc indicant positionem aduersarij negantis rectam DEC non transeuntem per centrum K ellipseos vel circuli, bifariàmque diuisam ab diametro AB, minimè esse parallelam ipsi tangenti IAL in extremo A diametri prædictæ AB, falsam esse: quare paral-

parallelæ erunt rectæ IAL, CED. Quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM I.

Apollonius consultò in hac propositione excludit chordam ellipseos vel circuli transeuntem per centrum sectionis.

NAm per centrum ellipseos vel circuli possumus ducere chordas duas quæ singulæ bifariàm diuidentur in centro, & quidem in ellipsi per propos. 30. lib. 1. & in circulo per defin. 15. lib. 1. elem. quarum vna sit parallela datæ tangenti sectionem in extremo diametri transeuntis etiam per centrum ac diuidentis bifariàm singulas dictas duas rectas; altera verò non parallela dictæ tangenti: ideoque istæ duæ chordæ bifariàm sectæ ab dicta diametro in centro sectionis se mutuò intersecabunt, & non erunt parallelæ. Iam verò si recta linea admitteretur bifariàm diuisa ab diametro, transiens per centrum ellipseos vel circuli, vt probetur recta linea contingens sectionem in extremo diametri esse parallela illi bifariàm diuisæ; esset parallela dictis duabus rectis bifariàm diuisis in centro; ideoque per propos. 30. lib. 1. element. duæ illæ rectæ lineæ non parallelæ transeuntes per centrum, essent parallelæ: quod est absurdum. consultò igitur excludit rectam lineam bifariàm diuisam ab diametro ellipseos, circuli vel ellipseos, transeuntem per centrum, ad probandam propositam proprietatem in ellipsi & circulo in vniuersum; quam asseruit in alijs duabus sectionibus Parabola & Hyperbola, propositione præcedente.

COROLL. NOSTRVM II.

Si recta linea accommodata in sectione bifariàm secetur à diametro eius extra centrum; ipsa & reliquæ omnes aliæ parallelæ ipsi, accommodatæ intra eandem sectionem, erunt ordinatim applicatæ dictæ diametro.

SI enim concipiatur per terminum diametri datæ existentem in linea curua sectionis, recta linea contingens ipsammet sectionem, parallela datæ rectæ bifariàm diuisæ ab diametro data sectionis extra centrum eius: erit per propos. 5. & hanc 6. recta linea tangens prædicta æquidistans bifariàm sectæ datæ rectæ; ideoque etiam æquidistans reliquis parallelis datæ bifariàm sectæ per propos. 30. lib. 1. elem. quare cùm recta data, & ei parallelæ accommodatæ omnes in sectione sint parallelæ tangenti sectionem, erunt per coroll. nostrum 7. ad prop. 48. lib. 1. dicta recta bifariàm diuisa & omnes rectæ aliæ lineæ ipsi parallelæ accommodatæ in sectione, ordinatim applicatæ dictæ diametro.

PROPOSITIO VII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam recta linea contingat; & huic æquidistans ducatur in sectione, & bifariàm diuidatur: quæ à tactu ad punctum lineam bifariàm diuidens iungitur, sectionis diameter erit.

SVppositio. Coni sectionem, vel circuli circumferentiam ABC, recta linea FBG contingat in aliquo puncto B; & rectæ isti tangenti sit accommodata in sectione vel circulo recta linea parallela AEC, bifariàmque diuisa in puncto E. Dico rectam BE deductam ex puncto B contactus ad punctum E, esse diametrum sectionis, vel circuli.

Apparatus. Si recta BE non sit diameter sectionis, vel circuli. Sit si fieri alia recta BH deducta ex puncto B contactus secans obuiam rectam AEC in alio puncto H diuerso ab E, diameter sectionis vel circuli.

Demonstratio. Quia recta AEC accommodata in sectione vel circulo parallela est tangenti datæ FBG; erit per coroll. nostrum 7. ad prop. 48. lib. 1. ordinatim applicata diametro BH, ideoque per defin. 10. & 12. lib. 1. inter primas, diuisa bifariàm in H: quare æquales erunt eius partes AH, HC; sed & datæ sunt eiusdem AC rectæ, partes eius æquales AE, EC: igitur per 7. axiom. lib. 1. element. rectæ AH, AE, videlicet semisses eiusdem rectæ AC, erunt æquales; totum & pars, contra 8. axiom. libri 1. element. hoc absurdum indicat positionem contradicentem assertioni huius propositionis esse falsam, videlicet rectam BE non esse diametrum sectionis vel circuli. Erit igitur recta BE diameter. Quod erat concludendum.

Alia demonstratio in circulo. Quandoquidem datur recta FBG circulum tangere in puncto B; si recta BE non sit diameter circuli, producta vltra E si opus sit, non incedet per I, centrum circuli; omnis enim recta chorda in circulo quæ non est diameter eius, non incedit per centrum eius: quare per coroll. nostrum ad prop. 32. lib. 1. elem. non erit perpendicularis tangenti rectæ FBG. Igitur si per prop. 11. lib. 1. elem. ex puncto B contactus excitetur recta linea BH, perpendicularis ad tangentem FBG, versus centrum circuli, ipsa transibit per centrum circuli, iuxta propos. 19. lib. 3. elem. secabitque obuiam rectam AC in H puncto diuerso ab E, alioqui recta BE transiret per centrum circuli contra demonstrata, vel duæ rectæ spatium clauderent contra lib. 1. element. ax. 14.

vel

vel ſegmentum commune haberent, contra eiuſdem libri axiom. 10. Eſt autem recta BH perpendicularis rectæ AC per coroll. noſt. 2. ad propoſ. 29. lib. 1. elem. eo quod ſit perpendicularis alteri parallelæ FBG: ergo per 3. propoſ. lib. 3. elem. ſecabit biſariàm in H rectam AC, erunt æquales rectæ AH, HC: ſed & ex datis ſunt æquales eiuſdem rectæ AC, ſemiſſes AE, EC; ergo per 7. axiom. lib. 1. elemen. rectæ AH, AE, ſemiſſes eiuſdem rectæ AC, erunt æquales; totum & pars, contra 8. axiom. lib. eiuſdem 1. element. abſurdum hoc conſequens indicat poſitionem è qua procedit eſſe falſam; videlicet rectam BE non eſſe diametrum circuli. Erit igitur diameter eius, ſicut fuit propoſitum in hac propoſitione. Atque demonſtrauerimus alia ratione intentum in ſolo circulo.

PROPOSITIO VIII.

Si Hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis; producta ex vtraque parte, cum aſymptotis conueniet: & lineæ quæ ex ipſa abſciſſæ inter ſectionem & aſymptotos interijciuntur, æquales erunt.

SVppoſitio. Hyperbolæ ABC, recta linea AC occurrat in duobus punctis A, C; ſintque eius aſymptoti duæ rectæ DE, DF, procedentes ex natura ſua per deſintio. 3. ex centro D ipſius Hyperboles. Dico rectam AC ductam vtrimque vltra A & C, conuenire cum aſymptotis prædictis; & quidem E vltra A, cum aſymptoto DE; & in F vltra C, cum aſymptoto DF: tùm portiones AE, CF, ſitas inter ipſam Hyperbolen & eius aſymptotos prædictas, eſſe æquales.

Apparatus. Recta AC quæ per propoſ. 10. lib. 1. tota eſt intra locum Hyperbolæ, biſariàm ſecetur in G per prop. 10. lib. 1. elemen. & ex centro D per hoc punctum G ſitum intra locum Hyperboles, tranſmittatur; hæc recta ſecabit obuiam lineam curuam Hyperboles in puncto B; & per coroll. noſtrum 5. ad prop. 2. erit diameter illius; & quidem tranſuerſa, eò quòd ingrediatur intra locum eius, & diuidat angulum EAD ipſam continentem. Concipiatur autem recta linea HBK contingens ſectionem in B termino diametri DBG; hæc erit parallela ipſi rectæ AC biſariàm ſectæ in G ab dicta diametro DBG, per prop. 5. Porrò per propoſ. 3. hæc recta HBK, conueniet cum vtraque aſymptoto in H & K, & biſariàm diuidetur in puncto B contactus per prop. 3.

Demonſtratio. Quia aſymptotos DE ſecat in H parallelam rectam HBK ipſi AC, ſecabit etiam in E, aliam parallelam AC productam vltra A, per propoſ. 11. Procli. Similiter aſymptotos alia DF quia ſecat eandem rectam HBK in K; ſecabit etiam in F alteram AC ipſi parallelam productam vltra C. & ſic propoſitum primum demonſtratum erit. Et quia in triangulo rectilineo EDF, ſunt parallelæ rectæ HBK, EGF, earumque alteram HBK biſariàm ſecat in B ex apparatu, recta DBG; per coroll. noſtrum ad prop. 4. lib. 6. elem. ſecabit etiam eadem recta DBG, biſariàm alteram rectam EF in puncto G. Quod ſi ab æqualibus rectis GE, GF, demantur æquales poſitæ in apparatu, rectæ GA, GC; relinquentur æquales portiones AE, CF, per 3. axiom. lib. 1. element. illæ verò ſunt ſitæ inter aſymptotos DE, DF, & inter Hyperbolen. Ergo propoſitum in ſecunda parte erit demonſtratum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Eiſdem datis, ac demonſtratis; erit recta FA æqualis rectæ EC.

ADdita enim communi recta AC, ipſis æqualibus oſtenſis AE, CF; fient per 2. ax. lib. 1. elem. rectæ FA, EC æquales.

PROPOSITIO IX.

Si recta linea aſymptotis occurrens, ab Hyperbola biſariàm ſecetur: in vno tantùm puncto ſectionem contingit.

SVppoſitio. Hyperboles aſymptotis duabus AC, AD, recta linea CD occurrens, biſariàm diuiſa ſit ab Hyperbola ipſa in E puncto. Dico rectam iſtam, CD contingere in vno tantùm puncto E, ipſam Hyperbolam.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit, habeat recta CD aliud punctum commune B, diuerſum ab E ac ſeparatum, cum ipſa Hyperbola; ſeu quod idem eſt, recta CD ſecet Hyperbolam in duobus punctis E, B. Tunc verò quia datur recta CD, aſymptotis AC, AD, Hyperboles occurrere; erunt per prop. præcedentem 8. rectæ CE, DB, æquales: datur autem recta CE æqualis rectæ ED, quia datur diuiſa biſariàm in E: ergo per 1. axioma lib. 1. elem. duæ rectæ ED, BD, erunt æquales, totum & pars, contra 8. ax. lib. eiuſdem. hoc abſurdum, quia prouenit ex poſitione contradicente aſſertioni huius propoſitionis, falſa erit ipſa poſitio, & aſſertio vera.

PROPOSITIO X.

Si recta linea sectionem secans, cum vtraque asymptoto conueniat: rectangulum contentum rectis lineis quæ inter asymptotos & sectionem interijciuntur, æquale est quartæ parti figuræ factæ ad diametrum, quæ æquidistantes ipsi ductæ lineæ bifariàm diuidit.

SVppositio. Recta linea DF, secans sectionem quæ Hyperbole dicitur, ABC, in A & C, conueniat cum eius asymptotis ED, EF, prouenientibus ex centro E ipsius Hyperboles, per def. 3. in punctis D, F. Dico rectangulum sub DA, AF, vel sub FC, CD, rectis lineis quæ inter asymptotos ED, EF, & lineam curuam Hyperboles continentur, esse æquale parti quartæ figuræ applicatæ ad diametrum quæ æquidistantes ipsi ductæ DACF, accommodatas intra sectionem bifariàm diuidit.

Apparatus. Per prop. 10. lib. 1. elem. diuidatur recta linea AC, bifariàm in G; & ex centro E Hyperboles recta linea ad G punctum agatur; hæc secabit in B obuiam lineam curuam Hyperboles, eritque diameter eius per coroll. prop. 51. lib. 1. & ex operatione diuidet bifariàm rectam AC accommodatam in ipsa Hyperbola; & per coroll. nostrum 2. ad propositio. 6. rectæ omnes lineæ parallelæ huic AGC, accommodatæ intra dictam Hyperbolam, erunt ordinatim applicatæ ad dictam diametrum EBG, simul cum recta AGC; ideoque secabuntur ab dicta diametro bifariàm per 10. & 12. def. lib. 1. inter primas. Producendo autem rectam BE vltra centrum E, sumatur per 3. prop. lib. 1. elem. recta EH, æqualis rectæ EB; erit per defin. 3. inter secundas lib. 1. tota recta HEB, transuersa diameter seu transuersum latus datæ Hyperboles. Præterea per coroll. nostrum ad lemma 6. lib. 1. datis his tribus hoc ordine, rectangulo sub HG, GB, & quadrato rectæ AG, & recta linea HB, reperiatur recta linea BM, ad quam sit recta HB, vt rectangulum sub HG, GB, ad quadratum rectæ AG; erit inuertendo per coroll. propos. 4. lib. 5. elem. quadratum rectæ AG ad rectangulum sub HG, GB, vt recta linea BM ad rectam HG; & per coroll. nostrum 4. ad propos. 21. lib. 1. quandoquidem quadratum rectæ AG est quadratum rectæ lineæ ordinatim applicatæ diametro HBG Hyperboles datæ; & rectangulum sub HG, GB, est sub portionibus diametri dictæ inter vertices H & B, & ipsam rectam AG; & recta HB est transuersum latus Hyperboles; recta linea BM inuenta erit latus rectum in Hyperbola data, respectu transuersi HB: quæ recta BM seu rectum latus aliter reperietur per coroll. nostrum 2. ad prop. 51. lib. 1. ex dato latere transuerso HB, & recta AG ordinatim applicata illi transuerso lateri producto intra locum Hyperboles. His positis dico quod rectangulum sub DA, AF, vel sub FC, CD, sit æquale quartæ parti figuræ, hoc est iuxta defin. 1. rectanguli HB, BM. ad quod probandum, ducatur per prop. 31. lib. 1. elem. per B verticem Hyperboles recta linea KBL parallela ipsi AGC ordinatim applicatæ diametro transuersæ HBG, hæc recta per propos. 32. lib. 1. vel 17. continget in vnico puncto B, ipsam Hyperbolam: tùm per prop. 3. libri huius, occurret in K & L, asymptotis ED, EF, datis; & ad tactum B bifariàm secabitur; & quadratum rectæ BL, vel BK, æquale erit quartæ parti prædictæ figuræ, vel prædicti rectanguli sub HB, BM. Itaque si probauerimus rectangulum sub DA, AF, vel sub FC, CD, esse æquale quadrato rectæ BL, vel BK, probauerimus intentum.

Demonstratio. Quandoquidem per apparatum quadratum rectæ BK, vel BL, est quarta pars rectanguli sub HB, BM, vel figuræ; & ostendimus in propositione prima, ita esse quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BK, sicut recta HB ad rectam BM; & per lemma 50. lib. 1. ob rectam KB parallelam basi DG, in triangulo DEG, est EG ad GD, vt EB ad BK; ideoque per propos. 22. lib. 6. elem. est quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ GD, vt quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BK: erit per 11. prop. lib. 5. elem. vt HB ad BM, sic quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ GD; Sed ex apparatu est vt HB ad BM, sic rectangulum sub HG, GB, ad quadratum rectæ AG. Conferendo autem quæ produximus in fine demonstrationis ad prop. 2. concludemus simili discursu, ex eisdem principijs, esse totum quadratum rectæ EG ad totum quadratum rectæ GD, sicut ablatum rectangulum sub HG, GB, ad ablatum quadratum rectæ GA; igitur per prop. 19. lib. 5. elem. reliquum quadratum rectæ EB ad reliquum rectangulum sub DA, AF, erit vt quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ GD, hoc est per prop. 11. lib. 5. elemen. vt quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BK. Quocirca per propos. 9. lib. 5. elemen. rectangulum sub DA, AF, erit æquale quadrato rectæ BK, seu æquale quartæ parti figuræ quæ ad diametrum transuersum HB constituitur. Ex eisdem principijs probabitur rectangulum sub FC, CD, esse æquale quadrato rectæ BL, vel quartæ parti prædictæ figuræ. Verùm hoc postremum sic breuius demonstrabitur. Per prop. 8. rectæ DA, FC, sunt æquales, quibus sublatis ab eadem recta DF, relinquentur rectæ AF, CD, æquales: itaque per lemma 49. lib. 1. rectangulum sub FC, CD, erit æquale rectangulo sub DA, AF; ostendimus

mus

mus autem hoc rectangulum sub DA, AF, esse æquale quartæ parti figuræ applicatæ diametro HB; ergo etiam per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum sub FC, CD, erit æquale eidem quartæ parti figuræ prædictę. Demonstrauimus ergo propositum.

COROLL. NOSTRVM I.

Rectangula contenta sub partibus rectæ lineæ secantis Hyperbolen, & eius asymptotos, inter ipsas asymptotos & hyperbolen sitis; sunt æqualia.

Hoc demonstrauimus in duobus rectangulis, vno sub DA, AF, altero sub FC, CD.

COROLL. NOSTRVM II.

Eisdem datis & probatis, si quotcumque rectæ lineæ accommodentur in triangulo DEF, parallelæ basi eius DF; instar omnium sit recta huiusmodi NR quæ secabit intermedia Hyperboles lineam curuam in duobus punctis O, P. Rectangula omnia sub partibus istarum rectarum, & rectæ DF, sitis inter asymptotos & Hyperbolen, æqualia erunt inter se.

Sicuti enim demonstrauimus rectangula sub DA, AF, & sub FC, CD, esse æqualia quartæ parti figuræ, ita etiam per hanc propositionem erunt rectangula vnum sub NO, OR, aliud sub RP, PN, & sic de alijs huiusmodi, eidem quartæ parti figuræ æqualia: ideoque per 1. axioma lib. 1. element. æqualia inter se.

PROPOSITIO XI.

Si vtramque linearum continentium angulum qui deinceps est angulo Hyperbolen continenti, secet recta linea; in vno tantùm puncto cum sectione conueniet: & rectangulum constans ex ijs quæ interijciuntur inter lineas angulum continentes & sectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro, quæ secanti lineæ æquidistans ducitur.

Supposito. Asymptoti Hyperboles sint rectæ lineæ AC, AD, angulum CAD ipsius Hyperboles efficientes; ipsarumque altera, puta DA producta sit vltra A centrum Hyperboles, è quo per defin. 3. decidere debent ipsæ asymptoti, ita vt duæ asymptoti DAE, AC, efficiant angulum EAC qui deinceps est angulo CAD continenti Hyperbolam, iuxta defin. 7. & has rectas DAE, AC, secet recta linea EF, producendo si opus sit rectam AC vltra C. Dico primò quod recta EF producenda vltra F, secet in vnico tantùm puncto, puta G, lineam curuam ipsius Hyperboles. Secundò assero quod rectangulum sub EG, GF, rectis positis inter lineam curuam Hyperboles & lineas prædictas DAF, ACF, prædictum angulum EAC vel EAF efficientes, sit æquale quartæ parti quadrati ex diametro seu transuerso latere quod secanti rectæ EFG sit æquidistans.

Apparatus, pro prima parte demonstranda. Ex puncto A quod esse centrum Hyperboles ostendimus in suppositione, agatur per prop. 31. lib. 1. element. recta linea MABL parallela secanti prædictæ rectæ EFG, diuidet angulum CAD continentem Hyperbolam, per lemma 3. quare per propos. 2. coroll. nostr. 5. hyperbolam ipsam secabit in B; & procedet producta intra locum Hyperboles; ideoque erit diameter ipsius per coroll. prop. 51. lib. 1.

Demonstratio primæ partis. Quia est per apparatum recta EFG parallela diametro Hyperboles, videlicet MABL, secans in F & E, asymptotos ex datis; & ex prop. 8. lib. 1. potest in infinitum produci ipsa Hyperbola ad partes contrarias vertici, tandem recta EFG occurret ipsi in G; & quidem in hoc vnico puncto per prop. 26. lib. 1.

Apparatus pro secunda parte demonstranda. De producta recta BA vltra A, Per propos. 3. libri. elem. sumatur recta AM ex centro A, æqualis ipsi AB; erit per definit. 3. Inter secundas lib. 1. recta MAB transuersum latus datæ Hyperboles. Tùm ex puncto G, concipiatur recta linea HGLIK ordinatim applicata diametro MABL, secans in G & I, lineam curuam hyperboles ex natura sua iuxta defin. 10. lib. 1. inter primas: hæc recta occurret per prop. 8. asymptotis AC, AD, productis vltra C & D, si opus sit, in punctis H & K, & bifariàm in L diuidetur ipsa GLI per cit. def. 10. eruntque rectæ HG, IK æquales rectæ per cit. prop. 8. quæ additæ æqualibus GL, IL, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. HL, KL, æquales, vnde recta HK bifariàm erit secta in L. Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. per punctum B verticis Hyperboles agatur recta linea CBD parallela ipsi GLI ordinatim applicatæ diametro MABL, continget Hyperbolen in B puncto vnico per prop. 17. lib. 1. vel per prop. 32. lib. eiusdem 1. & secabit asymptotos datas in C & B, & bifariàm diuidetur in B, per propositio. 3. Et quia in parallelas rectas MAL, EFG, incidit recta AFH, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli CAB, HFG, æquales: tùm etiam quia eadem recta AFH. incidit in rectas parallelas CBD, HG; erunt per cit. proposit. 29. lib. 1. elemen. anguli ACB,

FHG,

FHG, æquales: igitur per coroll. noſt. 3. ad prop. 32. lib. 1. elemen. reliqui tertij anguli in triangulis ABC, FGH, erunt æquales; vnde ipſa triangula erunt æquiangula. Simili modo, quia in parallelas BD, LK, incidit recta ADK, & recta ABL; erunt per propoſ. 29. lib. 1. elem. anguli ADB, AKL æquales, & alij anguli ABD, ALK, æquales; eſt autem triangulis DAB, KAB, angulus in A communis: ergo ipſa triangula erunt æquiangula. Quia verò recta MB, eſt dupla rectæ AB, vel AM, ſemiſſium; erit per coroll. noſtrum ad prop. 20. lib. 6. elem. quadratum lateris tranſuerſi MAB, quadruplum quadrati rectæ AM, vel AB; ideoque quadratum rectæ AB, erit quarta pars quadrati diametri tranſuerſæ vel lateris tranſuerſi MAB, datæ Hyperboles. Quod ſi oſtenderimus rectangulum ſub EG, GF, eſſe æquale quadrato rectæ AB, propoſitum ſecundum erit manifeſtum. Sed anteà oſtendamus triangula DAB, KEG eſſe æquiangula: probati ſunt anguli in D & K alterni æquales; ſuntque etiam per propoſit. 29. lib. 1. elem. anguli in E & A alterni æquales, incidente recta EAD in parallelas rectas EFG, AB; igitur dicta triangula reliquos tertios obtinebunt æquales per coroll. noſt. 3. ad prop. 32. lib. 1. ele. quare ipſa erunt æquiangula.

Demonſtratio ſecundæ partis. Cùm recta CB ſit æqualis rectæ BD, erit rectangulum ſub CB, BD, æquale quadrato rectæ CB; ideoque quadratum rectæ CB erit ad quadratum rectæ BA, in eadem ratione per propoſ. 7. lib. 5. elem. atque dictum rectangulum; Sed per prop. 23. lib. 6. elem. rectangulum ſub CB, BD, eſt ad quadratum rectæ BA, in ratione compoſita ex CB ad BA, & ex ratione BD ad BA. Et quia ſunt triangula CBA, HGF, oſtenſa in apparatu æquiangula, erit per 4. prop. lib. 6. elem. vt CB ad BA, ſic HG ad GF; & quia ſunt etiam oſtenſa triangula BDA, GKE, æquiangula in apparatu, erit per cit. prop. 4. lib. 6. elem. vt DB ad BA, ſic KG ad GE: igitur, per lem. 7. ad lib. 1. proportio quadrati rectæ CB ad quadratum rectæ BA, componetur ex ratione HG ad GF, & ex ratione KG ad GE. Porrò per cit. prop. 23. lib. 6. elem. proportio rectanguli ſub KG, GH, ad rectangulum ſub EG, GF, componitur ex eiſdem rationibus HG ad GF, & ex GK ad GE: ergo per lemma cit. 7. ad lib. 1. erit vt rectangulum ſub KG GH, ad rectangulum ſub EG, GF, ſic quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ BA; & viciſſim per prop. 16. lib. 5. elem. vt rectangulum ſub KG, GH, ad quadratum rectæ CB, ita rectangulum ſub EG, GF, ad quadratum rectæ AB. Conſtat verò per propoſ. 10. præcedent. quod rectangulum ſub KG, GH, ſit æquale quadrato rectæ CB; ergo per coroll. noſt. 2. ad prop. 14. lib. 5. element. rectangulum ſub EG, GF, æquale erit quadrato rectæ AB. Atque ita demonſtrauerimus ſecundam huius propoſitionis partem.

COROLL. NOSTRVM I.

Si recta linea ab aliquo puncto vnius aſymptotorum Hyperboles productarum vltra centrum Hyperboles ducatur parallela diametro tranſuerſæ illius, ſecans alteram aſymptotum & Hyperbolen: rectangulum ſub tota ſecante poſita inter aſymptotum productam, & Hyperbolen, & ſub huius ſegmento inter Hyperbolam & alteram aſymptotum ſectam non productam vltra centrum, erit æquale quartæ parti quadrati lateris tranſuerſi aſſumpti.

Exempli gratiâ ſit recta linea NOP, ſecans productam vltra A centrum Hyperboles aſymptotum DA in N, & alteram aſymptotum AC non productam vltra centrum A, in puncto O, & lineam curuam Hyperboles in P; ſitque ipſa recta NOP parallela lateri tranſuerſo MAB lateri Hyperboles. Dico quod rectangulum ſub NP, PO, ſit æquale quartæ parti quadrati lateris tranſuerſi MAB.

Conſtat enim ex iſta propoſitio. 11. dictum rectangulum ſub NP, PO, eſſe æquale quadrato rectæ AB, quod oſtendimus eſſe quartam partem quadrati lateris tranſuerſi MAB.

COROLL. NOSTRVM II.

Si innumeræ rectæ lineæ parallelæ tranſuerſo lateri hyperboles, ſecent productam vnam eius aſymptotum vltra centrum eius, & alteram aſymptotum non productam vltra centrum, & lineam curuam ipſius Hyperboles. Rectangula illarum rectarum parallelarum ſub totis interceptis inter productam aſymptotum & lineam curuam ſectionis, & ſub earum ſegmentis inter aſymptotum non productam vltra centrum, & lineam curuam ſectionis; erunt æqualia inter ſe.

Nam per coroll. præcedens ſunt æqualia dicta omnia rectangula ſeorſim ſumpta quartæ parti quadrati lateris tranſuerſi aſſumpti: ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. erunt æqualia inter ſe.

PROPOSITIO XII.

Si ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in ſectione Hyperboles, ad aſymptotos duæ rectæ lineæ in quibuſlibet angulis ducantur; & ab altero puncto in eadem ſectione ſumpto ducantur aliæ duæ lineæ

neæ his ipsis æquidistantes: Rectangulum ex æquidistantibus cōstans, æquale est ei, quod fit ex ijs quibus illæ equidistantes ductæ fuerant.

SVppositio. Hyperboles sint duæ asymptoti BA, BC; & ab aliquo puncto D sito in linea curua Hyperboles ductæ sint in quibuslibet angulis rectilineis duæ rectæ lineæ DF, DE, ad illas asymptotos, vna ad vnam, altera ad aliam: tùm ab quouis alio puncto G sito etiam in linea curua Hyperboles ductæ sint aliæ duæ rectæ lineæ GH, GK, ad easdem asymptotos, vna ad vnam, altera ad aliam; parallelæ prædictis, hoc est GH ipsi DE, & GK ipsi DF. Dico quod rectangulum sub GH, GK, secundis rectis, sit æquale rectangulo sub primis DF, DE.

Apparatus. Puncta assumpta D & G, in linea curua Hyperboles, nectantur recta linea GD, quæ tota erit intra sectionem, per prop. 10. lib. 1. & producta vtrimque occurret per prop. 8. asymptotis in A & C.

Demonstratio. Per coroll. nostr. ad prop. 10. rectangulum sub AG, GC, erit æquale rectangulo sub CD, DA: quare per prop. 14. lib. 6. elemen. habebunt latera reciproca, hoc est erit vt GA ad AD, sic DC ad GC. & quia in triangulo EAD, est parallela ex datis recta GH, basi DE, erit per lemma 50. lib. 1. vt AG ad GH, sic AD ad DE; & vt AG ad AD, sic GH ad DE. Similiter quia ex datis DF est parallela ipsi GK in triangulo GCK, erit per cit. lem 50. lib. 1. vt CD ad DF, sic CG ad GK; & vt CD ad CG, sic DF ad GK: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt GH ad DE, sic DF ad GK: quare per propos. 16. lib 6. elem erit rectangulum sub extremis GH, GK, æquale rectangulo sub medijs DE, DF. Quod erat propositum ac demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Si in loco asymptotis & Hyperbola terminato, quædam recta linea ducatur alteri asymptoto æquidistans: in vno tantùm puncto cum Hyperbola conueniet.

SVppositio. Hyperboles sint duæ asymptoti AC, AB, ex centro A Hyperboles defluentes iuxta defin. 3. datumque punctum E in loco asymptotis prædictis & Hyperbola terminato, ex quo puncto E sit recta linea EF parallela vni asymptotorum datarum, puta AB. Dico primò quod hæc recta EF conueniat cum linea curua Hyperboles: Secundò quod hic occursus vel concursus fit in vno solùm puncto, verbi gratiâ M.

Apparatus pro prima parte demonstranda. Esto si fieri possit recta EF non conueniat cum linea curua Hyperboles; etiamsi producantur ambæ in infinitum, linea quidem EF, per pet. 2. lib. 1. elem. linea verò curua Hyperboles iuxta prop. 8. lib. 1. Imprimis quia ex datis duæ rectæ EF, AB, sunt parallelæ, ipsarumque alteram AB, secat asymptotus AC in centro A, secabit etiam ipsa AC; aliam EF in O, per propos. 11. Procli; Iam verò in linea curua Hyperboles sumatur aliquod punctum G, per quod iuxta prop. 31. lib. 1. elem. agantur duæ rectæ lineæ GC, GH, ad asymptotos datas AB, AC; GC quidem parallela ipsi AB, & GH parallela ipsi AC; secabuntur in C & H, per propos. 11. Procli ab ipsis asymptotis AC, AB; & resultabit parallelogrammum GA. Tùm per lem. 12. lib. 1. dato rectangulo sub GC, GH, & recta AO, reperiatur alia recta OF, sub qua & data AO, rectangulum, sit æquale rectangulo prædicto sub CG, GH: hæc recta OF ex positione aduersarij non terminabitur in linea curua Hyperboles, etiam si producatur in infinitum; namipsa EF est pars illius. Ducatur recta AF, quæ diuidet angulum BAC continentem datam Hyperbolen, ideoque per coroll. nost. 5 ad prop. 2. producta vltra F versus Hyperbolen ipsius curuam lineam secabit in puncto K: ex quo per prop. 31. lib. 1. elem. transmittantur rectæ lineæ KL, KD; KD quidem parallela ipsi GH; & KL parallela ipsi GC: & quia rectæ GC, GH, sunt parallelæ positæ asymptotis AC, AB, respectiuè; erunt etiam per propos. 30 lib. 1. element. duæ rectæ postremo loco KL, KD, parallelæ eisdem asymptotis; hoc est KL erit parallela asymptoto AB, & KD æquidistans asymptoto AC.

Demonstratio. Per prop. 12. præcedentem; rectangulum sub CG, GH, est æquale rectangulo sub KD, KL; positum verò est rectangulum sub AO, OF, in apparatu, æquale rectangulo sub CG, GH: ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. rectangulum sub KD, KL, erit æquale rectangulo sub AO, OF; pars toti, vel totum parti, contra 8. axiom. lib. 1. elem. (Nam cùm rectæ OEF, LK, sint per apparatum parallelæ, in triangulis AOF, ALK, poterimus per lemma 50. lib. 1. sic comparare latera, vt AF ad FO, sic AK, ad KL; primum est minus tertio, ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secundum FO minus erit quarto KL: tùm etiam erit vt AF ad AO, sic AK ad AL; primum AF minus est tertio AK, ergo secundum AO minus erit quarto AL, per eandem cit. prop. 14. igitur per lemma 49. lib. 1. rectangulum sub KL, AL, vel sub KL, KD, sunt enim per prop. 34. lib. 1. elemen. in parallelogrammo DL, latera opposita AL, KD, æqualia; maius erit quàm rectan-

rectangulum sub AO, OF.) Hæc pugnantia cùm proueniant ex positione quod recta EF producta non occurrat Hyperbolæ datæ, ipsa falsa erit: igitur conueniet in M vti asseruimus in prima parte.

Apparatus pro secunda parte demonstranda. Esto si fieri possit recta EF secet lineam curuam Hyperboles duobus in punctis distinctis M & N: & per prop. 31. lib. 1. ele. agantur duæ rectæ lineæ MX, NB, parallelæ asymptoto AC, erunt etiam parallelæ inter se per propos. 30. lib. 1. elem. & secabuntur ab alia asymptoto AB, in X & B, per prop. 11. Procli, quia secat asymptotum AC aliam parallelam; resultabunt ex hoc apparatu, & alio ad primam partem, parallelogramma BO, XO, BM: vnde per proposit. 34. lib. 1. elem. erunt æqualia latera NB, MX, opposita in parallelogrammo BM.

Demonstratio secundæ partis. Per prop. 12. præcedentem, rectangulum sub OM, MX, æquale est rectangulo sub ON, NB: sed licet sint æquales ostensæ NB, MX, tamen recta ON maior est quàm recta OM; ergo per lemma 49. lib. 1. rectangulum sub ON, NB, maius erit quàm rectangulum sub OM, MX. idem ergo rectangulum sub OM, MX, æquale erit & maius rectangulo sub ON, NB, quod est absurdum. ergo & id vnde sequitur, videlicet, rectam EF parallelam alteri AB asymptotorum deductam ex puncto E sito in loco inter asymptotos & Hyperbolam, secare eius lineam curuam in pluribus quàm vno punctis. occurret igitur illi in vno tantum puncto, sicut fuit assertum.

COROLL. NOSTRVM I.

Rectæ omnes lineæ ab punctis asymptotorum Hyperboles, ductæ versus ipsam Hyperbolam parallelæ vni asymptotorum, conuenient singulæ cum linea curua Hyperboles, idque in vno tantum puncto proprio diuerso ab alio aliarum.

CVm enim transeant per locum inter ipsas asymptotos & Hyperbolam, conuenient cum illa, in vno tantùm puncto singulæ, per propos. præsentem: diuersum tamen ab alio singularum: nam si duæ conuenirent in eodem puncto, cùm sint parallelæ positæ omnes vni asymptotorum, erunt per propositio. 30. lib. 1. parallelæ inter se; & sic parallelæ rectæ conuenirent, contra naturam illarum: diuersa igitur erunt puncta occursus illarum cum linea curua Hyperboles.

COROLL. NOSTRVM II.

Qualibet recta linea intra planum Hyperboles ducta parallela vni eius asymptotorum, occurret in vnico tantùm puncto lineæ curuæ Hyperboles, versus alteram asymptotum cui non est parallela.

QVoniam asymptoti Hyperboles se mutuò secant in centro eius, & detur recta linea intra Hyperbolam parallela vni harum asymptotorum, si producatur versus alteram asymptotum cui non est parallela, secabitur ab illa per prop. 11. Procli: quare occurret intermediæ lineæ curuæ Hyperboles versus illam asymptotum: igitur non occurret alteri puncto per coroll. nostrum præcedens.

COROLLARIVM NOST. III.

Consultò in corollario nostro 2. ad prop. 18. lib. 1. non fecimus mentionem Hyperboles; quando asseruimus rectam lineam secantem diametrum Parabolæ, Ellipseos, & circuli, intra locum illarum, productam ex vtraque parte, occurrere sectioni ex vtraque parte, hoc est duobus in punctis.

NAm prævidebamus posse rectam lineam intra locum Hyperboles secare aliquam eius diametrum, & esse parallelam vni eius asymptotorum; & sic per corollarium nostrum præcedens non posse occurrere nisi vni puncto Hyperbolicæ lineæ, licet ex alia parte producatur in infinitum.

COROLL. NOSTRVM IV.

Qualibet recta linea secans diametrum Hyperboles intra locum eius, nulli eius asymptotorum parallela, producta vtrinque in infinitum, occurret ex vtraque parte lineæ curuæ Hyperboles; hoc est eam secabit duobus in punctis.

HYperboles asymptoti duæ sint AB, AC; & vna eius diameter AD, quam secet recta EF in D, intra locum ipsius Hyperboles, nulli eius asymptotorum æquidistans. Dico hanc rectam EF nulli asymptotorum datarum parallelam, productam vtrimque occurrere duobus in punctis lineæ curuæ Hyperboles.

Demonstratio. Quandoquidem recta EF, datur minimè parallela asymptotis AB, AC, in eodem plano existentibus cum recta EF: si ambæ producantur in infinitum, hoc est EF, & vna asymptotorum puta AC, sibi mutuò occurrent in puncto G, quod necessariò erit extra locum Hyperboles; nam asymptotus AC tota est ex natura sua extra Hyperbolam: secabit igitur EF intermediam lineam Hyperboles in puncto H. Præterea cùm non sit parallela EF ipsi alteri asymptoto AB, poterimus per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto G educere rectam lineam GI versus locum Hyperboles parallelam asymptoto AB, quæ diuersa erit ab recta EDFHG, & quam secabit ipsa EDFHG; igitur per prop. 11. Procli, secabit etiam aliam parallelam nimirum asymptotum AB, in puncto K quod est extra locum ipsius Hyperboles, quia ex natura sua asymptotos AB est totam extra Hyperbolam: secabit igitur EF produ-

cta

cta versus hanc asymptotum vltra E, intermediam lineam curuam Hyperboles in puncto L. atque ita probauerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM V.

Recta linea ducta in loco asymptotis & Hyperbola terminato, nulli asymptotorum Hyperboles parallela: ipsas asymptotos secabit.

Sit recta linea MN ducta in loco dato, & minimè parallela vlli asymptotorum AB, AC, Hyperboles. dico quod producta vtrimque asymptotis ipsis occurrat, & quidem ipsi AB in R, & ipsi AC in O.

Demonstratio. Quandoquidem rectæ MN, AC, non sunt parallelæ, productæ occurrent puta in O: ex quo puncto educatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea OP parallela asymptoto alteri AB, hæc occurret in P puncto vnico Hyperboles per hanc propos. 13. coroll. nost. 1. diuersaque erit ab data MN: hanc verò rectam OP secat data recta MNO in O; ergo per propos. 11. Procli secabit eadem recta MNO alteram asymptotum AB in R. atque ita probauerimus intentum.

COROLL. NOSTRVM VI.

Qualibet recta linea non parallela vlli asymptotorum Hyperboles data, siue ducta sit intra locum Hyperboles, siue intra locum terminatum ipsius linea curua & asymptotis eius, (modò producta non terminetur in centro Hyperboles, & non diuidatur bifariam ab linea curua Hyperboles;) producta vtrimque secabit lineam curuam ipsius Hyperboles ex vtraque parte, hoc est duobus in punctis.

Si enim ducta sit intra locum Hyperboles; ab centro eius ad aliquod punctum datæ rectæ rectam transmittemus, quæ per corollar. prop. 51. lib. 1. erit diameter, sectaque ab data recta, intra locum ipsius Hyperboles; ergo per coroll. nost. 4. producta vtrimque ex vtraque parte occurret lineæ curuæ Hyperboles. Si verò ducta sit in loco asymptotis & Hyperbola ipsa terminato, secabit asymptotos per coroll. 5. præcedens: & ideo intermediam lineam curuam sectionis obuiam duobus in punctis.

COROLL. NOSTRVM VII.

Recta omnis linea perpendicularis axi Hyperboles, intra eius locum: producta vtrimque, occurret vtrique linea curua Hyperboles: & ex vna parte vni asymptotorum illius, & ex alia parte alteri asymptotorum.

Hyperboles ABE sit axis CHBDI, centrum H; Asymptoti duæ HP, HO, procedentes ex centro H: & recta linea ADE perpendicularis ipsi axi CHBD, in puncto eius D sito intra locum ipsius Hyperboles. Dico hanc rectam vtrimque productam occurrere lineæ curuæ Hyperboles, in A & E duobus punctis; & ipsis asymptotis in O & P.

Apparatus. In puncto D dato in axe CD, per propos. 23. lib. 1. elem. fiat angulus IDG æqualis angulo BHP; & alius angulus IDF æqualis angulo BHO: erunt per propos. 28. lib. 1. elem. parallelæ rectæ HP, DG; tùm parallelæ rectæ HO, DF.

Demonstratio. Recta ADE secat rectas DG, DF, quia angulos efficit cum illis acutos æquales acutis BHP, BHO, in quos diuiditur totus angulus OHP continens hyperbolam; igitur per prop. 11. Procli producta secabit asymptotos, HP quidem in P, & HO in O, ideoque intermediam curuam lineam Hyperboles in A, & E.

COROLL. NOSTRVM VIII.

Qualibet recta linea parallela vni asymptotorum ducta intra locum anguli continentis Hyperbolam, non tanget ipsam lineam hyperboles; sed secabit in vnico tantùm puncto, procedetque partim intra locum hyperboles.

Si enim tangeret lineam curuam hyperboles, conueniret cum vtraque asymptoto illius per 3. propos. igitur non esset parallela vni asymptoto contra datum. Iam verò punctum è quo incipit hæc parallela, vel erit in loco asymptotis & hyperbola terminato; vel in ipsa linea curua hyperboles: vel intra locum Hyperboles. Si 1. occurret per hanc prop. 13. ipsi sectioni in vnico solùm puncto, non ipsam tangendo vti probauimus, ergo secando. Si 2. ipsa per prop. 11. Procli occurret alteri asymptoto, igitur per coroll. nost. 1. conueniet cum sectione in vnico tantùm puncto, eam non tangendo vti probauimus, ergo secando. Si 3. occurret per 2. nost. coroll. ipsi hyperbolæ, eam non tangendo vti demonstrauimus; ergo secando. Quod si secet partim procedet intra locum ipsius Hyperboles.

PROPOSITIO XIV.

Asymptoti & sectio in infinitum productæ; ad se ipsas propiùs accedunt; & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo.

Suppositio. Hyperboles NHO sint asymptoti duæ AB, AC, datumque quodlibet interuallum, videlicet recta K. Dico dictas

 asym-

asymptotos in infinitum productas, & ipsius Hyperboles lineam curuam, propiùs & propiùs semper accedere ad inuicem; hoc est ex vna parte asymptotum AB, & ex eadem parte lineam curuam Hyperboles propiùs & propiùs accedere ad inuicem; & similiter ex alia parte asymptotum AC & lineam curuam Hyperboles ex eadem parte: & quidem ex ambabus partibus ad interuallum minus dato K.

Apparatus. Concipiatur vna recta linea IPR contingens in vnico puncto P Hyperbolen, quæque per propos. 3. occurret singulis asymptotis, & ad tactum bifariàm diuidetur. & per propos. 31. lib. 1. elem. ex diuersis punctis E, C, asymptoti vnius, puta AC, infra dictam tangentem, ducantur rectæ lineæ EF, CD, parallelæ tangenti prædictæ, istæ etiam erunt per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inter se; & per prop. 11. Procli secabuntur ab asymptotis AC, AD, in E, F, & in C, D, quia secant alteram parallelam prędictam tangentem, vti probauimus per prop. 3. istæ duæ rectæ EF, CD, secabunt obuiam lineam curuam, singulæ in duobus punctis, sed solùm indigemus vno pro singulis ad easdem partes: secet igitur recta EC, Hyperbolæ lineam curuam in puncto H, & recta CD in puncto G, ad easdem partes, seu versus eandem asymptotum AC. Tùm ex recta EF viciniore tangenti, sumatur per prop. 3. lib. 1. elem. ex puncto E versus H, recta EL minor quàm EH, & minor quàm data K: & per cit. prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto L, versus rectam CD, agatur recta linea LN parallela asymptoto AC: hæc recta LN quia ducta est ex puncto L sito intra locum asymptotis & hyperbola terminatum, parallela asymptoto AC, producta occurret Hyperbolæ vnico in puncto N, per prop. 13. Recta verò linea per punctum N agatur parallela cuilibet è supradictis EF, CD, vel tangenti assumptæ, per prop. 31. lib. 1. ele. fitque MNB, quæ per prop. 11. Procli occurret asymptotis, AC quidem in M, & AB in D. Porrò ex centro A Hyperboles, videlicet puncto concursus asymptotorum iuxta def. 3. per punctum H lineæ curuæ Hyperboles transmittatur recta AH, quæ producta vltra H, procedet intra locum Hyperboles, per coroll. nost. 1. ad prop. 31. lib. 1. eritque diameter Hyperboles per coroll. prop. 51. & in vnico tantum puncto H occurret sectioni per prop. 26. lib. 1. coroll. nost. 1. quare cùm debeat per propos. 11. Procli hæc recta AH secare rectam CGD parallelam ipsi sectæ EHF, secabit illam in puncto X sito intra locum hyperboles. Porrò ex hoc apparatu resultabit parallelogrammum ELNM: & in triangulo XAD, erit recta HF parallela basi XD; vnde per lemma 50. lib. 1. erit vt AF ad FH, sic AD ad DX, est verò AF prima recta minor quàm tertia AD, ergo per prop. 14. lib. 5. element. secunda FH minor erit quàm quarta DX, & multò minor quàm DG, per 1. ax. lib. 1. element. His positis sequitur

Demonstratio. Quandoquidem per coroll. nostrum 2. ad prop. 10. rectangulum sub CG, GD, est æquale rectangulo sub EH, HF; erit per prop. 14. lib. 6. elemen. vt DG ad FH, sic HE ad CG; sed DG est ostensa maior quàm FH; ergo per coroll. nost. 2. ad propos. 14. lib. 5. elem. EH maior erit CG: ergo per lemma 33. punctum H hyperbolicæ lineæ curuæ magis distabit ab asymptoto AC, quàm punctum G inferius; & sic de reliquis punctis inferioribus. Igitur producta AE asymptotos vltra E, magis accedet ad curuam lineam Hyperboles: & sic in infinitum probabitur magis ac magis accedere producendo asymptotum & lineam curuam hyperboles versus partes contrarias centro. Idem de alia asymptoto AB concludetur, præparando monita, & discurrendo ex citatis principijs. Sed age concludamus reliquum. Est per apparatum parallelogrammum ELNM, cuius latera EL, MN, opposita sunt æqualia per prop. 34. lib. 1. elem. EL autem in apparatu est minor recta quàm data K; & recta linea perpendicularis ab puncto N lineæ curuæ hyperboles ad asymptotum AM, multò minor est quàm NM, ideoque etiam minor quàm recta data K, per coroll. prop. 19. lib. 1. elem. (sumitur autem distantia puncti ad rectam lineam, penes perpendicularem rectam ab illo puncto ad rectam illam lineam.) Igitur ostenderimus asymptotum accedere ad lineam curuam siue hyperboles ad interuallum minus dato. & sic in infinitum de omnibus alijs quibuscumque minimis interuallis.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, lineas AB, AC, ad sectionem accedere propiùs, quàm omnes alia asymptoti. Et angulum BAC minorem esse quolibet angulo, qui alys huiusmodi lineis continetur. [dummodo angulus BAC non contineatur ab alys asymptotis impropriè dictis, parallelis respectiue ad AB, AC; ad easdem partes & non secent ipsas AB, AC, saltem vna illarum harum vnam.]

HOc Apollonij corollarium duo continet. Primum asymptotos rectas lineas AB, AC, propius accedere ad Hyperboles propriæ lineam curuam, quàm omnes aliæ asymptoti angulum efficientes; verbi gratià AD, AE, eductæ ab angulo CAB continentem Hyperbolam, seu ab centro A ipsius Hyperboles, vt videre est in prima figura; licet istæ AD, AE, non sint propriè asymptoti definitæ def. 3. sed impropriè & latè: cùm enim AD angulum efficiat DAB cum propria asymptoto AB, producta semper magis diuaricabitur ab asymptoto propria AB, & sic magis recedet ab hyperbola, alia verò AB

pro-

propiùs accedet ex propositione ista 14. Idem dicendum erit de alia AE asymptoto impropria. Quod si dentur aliæ duæ asymptoti impropriæ vt FD, FE, eductæ ex puncto F, intra locum anguli BAC continentis hyperbolam, secantes in H & I, propriè dictas asymptotos AB, AC, vt videre est in 2. figura; etiam magis recedent ab hyperbola quo longius producentur, quàm propriæ asymptoti AB, AC; aberrant enim magis à proprijs propter angulos in H & I; atque ita magis etiam aberrabunt ab Hyperbola quàm propriæ asymptoti; licet possit fieri vt magis accedant ad Hyperbolam versus verticem, quàm propriæ asymptoti, quod exhibet quinta figura: verùm productæ vlterius semper magis ac magis recedent ab Hyperbola, & aliæ propriæ asymptoti magis ac magis accedent. Si verò profluant in propriæ asymptoti ab puncto F, vnius asymptotorum propriatum; idem etiam concludetur, consulendo figuram tertiam. Vel si procedant ab puncto F extra locum proprijs asymptotis & hyperbola terminarum, prout repræsentat quarta figura: nihil verò refert quod versus verticem in aliquo puncto puta G magis accedat vna impropriarum FD asymptotorum, ad ipsam Hyperbolam, quàm quæuis propria asymptotus: nam intendit Apollonius in hac propositione solùm ostendere quod asymptoti propriè dictæ quò magis producuntur eò magis & magis accedere ad Hyperbolam; quod non conueniet impropriè dictis asymptotis, vt in hoc casu huius figuræ, tùm etiam figuræ 3. & 5. propter recessum maiorem & maiorem impropriæ asymptoti ab propria, ab puncto H in quo se mutuò intersecant. Atque ita explicauerimus primum huius corollarij propositum.

Alterum est, quod angulus BAC factus ab propriè dictis asymptotis definitis def. 3. sit minor quocumque alio angulo facto ab alijs impropriè dictis asymptotis respectu eiusdem Hyperboles. Quod hac ratione declarabimus. Sint asymptoti impropriè dictæ, eædem quæ in primo proposito superiore: manifestum est in prima figura angulum DAE maiorem esse angulo BAC, nam ille hunc continet. In secunda verò figura si ducatur recta HI, erunt duo triangula HAI, AFI, super eodem latere HI; sunt verò duo latera HF, IF, constituta intra triangulum HAI; ergo per propos. 21. lib. 1. elem. angulus HFI factus ab asymptotis impropriè dictis FD, FE, maior erit angulo BAC facto ab propriè dictis asymptotis AB, AC. In tertia autem figura, angulus DFC maior erit angulo BAC, per prop. 16. lib. 1. elem. quare angulus DFE maior angulo DFC, multò maior erit angulo BAC. Sed inspiciamus attentiùs figuram quartam: Angulus F comprehensus ab asymptotis DF, EF, impropriè sumptis, maior est, vel minor, vel æqualis, respectu anguli BAC contento asymptotis proprijs. Si maior, verum erit quod Apollonius proponit: Si minor; singulis addamus æquales angulos per propos. 15. lib. 1. elem. AID, FIC, fient duo anguli simul A, & AID, maiores duobus angulis simul sumptis F, & FIC, per 4. ax. lib. 1. elem. Sed per prop. 17. duo anguli simul sumpti A, & AID, sunt per prop. 17. lib. 1. elem. minores duobus rectis, ergo multò magis erunt duo alij anguli simul sumpti F, & FIC, minores duobus rectis: igitur per 13. ax. lib. 1. elemen. concurrent duæ rectæ lineæ, AC, FE, versus C & E, in aliquo puncto; atque ita per axio. 11. lib. 1. elem. recta FE decussabit rectam AC quæ est asymptotus propriè dicta, & progredietur intra locum asymptoto propriè dicta AC, & hyperbola terminatum: atque ita cùm debeat magis ac magis diuaricari recta FE sic producta, ab asymproto propriè dicta AC, tandem occurret Hyperbolæ: & sic inrroducta recta FE asymptotus licet impropriè sumpta, non erit vlla ratione asymptotus: igitur non potest angulus F minor poni angulo A. Si vltimum, hoc est si angulus F sit æqualis angulo A, in eadem quarta figura: illis addendo æquales angulos AID, FIC, per prop. 15. lib. 1. elem. fient per 2. ax. lib. 1. elem. duo simul anguli F & FIC, æquales duobus simul angulis A & AID; isti duo postremi sunt minores duobus rectis per prop. 17. lib. 1. elem. ergo etiam alij duo primi F & FIC, simul sumpti erunt minores duobus rectis per 1. axioma lib. 1. element. Eadem verò sequentur quæ in positione anguli F minoris angulo A; videlicet quod data recta FE asymptotus impropria, nullo modo sit asymptotus. Relinquitur igitur primum, & sic verum erit propositum secundum.

Addidi consultò per parenthesim ad finem propositi secundi, hæc verba (modò angulus BAC non contineatur ab alijs asymptotis impropriè dictis, FD, FE, parallelis respectiuè ad AB, AC, ad easdem partes) nam consulendo figuram 6. cùm FD sit parallela ipsi AB, & FE parallela ipsi AC; angulusque BAC contineatur in angulo DFE, si producatur CA vltra A, secabit in G, rectam FD, per 11. prop. Procli; & per prop. 29. lib. 1. elem. anguli in G & A, & F, erunt æquales, ideoque angulus BAC æqualis angulo DFE per 1. axio. lib. 1. elem. & nunquam occurrent sibi inuicem rectæ FD, AB, neque rectæ FE, AC, quia parallelæ; quare si propriæ asymptoti AB, AC, nunquam occurrunt ex natura sua Hyperbolæ, neque etiam impropriè FD, FE, occurrent. Quod si non addidissemus illas particulas, casus hic afferri posset in quo angulus BAC, non esset minor angulo DFE facto ab impropriè datis asymptotis FD, FE. & ne quis proferat aliaa duas rectas FD, FE, parallelas ipsis AB, AC, ad easdem partes, angulum F continentes æqualem angulo A continenti angulum D:

 nam

nam istæ duæ rectæ FD, FE, repræsentatæ in figura 7. non erunt asymptoti vlla ratione; concurrent enim singulæ cum hyperbola per propos. 13. sed neque ad rem erunt aliæ duæ rectæ FD, FE, continentes angulum F æqualem angulo A, licet sit FD parallela ipsi AB ad easdem partes; & similiter FE parallela ipsi AC; & vna illarum FD secet alteram AC, vt in figura 8. spectare licet: nam FD cùm sit parallela ipsi AB, & intersecando aliam AC ex datis, procedet per locum contentum asymptoto AC propriè dicta, & ipsa Hyperbola, vnde per prop. 13. occurret Hyperbolæ; & sic nulla ratione admittenda inter Hyperbolas etiam impropriè dictas.

Aduerte omnes asymptotos siue propriè siue impropriè dictas, respectu alicuius Hyperboles debere esse in eodem plano ipsius Hyperboles.

COROLL. NOSTRVM I.

Quælibet asymptotorum propriè dictarum secundum defin. 3. respectu alicuius Hyperboles, semper accedet magis & magis ad lineam curuam Hyperboles quo magis ac magis producetur ad partes contrarias centri Hyperbolæ; nunquam tamen cum ea conueniet.

PRimum demonstrauimus in hac propositione; & vltimum manifestum est ex natura asymptotorum definitione 3. explicatarum.

COROLL. NOSTRVM II.

Nulla recta linea duci potest tangens in vnico puncto Hyperbolam & non secans eam, parallela cuilibet eius asymptotis propriè dictis.

COnsulendo figuram huius proposit. Esto recta linea LN parallela asymptoto AC tangens in vnico puncto N, Hyperbolam, & minimè eam secans, hoc est minimè penetrans intra locum ipsius Hyperboles; ipsa necessariò recta linea LN producta vltra N, recedet magis ab linea curua Hyperboles; ideoque etiam asymptotus AC ei parallela, contra proposit. istam 13. vel contra corollarium nostrum præcedens 1. Aliter, ab puncto N ad asymptotum AC recta linea demittatur perpendicularis per prop. 12. lib. 1. hæc perpendicularis erit distantia huius puncti N ab asymptoto AC; producta autem recta AC vlterius, & recta tangente vltra N, demittatur alia recta linea perpendicularis ab aliquo puncto lineæ curuæ Hyperboles infra N, ad asymptotum AC, hæc recta perpendicularis secabit intermediam tangentem in N puncto, ideoque maior erit quàm quæ demissa est ab puncto N, excessu inter lineam curuam & tangentem, sunt enim omnes rectæ lineæ perpendiculares ab vna recta ad aliam rectam parallelam, inter se æquales, per corollarium nostrum 4. ad prop. 1. lib. 6. element. igitur contra 2. partem huius prop. recta AC asymptotus propriè dicta, producta non accedet ad Hyperbolam ad interuallum minus quocumque dato. Hæc absurda indicant positionem contradicentem assertioni huius corollarij esse falsam, & adstruunt ipsam assertionem.

PROPOSITIO XV.

Oppositarum sectionum asymptoti communes sunt.

SVppositio. Oppositarum sectionum KAL, HBI, sit communis transuersa diameter seu transuersum latus AB, iuxta prop. 14. lib. 1. ideoque etiam centrum, punctum videlicet medium C, transuersi lateris iuxta defin. 3. lib. 1. inter secundas. Porrò vnius ex his oppositis sectionibus sint asymptoti rectæ CF, CG, ex centro C prodeuntes, ex natura propria asymptotorum definitarum def. 3. Dico productas istas rectas FC, GC, vltra centrum C, ad E & D, hoc est rectas FCE, GCD, quæ sunt asymptoti datæ respectu sectionis HBI; esse etiam asymptotos alterius sectionis oppositæ KAL: & sic oppositarum sectionum asymptotos esse communes.

Apparatus. Concipiantur ad vertices A & B, sectionum datarum oppositarum, rectæ lineæ FBG, DAE, parallelæ rectis lineis ordinatim applicatis diametro transuersæ communi AB productæ vtrimque intra loca sectionum oppositarum datarum, quæ sunt per definition. 12. libri 1. inter primas parallelæ inuicem: erunt per propos. 30. libri 1. elem. ipsæ rectæ FBG, DAE, etiam parallelæ inuicem: & per proposition. 17. libri 1. solùm in vnico puncto contingent suas proprias sectiones; hoc est recta FBG continget in vnico tantùm puncto B verticis sectionem HBI; & alia recta DAE continget in vnico solùm puncto verticis A, sectionem KAL. Sed & per proposition. 3. recta FBG, producta si opus sit vtrimque occurret in F & G, asymptotis datis CF, CG, hyperboles HBI; & bifariam secabitur in puncto B, per cit. propositio. 3. Cumque sint ostensæ parallelæ rectæ FBG, DAC, earumque vnam FBG, secent rectæ FCE, GCD, secabunt etiam alteram DAE in D & E, per proposition. 11. Procli. Cumque duo triangula FBC, EAC, habeant bases FB, CA, parallelas, & eorum latera alterna se mutuò decussent comprehendentia per propositio. 15. libri 1. element. angulos BCF, ACE, æquales: erit per lemma 50. libri 1. CB ad BF, sicut AC ad AE; prima recta CB æqualis est tertiæ CA per def. 3. lib. 1. inter secundas: ergo per prop. 14. lib.

lib. 5. elem. erit etiam secunda BF, æqualis quartæ AE. ex eisdem principijs probabitur recta AD æqualis rectæ BG. Quare si æqualibus AE, FB, addantur æquales AD. BG, primæ primis, secundæ secundis, fient totæ FBG, DAE, æquales per 2. axiom. lib. 1. elem. Diuisa ergo erit bifariàm recta DAE, in puncto A, per 7. axiom. lib. 1. elemen. Verùm etiam constat ex prop. 3. quadrata rectarum BF, BG, æqualium ostensarum, singula seorsim sumpta esse æqualia quartæ parti figuræ, hoc est rectanguli sub transuerso latere AB, & recto, in hyperbola HBI: ergo etiam quadrata rectarum AD, AE, æqualium ostensarum & alijs BF, BG, erunt æqualia illis quadratis rectarum BF, BG, per prop. 16. Procli; & eidem quartæ parti figuræ prædictæ, vel rectanguli sub transuerso latere AB & recto, respectu hyperboles HBI. Sed per propos. 14. lib. 1. recta latera respectu eiusdem transuersi AB in sectionibus oppositis, sunt æqualia, ergo per lemma 49. lib. 1. rectangula sub transuerso latere AB, & sub illis rectis lateribus æqualibus seorsim sumptis erunt æqualia; ideoque etiam eorum quartæ partes erunt æquales, per axiom. 7. lib. 1. elem.

Demonstratio. Quandoquidem quadrata rectarum AD, AE, seorsim sumpta sunt in apparatu ostensa æqualia quartæ parti figuræ seu rectanguli sub transuerso latere AB, & recto, in Hyperbola HBI; & quarta pars figuræ seu rectanguli sub transuerso latere AB & recto, in Hyperbola KAL: erunt per 1. axioma lib. 1. elem. quadrata rectarum AD, AE, seorsim sumpta, æqualia quartæ parti figuræ seu rectanguli sub transuerso latere AB, & recto in Hyperbola AKL. Cùm igitur recta DAE contingat in A vertice Hyperbolam KAL, & rectæ AD, AE, possint singulæ quartam partem figuræ seu rectanguli sub AB transuerso latere & recto; & ex centro C, Hyperboles KAL eiusdem decidant rectæ vel egrediantur FCE, GCD, per extrema D & E, rectarum AD, AE, vnam efficientium contingentem in A vertice Hyperbolam KAL: erunt per propos. 1. prædictæ rectæ lineæ FCE, GCD, datæ asymptoti Hyperboles HBI, etiam asymptoti alterius oppositæ Hyperboles KAL. & sic demonstratum erit propositum.

COROLL. NOSTRVM I.

In sectionibus oppositis, non sunt plures quàm duæ asymptoti communes, propriè dictæ, seu definita defin. 3. possunt tamen esse plures, impropriè dictæ.

PEr coroll. nost. 1. ad prop. 2. vni Hyperbolæ non conueniunt plures asymptoti propriè dictæ, quàm duæ, vna ad vnam partem, altera ad aliam; & per hanc propos. 15. oppositarum sectionum communes sunt asymptoti huiusmodi: ergo sectionibus oppositis non sunt plures asymptoti propriè dictæ, quàm duæ, vna ad vnam partem, altera ad aliam. Sunt verò per coroll. nost. 4. ad eandem propos. 2. in Hyperbola vna innumeræ asymptoti impropriè dictæ, non diuidentes angulum ipsius Hyperboles, decussando ipsas proprias asymptotos si producantur vltra centrum ipsius Hyperboles, è quo procedunt per definit. 3. igitur cùm propriè dictæ asymptoti sint communes sectionibus oppositis, etiam istæ impropriè dictæ aberrando extra angulos ad verticem propriè dictarum; erunt etiam communes sectionibus oppositis.

COROLL. NOSTRVM II.

Si in sectionum oppositarum vna ducatur recta linea ipsam secans duobus in punctis; & in altera sectione opposita, alia recta prædictæ æquidistans; vtrimque occurret huic sectioni.

NAm alia per prop. 8. producta vtrimque secabit asymptotos communes his oppositis sectionibus: ergo per prop. 21. Procli, hæc recta etiam secabit easdem asymptotos producta. quare obuiam sectioni suæ propriæ lineam curuam intersecabit vtrimque. Quod erat concludendum.

PROPOSITIO XVI.

Si in oppositis sectionibus, quædam recta linea ducatur, secans vtramque linearum continentium angulum qui deinceps est angulo sectiones continenti; cum vtraque oppositarum in vno tantùm puncto conueniet: & lineæ quæ ab ipsa abscissæ inter asymptotos & sectiones interijciuntur, æquales erunt.

SVppositio. Oppositarum sectionum sint per prop. præcedent. 15. communes asymptoti FCE, DCG, procedentes ex centro C ipsarum sectionum, iuxta defin. 3. quas asymptotos secet recta linea KH, continentes angulum FCD, qui deinceps est angulo FCG, vel DCE, continenti dictas sectiones. Dico primò quod producta vtrimque recta KH, conueniat in vno tantùm puncto M cum sectione vna, & in alio tantùm puncto L, cum sectione altera opposita. Secundò dico quod rectæ KH productæ vtrimque, portiones KM, HL, sitæ inter asymptotos datas & ipsas sectiones, sint æquales inter se; tum etiam rectæ HM, KL.

Apparatus. Per centrum C, oppositarum sectionum, agatur per propositio. 31. lib. 1. element. recta linea B C A parallela datæ KH, quæ per lemma 3. diuidet angulos FCG, DCE, continentes datas sectiones oppositas, ideoque per coroll. nostrum 5. ad prop. 2. occurret sectionibus, vni in B, alteri in A, eritque diameter transuersa illarum per coroll. prop 51. lib. 1.

Demonstratio. Quia recta KH, secat asymptotos FCE, DCG, sectionum datarum, efficientes angulum FCD deinceps ad angulos FCG, DCE, continentes ipsas sectiones datas, conueniet per proposit. 11. producta vtrimque cum sectionibus, in vno tantùm puncto, vni sectioni in M. alteri oppositæ in L, sicuti fuit primo loco assertum. Et quia per eandem propos. 11. rectangulum sub KL, HL, & rectangulum sub HM, MK, seorsim sumpta sunt æqualia quartæ parti quadrati super diametro AB æquidistanti positæ ipsi rectæ KH; erunt dicta rectangula æqualia inter se, per 1. axio. lib. 1. element. Igitur per lemma 32. erunt rectæ lineæ KM, HL, æquales, tùm etiam rectæ HM, KL, æquales, sicuti fuit secundo loco assertum.

COROLL. NOSTRVM I.

In sectionibus oppositis si ducatur recta linea parallela transuersa diametro illarum, ab vno puncto vnius asymptotorum, communium diuerso ab centro; secabit ambas asymptotos, & singulas sectiones in vnico tantùm puncto: & rectangula sub portionibus huius rectæ sitis inter sectas asymptotos, & ipsas sectiones, erunt æqualia inter se.

SVppositio. Sectionum oppositarum sit communis diameter transuersa AB, in figura huius propositionis, & communes asymptoti FCE, DCG, se mutuò intersecantes in centro C; & recta linea KH parallela ipsi diametro AB, deducta ad K puncto diuerso ab centro C. Dico quod secabit hæc recta KH asymptotos datas, & quidem asymptotum FCE in K puncto, & aliam asymptotum DCG in H; tùm etiam singulas sectiones in vnico tantùm puncto, vnam in M, alteram in L. & quod rectangula sub KL, LH, & HM, MK, facta ex portionibus totius rectæ ML, sitis inter asymptotos & sectiones, sint æqualia inter se.

Demonstratio. Dantur rectæ AB, KH, parallelæ; AB verò secatur in C ab asymptoto FCE, ergo per prop. 11. Procli, secabitur etiam in K, altera KH parallela, ab eadem asymptoto FCE. Simili modo, dantur parallelæ AB, KH, AB secatur ab asymptoto DCG, in C, ergo per prop. 11. Procli, altera KH secabitur in H, ab eadem asymptoto DCG. & sic patet primum. Quia verò recta KH secat asymptotos datas in angulo FCD, qui est deinceps angulis FCG, DCE, sectiones oppositas continentibus; per prop. 11. producta KH, vltra K & H, occurret illis in vnico tantùm puncto, vni in M, alteri in L. sicuti fuit secundo loco propositum. Denique quoniam per hanc propositionem, rectæ KM, HL, sunt æquales; & rectæ aliæ HM, KL, sunt etiam æquales: erunt per lemma 49. lib. 1. rectangula æqualia, vnum sub KL, LH; alterum sub HM, MK, sicuti fuit vltimo loco propositum.

COROLL. NOSTRVM II.

In sectionibus oppositis, si ad instar rectæ lineæ KH ducta parallela diametro transuersa earum AB, in corollario præcedente nostro, ducantur quæcumque alia recta parallela eidem diametro transuersæ AB: secabunt singula asymptotos communes sectionibus datis oppositis, & ipsas sectiones in vnico tantùm puncto; & rectangula sub portionibus illarum inter asymptotos dictas & sectiones, erunt æqualia inter se.

COnsulendo figuram huius propositionis, sit suppositio. Instar omnium rectarum sit recta OP parallela transuersæ diametro AB, sicuti est alia recta KH; hæc OP probabitur intersecare asymptotos FCE, DCG, in punctis O, P, & vnam sectionum in N, & alteram in R, sicuti fuit probata altera recta KH, secare dictas asymptotos in K & H, & sectionum alteram in M, aliam verò in L, idque in vnico tantùm puncto. & sic probauerimus duas primas assertiones. Dico autem rectangula omnia sub istarum omnium rectarum, exempli gratiâ ML, NR, portionibus inter asymptotos & sectiones oppositas, esse æqualia: verbi gratiâ rectangula sub KL, HL, sub HM, MK, sub OR, PR, sub PN, NO, esse æqualia inter se.

Demonstratio. In corollario nostro præcedente ostendimus rectangulum sub KL, HL, esse æquale rectangulo sub HM, MK: & per idem corollarium rectangulum sub OR, RP, erit æquale rectangulo sub PN, NO: & per coroll. nostrum 2. ad proposit. 11. rectangulum sub KL, LH, est æquale rectangulo sub OR, RP; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. rectangulum aliud, sub HM, MK, æquale ipsi sub KL, LH, erit æquale eidem rectangulo sub OR, RP; cui etiam est æquale ostensum rectangulum sub PN, NO: & sic per primum ax. lib. 1. elem. dicta omnia rectangula erunt æqualia inter se. Quod erat vltimò propositum ac demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM III.

In sectionibus oppositis, si recta linea secet asymptotos continentes vnum angulum deinceps ad alterutrum angulum continentem vnam sectionum; recta linea ex centro earum sectionum ducta parallela illi secanti recta, diuidet dictum angulum continentem Hyperbolam vnam, secabitque eius lineam curuam in vnico puncto tantummodo.

SIt recta OP, secans asymptotos FCE, DCG, in O & P, continentes angulum FCD, deinceps ad angulum DCE continentem Hyperbolam A: & recta linea CA parallela ipsi OP secanti deducta ab centro C, oppositarum sectionum. Dico rectam CA diuidere dictum angulum DCE, & secare hyperbolam A in vnico puncto.

Quod recta CA diuidat angulum DCE patet per lem. nost. 3. nam est deinceps ad angulum FCD. Quia verò recta CA diuidit angulum DCE continentem Hyperbolam A, interfecabit ipsius lineam curuam in vnico tantùm puncto per coroll. nostrum 5. ad prop. 2.

COROLL. NOSTRVM IV.

Punctum medium recta linea occurrentis sectionibus oppositis & asymptotis earum, & subtendentis angulum deinceps continentem alterutram sectionem: est intra locum dicti anguli deinceps.

SI enim esset in alterutra asymptotorum, vel in portione earum inter vnam asymptotum, & sectionem: cùm istæ portiones sint æquales per hanc prop. vni illarum addendo portionem sitam inter asymptotos, & non alteri, fierent duo inæqualia, quæ nihilominus dantur æqualia ab aduersario. hoc absurdum indicat punctum medium propositum non esse in alterutra asymptotorum, neque in portionibus propositæ rectæ sitis inter dictas asymptotos & sectiones, igitur erit intra locum dicti anguli deinceps.

COROLL. NOSTRVM V.

In sectionibus oppositis, si vni recta linea occurrenti ambabus inter ipsas sita & non transeunti per centrum; recta linea per centrum illarum, vel ex puncto vnius illarum, recta linea parallela agatur: occurret etiam ambabus vtrimque, & singulis in vno tantùm puncto.

QVandoquidem centrum sectionum oppositarum, vel punctum datum in linea curua vnius illarum, non distat infinitè; & per prop. 8. lib. 1. possunt augeri & extendi in infinitum crura curua hyperbolarum, ita vt semper in infinitum semper abeant ab inuicem, vel ab data linea recta: euidens est rectam parallelam datæ eductam vel ex centro, vel ab vno puncto lineæ curuæ vnius oppositarum sectionum, semper seruare distantiam finitam eandem ab data: quare vtrimque occurret sectionibus oppositis; & singulis in vno tantùm puncto: & quidem si ex centro erit diameter transuersa, ideoque per coroll. nostrum 1. ad prop. 26. lib. 1. singulis sectionibus in vno tantùm puncto occurret. Si verò ex alio puncto vnius ex illis, verum erit prop. per coroll. nostrum 1. ad hanc prop. nam ipsam diametrum transuersam ducendo per centrum: huic erit parallela alia per prop. 30. lib. 1. elem.

COROLL. NOSTRVM VI.

In sectionibus oppositis, asymptotorum propriarum nulla diuidet bifariam, rectam lineam non transeuntem per centrum ipsarum sectionum oppositarum, accommodatam inter ipsas sectiones oppositas.

EXempli gratiâ in eadem figuræ huius propositionis, recta MKHL accommodata inter sectiones oppositas, non secabitur bifariàm in K ab asymptoto FCE; neque etiam in H ab asymptoto altera DCG: obuias enim asymptotos prædicta secabit recta MKHL data accommodata inter ipsas sectiones.

Cùm enim recta ML secetur ab dictis asymptotis in K & H, si secaretur bifariàm in K ab asymptoto FCE, essent æquales portiones MK, KL: sed per hanc propos. 16. portio LH est æqualis prædictæ MK; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. erunt æquales portiones KL, LH, totum & pars, contra 8. ax. lib. 1. elem. igitur falsum erit quod recta ML secetur bifariàm in K ab asymptoto FCE. eodem probabitur quòd non secetur bifariàm in H ab asymptoto alia DCG. & sic erit probatum propositum.

PROPOSITIO XVII.

Oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur; asymptoti communes sunt.

SVppositio. Oppositarum sectionum coniugatarum, defin. 9. explicatarum, diametri coniugatæ sint rectæ AB, CD, se mutuò interfecantes in communi centro E, datarum oppositarum sectionum coniugatarum. Dico harum omnium sectionum communes esse asymptotos.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. element. per vertices A & B, duarum sectionum oppositarum, ducantur duæ rectæ lineæ parallelæ diametro CD coniugatæ alteri AB, sintque FAG, KBH, quæ tangent per prop. 17. lib. 1.

 ipsas

ipsas sectiones oppositas prædictas, illa in A suam sectionem, hæc in B propriam, in vnico tantùm puncto; quia per defin.17. lib. inter primas, diameter CD est ordinatim applicata diametro AB: eruntque inter se parallelæ prædictæ rectæ lineæ FAG, KBG, per propos. 30.lib.1.elem. Similiter per vertices C, D, aliarum duarum sectionum oppositarum, agantur rectæ lineæ KCF, HDG, parallelæ diametro AB coniugatæ diamatro CD; quæ ex eisdem principijs citatis, erunt parallelæ inuicem, & contingent in C & D, suas proprias sectiones oppositas, illa in vnico puncto C, hæc in vnico puncto D. Productæ ex vtraque parte istæ duæ lineæ parallelæ KCF, HDG, etiamque aliæ duæ parallelæ FAG, KBH; cùm semper debeant extra sectiones quas tangunt, excurrere per cit. propos. 17. lib.1. occurrent illæ istis in punctis K,H,G,F, per propos.11. Procli; idque extra datas sectiones oppositas coniugatas: si enim duæ illarum verbi gratiâ KBH, KCF, in puncto K concurrerent sito intra vnam sectionum datarum propriarum, alterutra contra cit. propos.17. ingrederetur intra sectionem propriam. Resultabit igitur ex quatuor rectis lineis KBH, FAG, KCF, HDG, sibi mutuò occurrentibus modo explicato in punctis K,H,G,F, extra sectiones datas, parallelogrammum FGHK, in quo si ducantur ex puncto E centro nimirum sectionum datarum in quo se mutuò bifariàm intersecant duæ diametri coniugatæ AB, CD, iuxta def.17. lib.1. inter primas, & 3. inter secundas; rectæ lineæ EK, EG, ad oppositos angulos H & G, dicti parallelogrammi, erunt in directum, vnamve efficient rectam lineam KEG, per lemma 5. similique modo, duæ aliæ rectæ lineæ EH, EF, emissæ ex eodem puncto E ad oppositos angulos H & F, dicti parallelogrammi, vnicam efficient lineam rectam FEH. Iam dico quod duæ rectæ lineæ KEG, FEH, sint datarum sectionum oppositarum coniugatarum, asymptoti communes.

Demonstratio. Quia diametri AB, CD, sunt sibi inuicem coniugatæ, recta CD erit diameter secunda diametri AB; & recta AB, erit diameter secunda diametri CD; sunt enim ex dictis in defin.4. lib.1. inter secundas coniugatæ sibi inuicem secundæ: igitur per cit. def. 4. erit vt AB ad CD, ita CD ad rectum latus respectu transuersi AB in sectionibus oppositis A & B: vnde per prop. 17. lib.6. elem. rectangulum sub transuerso latere AB & recto, erit æquale quadrato rectæ CD: cùmque per cit. lemma 5. sint parallelogramma CH, CG, CB, EH, CA, AD, erunt per prop.34. lib.1. elem. æqualia latera KH, CD, FG; tùm etiam æqualia latera KB, CE, FA; & æqualia latera BH, ED, AG: erit autem CD, bifariàm diuisum in E per def.3. lib.1. inter secundas, ergo æquales erunt rectæ CE, ED; his igitur æqualibus quia ostendimus esse æquales rectas KB, BH, FA, AG, erunt omnes æquales inter se, per 1.ax. lib. 1. elem. videlicet KB, BH, CE, ED, FA, AG; ideoque rectæ KH, FG, diuisæ bifariàm in B & A. quadrata igitur prædictarum sex rectarum æqualium KB, BH, CE, ED, FA, AG, erunt per prop.16. Procli æqualia inter se. Quia verò recta EC, vel ED, est sub dupla totius CED, quadrata rectarum EC, ED, seorsim sumpta, erunt per coroll. nostrum ad prop.20. lib.6. elem. quarta pars quadrati rectæ CD: igitur per propos.7. lib. 5. elem. quadrata quarumlibet rectarum BK, BH, FA, AG, æqualia inter se ostensa, & quadratis seorsim sumptis rectam CE, ED, erunt singula quarta pars quadrati rectæ CD; & per eandem propos.7. lib. 5. elem. singula etiam erunt quarta pars rectanguli sub transuerso latere AB & recto proprio probati æqualis dicto quadrato rectæ CD. Ergo per 1. propos. rectæ lineæ KEG, HEF, erunt asymptoti oppositarum sectionum A & B. ex eisdem principijs, & eodem artificio probabuntur rectæ lineæ eadem KEG, HEF, esse asymptoti aliarum duarum oppositarum sectionum C, D. Igitur manifestum erit quod sectionum oppositarum coniugatarum sint asymptoti communes.

COROLL. NOSTRVM I.

In sectionibus oppositis coniugatis Quadratum semissis secundæ diametri duarum oppositarum est æquale quartæ parti figuræ in illis, definita in defin. 1.

Ostendimus enim quadratum rectæ CE semissis secundæ CD diametri duarum oppositarum A, B, sectionum, esse æquale quartæ parti figuræ sub transuerso latere AB dictarum sectionum, & recto proprio, quod rectangulum figura est iuxta def.2.

COROLL. NOSTRVM II.

In sectionibus oppositis coniugatis: Recta linea tangens vnam ex illis in puncto verticis, & attingens alterutram ex asymptotis communibus, est æqualis semissi diametri coniugatæ respectu assumptæ supradictæ.

Exempli gratiâ in figura huius propositionis. Recta linea FAG tangens sectionem in A, & attingens suo extremo vno F, asymptotorum communium alteram FEH, suam semissem AF, æqualem semissi CE, vti ostendimus in apparatu obtinet ad demonstrationem huius prop.) diametri secundæ CED, respectu alterius AEB in cuius vertice A tangit prædicta FAG sectionem.

PROPO-

PROPOSITIO XVIII.

Si vni oppoſitarum ſectionum quæ coniugatæ dicuntur, occurrat recta linea; & producta ad vtraſque partes, extra ſectionem cadat: cum vtraque ſectionum, quæ deinceps ſunt, in vno tantùm puncto conueniet.

SVpoſitio. Sint coniugatæ ſectiones oppoſitæ, A, B, C, D, vnique illarum puta C, recta linea ECF occurrat in vno tantùm puncto C, & producta ad vtraſque partes, procedat extra ſectionem. Dico rectam ECF cum vtraque ſectionum A, & B, quæ deinceps ſunt ſectioni C contactæ, in vno tantùm puncto conuenire; hoc eſt in H, ſectioni B, & in G, ſectioni alteræ A, occurrere.

Apparatus. Concipiantur aſymptoti KL, MN, quæ ſunt communes datis ſectionibus coniugatis oppoſitis A, B, C, D, iuxta prop. 17. præcedentem.

Demonſtratio. Quandoquidem recta ECF, ſectionem hyperbolicam C contingit in vnico ſolùm puncto C, & non ſecat, productaque vtrimque ſemper procedit extra ipſam, occurret per prop. 3. eius aſymptotis KL, MN, illi in E, huic in F: producta verò vltra hæc puncta E, F, occurret per propoſ. 16. ſectionibus oppoſitis A, B, quæ ſunt deinceps ad ipſam C, & quidem ſectioni B in vnico tantum puncto G, alteri verò ſectioni B in vnico tantum puncto H; quia ipſa recta ECF oſtenſa eſt ſecare duas aſymptotos angulum efficientes deinceps ad angulos continentes ipſas ſectiones oppoſitas A, B. & ſic demonſtrauerimus propoſitum.

PROPOSITIO XIX.

Si in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ducatur recta linea quamuis ipſarum contingens: cum ſectionibus quæ deinceps ſunt conueniet; & ad tactum bifariàm ſecabitur.

COnſule figuram præcedentis propoſitionis. Suppoſitio. Sint coniugatæ ſectiones oppoſitæ, A, B, C, D; vnamque illarum, puta C, contingat recta HCG, in vnico tantùm puncto C, ita vt producta vtrimque ſemper procedat extra ipſam C ſectionem. Dico quod ſic producta recta HCG, occurrat vtriſque ſectionibus A, B, oppoſitis, quæ deinceps ſunt contactæ C, & quidem ſectioni A in puncto G, alteri verò ſectioni B in puncto H; & quod bifariàm ipſa recta HGC, in puncto C contactus diuidatur.

Demonſtratio. Prima aſſertio euidens eſt per prop. præced. 18. Altera verò ſic probatur, conceptis aſymptotis KL, MN, communibus ipſis datis ſectionibus oppoſitis coniugatis iuxta prop. 17. Iam verò per prop. 3. Recta HCG, contingens in C Hyperbolen ipſam C in vnico tantùm puncto, ſecabit in E & F, eius aſymptotos prædictas, & bifariàm in C puncto contactus diuidetur, per cit. propoſ. 3. Sed & per prop. 16. producta vtrimque etiam cum ſectionibus A & B oppoſitis occurret, illi in G vnico puncto, huic in H etiam vnico puncto, eruntque æquales portiones rectæ FH, EG; quæ ſi addantur æqualibus portionibus oſtenſis CF, CE, primæ primis, ſecundæ ſecundis; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. æquales ſemiſſes CH, CG, totius rectæ HCG; atque ita bifariàm diuidetur in puncto C contactus. Quæ omnia erunt demonſtranda.

PROPOSITIO XX.

Si vnam oppoſitarum ſectionum quæ coniugatæ appellantur, recta linea contingat; & per tactum & centrum ducantur duæ rectæ lineæ, vna quidem per tactum, altera verò contingenti æquidiſtans, quouſque occurrat vni ſectionum quæ deinceps ſunt. Recta linea quæ in occurſu ſectionem contingit, æquidiſtans erit lineæ per tactum & centrum ductæ: quæ verò per tactus & centrum ducentur, oppoſitarum ſectionum coniugatæ diametri erunt.

SVppoſitio. Sectionum oppoſitarum coniugatarum A, B, C, D, vnam puta A, recta linea EF contingat in E puncto vnico, & producta vtrimque ſemper extra ſectionem A excurrat: & harum omnium ſectionum ſint axes coniugati AB, CD, centrumque X commune. Ducta verò ſit recta XE per centrum X & E punctum contactus: & alia recta GX ex centro X, parallela ipſi rectæ EF contingenti, occurrens in G, vni ſectionum C oppoſitarum quæ ſunt deinceps ad contactam A. Producantur verò iſtæ duæ rectæ XE, GX, vltra centrum X: prima XE occurret ſectioni B oppoſitæ ipſi ſectioni A contactæ, in puncto

quidem

quidem V, per prop. 29. lib. 1. & similiter altera GX occurret in O, sectioni D oppositæ ipsi C contactæ in G, per eandem propos. 29. lib. 1. Præterea ex puncto G educta sit ex datis, recta linea GH contingens verò contactu sectionem C in puncto G, occursus illius sectionis cum recta XG prædicta, sectionem C secante in G, per coroll. nostrum primum ad prop. 26. libri 1. Dico autem rectam GH ductam ex puncto G occursus mutui rectæ XG, & sectionis C, & contingentem ipsam sectionem C in puncto prædicto G occursus prædicti, esse parallelam rectæ XE per tactum E supradictum & centrum X transmissæ: & rectas GXO, EXV, per tactus G, & E, prædictos & centrum X, esse diametros coniugatas datarum sectionum oppositarum coniugatarum.

Apparatus. Imprimis recta GH tangens sectionem C producta secabitur ab axe eius CD in puncto H, inter centrum X & verticem C, per coroll. prop. 31. lib. 1. & alia recta EF contingens sectionem A in E, producta secabit axem AB, sectionis dictæ in puncto F inter centrum X & verticem A, per coroll. cit. & eadem recta EF producta vltra F, secabitur in T ab recta CD, per prop. 11. Procli, quia eius parallela XG secatur ab eadem recta CD in centro X. Iam verò ex puncto E lineæ curuæ hyperboles A, concipiatur recta linea EK ordinatim applicata axi BXAK; & ex puncto G lineæ curuæ hyperboles C, alia recta GL ordinatim applicata axi DXCL; & alia recta CRP ex puncto C verticis hyperboles C, ordinatim etiam applicata axi DXC ad partes rectæ EK; erit EK parallela axi CD coniugato alteri AB axi, per def. 17. lib. 1. inter primas; & ob eandem, rectæ GL, CRP, erunt parallelæ axi AB, & per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inuicem: ergo cùm rectæ XG, HG, secent rectam GL, secabunt etiam ipsam CRP, & quidem HG in R, & XG in P. Lineæ verò rectæ iuxta quas possunt applicatæ ordinatim dictæ rectæ ad axes datos, sint AM, CN: fiatque per prop. 12. lib. 6. elem. vt PG ad GR, sic HG ad quartam proportionalem S rectam: erit per prop. 51. lib. 1. & coroll. propos. 4. lib. 5. elem. recta S, dimidia eius iuxta quam possunt quæ ad diametrum OG applicantur in sectionibus C, D, oppositis. Quod verò sit recta OG diameter sectionum dictarum, patet ex coroll. prop. cit. 51. lib. 1. cùm transeat per earum centrum X.

Demonstratio primi propositi. Imprimis probandum est ita esse NC ad CD, vt BA ad AM: cùm enim ex demonstratione primæ prop. constet ita esse quadratum rectæ XA ad quadratum portionis AQ rectæ AM ab recta QX concipienda asymptoto deducta ex centro X, versus rectam AM, vt BA ad AM: tùm etiam ex eadem demonstratione, & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. sit vt NC ad CD, ita quadratum portionis rectæ CP abscissæ ab asymptoto deducta ex centro X, ad quadratum rectæ CX; cumque per propos. 34. lib. 1. elem. concipiendo parallelogrammum factum ab CX, CP, concurrentibus in puncto Y rectis CP, MA productis si opus sit, illa vltra P, ista vltra A, in quo puncto Y concurrit etiam asymptotus ex centro X egrediens, vti ostendimus in prop. 17. nam recta MA, CP, contingent in A & C, suas proprias sectiones, cùm sint parallelæ respectiuè suis proprijs ordinatim applicatis ad axes AB, CD: fientque æquales rectæ AQ, AY, per propos. 3. & resultabit aliud parallelogrammum AY, CX, cuius latera opposita XA, CY, erunt æqualia, & alia opposita AY, CX, etiam æqualia per propos. 34. lib. 1. elem. vnde erit per coroll. nostrum ad prop. 7. lib. 5. elem. vt XA ad AY, sic CY ad CX; quare per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AY, sic quadratum rectæ CY ad quadratum rectæ CX; igitur cùm antea ostenderimus esse quadratum rectæ XA ad quadratum portionis rectæ AQ vel AY rectarum æqualium, sicut est recta BA ad AM; & esse quadratum rectæ CY, hoc est quadratum portionis prædictæ rectæ CP, ad quadratum rectæ CX, sicut recta NC ad rectam CD; & nunc probauerimus esse quadratum XA ad quadratum AY, sicut quadratum CY ad quadratum CX; erit per prop. 11. lib. 5. elem. recta NC ad rectam CD, vt recta BA ad rectam AM. Verùm per prop. 37. lib. 1. est vt BA ad AM, ita rectangulum sub XK, KF, ad quadratum rectæ KE; & per eandem cit. prop. & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt NC ad CD, ita quadratũ rectę GL ad rectangulũ sub XL, LH; ergo cùm sit vt BA ad AM, sic NC ad CD; erit per prop. 11. lib. 5. elem. rectangulum sub XK, KF ad quadratum KE, sic quadratum GL ad rectangulum sub XL, LH. Sed per propos. 23. lib. 6. elem. rectangulum sub XK, KF, ad quadratum rectæ KE, habet rationem compositam ex ratione XK ad KE, & ex ratione FK ad KE; & quadratum rectæ GL ad rectangulum sub XL, LH, proportionem habet compositam ex ratione GL ad LX, & ex ratione GL ad LH: ergo per lemma 7. lib. 1. proportio composita ex ratione XK ad KE; & ex ratione FK ad KE, eadem est quæ composita ex ratione GL ad LX, & ex ratione GL ad LH. Quarum quidem proportio FK ad KE eadem est quæ GL ad LX; cùm enim triangula FKE, GLX, habeant latera EK, LH parallela, & alia latera EF, GH, parallela, & alia latera KF, GL, parallela ex datis, vel ex apparatu; erit per lemma 50. lib. 1. vt FK ad KE, sic GL ad LX, reliqua igitur proportio ex eisdem compositis, nimirum ratio XK ad KE reliqua, erit eadem reliquæ rationi GL ad LH, per 3. axiom. lib. 1. elem. applicatum rationibus. Porrò triangula EKX, GHL, habent angulos in K & L æquales ostensos, nimirum rectos, & latera circa illos proportionalia probata, videlicet

XK

XK ad KE, ſicut GL ad LH; ipſa triangula EKX, GHL, per prop. 6. lib. 6. elem. æquiangula erunt, æqualeſque angulos obtinebunt, ſub quibus latera homologa ſubtenduntur; quare angulus EXK æqualis erit angulo LGH, quibus ſubtenduntur homologa latera EK, LH. Quia verò in parallelas rectas oſtenſas KX, LG, incidit recta XG, erunt per propoſ. 29. lib. 1. elem. anguli alterni KXG, LGX, æquales; ergo totus angulus KXG, toti angulo LGX, æqualis erit; ex quibus ſi detrahamus angulos æquales probatos EXK, LGH, primum à primo totali, ſecundum verò à ſecundo totali, relinquentur anguli alterni æquales EXG, HGX, per 3. ax. lib. 1. elem: Igitur per prop. 28. eiuſdem lib. 1. elem: recta linea EX, parallela erit rectæ lineæ GH, ſicuti fuit primò propoſitum.

Demonſtratio ſecundi propoſiti. Quandoquidem recta CD eſt diameter coniugata ſeu ſecunda reſpectu diametri AB. in oppoſitis ſectionibus A, B, cum qua recta CD conuenire oſtenſa eſt in T, recta linea EFT: rectangulum ſub TX, KE, æquale erit per propoſ. 38. lib. 1. quadrato rectæ CX; ſi enim ex puncto E, ipſi KX parallelam rectam duxerimus, rectangulum quod fit ex TX, & linea recta quæ inter X & parallelam rectam interijcitur, quadrato rectæ CX erit æquale per cit. prop. 38. lib. 1. cùm ergo rectangulum ſub TX, KE, æquale ſit quadrato rectæ CX; erunt per prop. 17. lib. 6. elem. tres rectæ lineæ proportionales TX, CX, KE; & per coroll. prop. 20. lib. 6. elem. erit vt TX ad KE, ſic quadratum rectæ TX ad quadratum rectæ CX. & quia triangula EFK, TFX, fiunt ab duabus rectis KX, ET, ſe mutuò interſecantibus in F, & latera obtinent parallela KE, XT, oſtenſa; erit per lemma 50. lib. 1. vt TX ad TF, ſic KE ad EF; & vt TX ad KE, ſic TF ad EF: cumque ſit per propoſ. 1. lib. 6. elem. vt TF ad FE, ſic triangulum TXF ad triangulum EXF; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt TX ad KE, ita triangulum TXF ad triangulum EXF. Oſtendimus autem paulò ante eſſe tres continuè proportionales TX, XC, KE; & ſunt triangula TXF, XCP, æquiangula, (ob parallelas rectas PX, FT, oſtenſas, ideoque anguli CXP, XTF, per prop. 29. lib. 1. elem. æquales; ſuntque alij anguli XCP, TXF, etiam æquales per cit. prop. 29. lib. 1. elem. ob parallelas rectas oſtenſas FX, PC; quare per coroll. noſt. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui eorum anguli tertij TFX, XPC, erunt æquales; ideoque vti diximus dicta triangula æquiangula.) igitur per lem. 50. lib. 1. erunt ſimilia. Quare cùm ſint probatæ tres rectæ proportionales TX, CX, KE, erit per coroll. prop. 20. lib. 6. elem. vt TX ad KE, ſic triangulum TXF ad triangulum XCP; oſtendimus autem antea eſſe quadratum rectæ TX ad quadratum rectæ XC, vt recta TX ad rectam KE; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ TX ad quadratum rectæ XC, ita triangulum TXF ad triangulum XCP; hoc eſt iuxta propoſ. 7. lib. 5. elem. ad triangulum GHX æquale ipſi triangulo XCP, vti oſtendimus in coroll. noſtro 5. ad propoſ. 43. lib. 1. Igitur per prop. 11. lib. 5. elemen. conferendo ſupradicta, erit vt triangulum TXF ad triangulum EXF, ſic triangulum TXF ad triangulum GHX: quare per propoſ. 9. lib. 5. elem. triangula GHX, XEF, erunt æqualia. Cumque ob parallelas rectas EX, GH, oſtenſas; tùm alias EF, GX, parallelas probatas; æquales ſint per propoſ. 29. lib. 1. elem. anguli HGX, GXE, & GXE, XEF: erunt per 1. ax. lib. 1. elem. anguli HGX, XEF, æquales: igitur dicta triangula GHX, XEF, per prop. 15. lib. 6. elem. habebunt latera reciproca, hoc eſt erit GH ad EX, vt EF ad GX: quare per propoſ. 16. lib. 6. elem. rectangulum ſub HG, GX, erit æquale rectangulo ſub XE, EF. Et quoniam per apparatum eſt vt linea S ad HG, ita RG ad GP; & triangula RGP, XEF, ſunt æquiangula, (ob angulos in G & E iam oſtenſos æquales; & angulos GRP, EXF etiam æquales, ob æqualitatem cum tertio HXG, per prop. 29. lib. 1. elem. quia ſunt parallelæ rectæ XF, RP.) erit per prop. 4. lib. 6. elem. vt RG ad GP, ſic XE ad EF; quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt recta S ad HG, ſic XE ad EF. Sumpta verò communi altitudine XG, & ſumptis baſibus, S, HG, erit per 1. prop. lib. 6. elemen. vt S ad HG, ſic rectangulum ſub S, XG, ad rectangulum ſub HG, XG; & ſumpta communi altitudine XE, & baſibus XE, EF; erit vt XE ad EF. ſic quadratum rectæ XE ad rectangulum ſub XE, EF: igitur per propoſ. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum ſub S, XG, ad rectangulum ſub HG, XG, ita quadratum rectæ XE ad rectangulum ſub XE, EF; & per prop. 16. lib. 5. elem. erit viciſſim, vt rectangulum ſub S, XG, ad quadratum rectæ XE, ita rectangulum ſub HG, XG, ad rectangulum ſub XE, EF; ſed oſtendimus rectangulum ſub HG, XG, æquale eſſe rectangulo ſub XE, EF: ergo per coroll. noſt. 2. ad prop. 14. lib. 5. elemen. rectangulum ſub S, XG, æquale erit quadrato rectæ XE. Cùmque recta GO, in oppoſitis ſectionibus C, D, per centrum X illarum acta occurrat in G, ſectioni C ex datis, occurret etiam ſectioni D in O, per prop. 29. lib. 1. & bifariàm in X centro diuidetur per propoſ. 30. lib. eiuſdem 1. Similiter recta EX proueniens ex E puncto ſectionis A, per centrum X acta, producta occurret in V ſectioni B oppoſitæ per propoſ. 29. lib. 1. & diuidetur bifariàm in X per cit. prop. 30. Porrò rectangulum ſub S, GX, erit quarta pars figuræ quæ ad GO diametrum conſtituitur; nam GX, eſt ſemiſſis rectæ GO.

X

& S est semissis rectæ iuxta quam possunt rectæ ordinatim applicatæ ad dictam diametrum; si enim fieret rectangulum sub tota GO & recto latere, esset quadruplum rectanguli sub GX semisse totius GO, & S semisse recti lateris, diuideretur enim illud rectangulum totale in quatuor æqualia rectangula, quorum vnum erit sub GX, & S, quod ideo erit quarta pars totalis sub GO, & recto latere: quadratum verò rectæ EX est per coroll. nostrum ad propos. 20. lib. 6. elem. quarta pars quadrati rectæ EV; igitur quadratum rectæ EV erit æquale figuræ ad GO constitutæ & sub recto latere. Simili discursu, ex eisdem principijs productis quadratum rectæ GO probabitur esse æquale figuræ ad EV diametrum & sub recto eius latere. Ex quibus sequitur rectas EV, GO, esse coniugatas diametros sectionum oppositarum coniugatarum A, B, C, D, iuxta def. 4. lib. 1. inter secundas; nam quadratum rectæ EV cùm sit æquale rectangulo sub GO transuersa diametro sectionum oppositarum CD, & latere recto, erit per prop. 17. lib. 6. elem. recta EV erit media proportionalis inter GO & rectum eius latus: cumque etiam quadratum rectæ GO sit æquale rectangulo sub EV latere transuerso oppositarum sectionum AB, erit recta GO media proportionalis inter latus transuersum EV & rectum eius proprium: quare per def. 4. cit. erunt dictæ rectæ GO, EV, diametri coniugatæ prædictarum sectionum coniugatarum oppositarum. quod erat secundò propositum.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem positis, ostendendum est punctum in quo contingentes lineæ conueniunt, ad vnam asymptoton esse.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones coniugatæ A, B, C, D, earumque diametri coniunctæ AB, CD, centrumque X: datæ verò rectæ lineæ AE, CE, contingentes in A & C, verticibus sectionum A, C. Dico punctum E concursus dictarum AE, CE, contingentium non parallelarum, esse in puncto vnius asymptotorum dictarum sectionum: seu quod idem est, per punctum E incedere vnam ex asymptotis deducendis ex defin. 3. ab centro X.

Apparatus & demonstratio. Per propos. 17. datarum sectionum erunt communes asymptoti: Recta verò AE datur contingere sectionem A in puncto verticis proprij A; ergo per prop. 3. conueniet ad partes C producta, cum asymptoto deducta ex centro X. Simili modo, quia recta CE contingit sectionem in C, producta ad partes A, conueniet cum asymptoto deducta ex centro X. Sed esto si fieri possit, non conueniant rectæ AE, CE, in eodem puncto E asymptoti XE; incidatque recta AE in puncto quidem E asymptoti XE, & alia recta CE incidat in alio puncto puta e, eiusdem asymptoti XE. Possumus autem concipere intra locum sectionis C, concipere rectam lineam HIG accommodatam & parallelam ipsi AB diametro coniugatæ ipsi DCI, hæc recta linea HIG, erit ordinatim applicata diametro DC productæ vltra C, intra locum ipsius sectionis C, & bifariàm diuidetur in I, ab dicta diametro DCI, per defin. 17. lib. 1. inter primas: datur autem recta Ce contingens sectionem C in C termino diametri DC, ergo per prop. 5. erit parallela ipsi rectæ GH bifariàm sectæ in I ab diametro DCI: ergo etiam per prop. 30. lib. 1. inter primas erit parallela diametro AB, seu semidiametro XA: est autem per corollarium nostrum 2. ad prop. 17. recta Ce æqualis ipsi XA; ergo cùm sint æquales & parallelæ rectæ lineæ Ce, XA; rectæ CX, eA, ipsas vnientes, erunt per prop. 33. lib. 1. elem. æquales & parallelæ. Quod si concipiamus intra locum sectionis A, rectam KML parallelam diametro CD, hanc bifariàm secabit diameter ABM in puncto M, per cit. prop. 17. lib. 1. inter primas, eritque ordinatim applicata diametro ABM; & hinc rectæ KML, erit parallela recta eA in termino A diametri AB, per prop. 30. lib. 1. elem. quia ambæ sunt parallelæ tertiæ CX vel CD: Igitur hæc recta eA continget in vnico A puncto sectionem A, per prop. 17. lib. 1. Data autem est recta AE diuersa ab ista eA, tangere ipsam sectionem A in puncto A: ergo contra prop. 32. lib. 1. secundam partem inter tangentem eA, & sectionem A contactam in A, altera recta linea EA incidet. Absurdum hoc deductum ex positione quòd recta linea CE non incidat cum asymptoto XE, in eodem puncto E cui occurrerat alia contingens recta AE, indicat positionem esse falsam, & assertionem huius propositionis illi contradicentem positioni, veram esse. quod erat probandum.

PROPOSITIO XXII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ad quamuis sectionem ducatur recta linea; & huic æquidistans altera ducatur, quæ cum vna ex sectionibus quæ sunt deinceps, & cum asymptotis conueniat: Rectangulum constans ex portionibus

bus lineæ ductæ inter sectionem & asymptotos interiectis, quadrato lineæ, quæ ex centro ducitur, æquale erit.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones coniugatæ A, B, C, D, centrumque X, earumque asymptoti communes EXF, GXH; & ex centro X ad sectionem C ducta recta XC; & huic æquidistans EMNH, conueniens in E & H cum asymptotis prædictis, & cum sectione A in punctis M & N, quæ sectio A est vna duabus A & B deinceps ad sectionem C. Dico rectangulum sub EM, MH, contentum sub portionibus EM, MH, inter sectionem & asymptotos, lineæ ductæ EMNH, esse æquale quadrato rectæ XC prædictæ.

Apparatus. Per propos. 10. lib. 1. elem. recta linea MN, secetur bifariàm in O, & centrum X vniatur cum puncto O, recta linea XO, quæ producta vltra centrum X, occurret in B, sectioni B oppositæ ipsi A per prop. 29. lib. 2. eritque AXB diameter sectionum A, B, oppositarum, per coroll. prop. 51. lib. 1. Possumus autem concipere rectam lineam tangentem in A terminum AXB, sectionem A, quæ tangens erit parallela ipsi rectæ MN, seu EMNH, per prop. 5. tūc verò erit recta MON ordinatim applicata diametro BXAO, per coroll. nost. 7. ad propos. 48. lib. 1. eritque recta CX producta vltra centrum X attingens in D alteram D sectionem oppositam ipsi C, per prop. 29. lib. 1. & diameter ipsarum sectionum C, D, oppositarum, per coroll. prop. 51. Quare duæ rectæ AXB, CXD, erunt per prop. 20. diametri coniugatæ datarum sectionum coniugatarum oppositarum.

Demonstratio. Per coroll. nost. 2. ad prop. 17. quadratum rectæ CX, (videlicet semissis diametri CXD coniugatæ ipsi AB, nam per 30. prop. lib. 2. CXD bifariàm diuiditur in X, & recta AB diuiditur bifariàm in X centro.) est æquale quartæ parti figuræ constitutæ ad diametrum AB; & per prop. 10. eidem quartæ parti est æquale rectangulum sub EM, MH: ergo per 1. ax. lib. 1. elem. quadratum rectæ CX erit æquale rectangulo sub EM, MH. Quod erat concludendum.

PROPOSITIO XXIII.

Si in oppositis sectionibus quæ coniugatæ appellantur, ex centro ducatur quædam recta linea ad quamuis sectionem; & huic æquidistans ducatur, quæ cum tribus quæ deinceps sunt sectionibus conueniat: Rectangulum constans ex portionibus lineæ ductæ inter tres sectiones interiectis, duplum erit quadrati eius lineæ, quæ ex centro ducitur.

SVppositio. Ex centro X, oppositarum sectionum coniugatarum A, B, C, D, ducta sit recta XC ad vnam puta C sectionem; & huic rectæ XC, ducta sit æquidistans alia recta linea KL, secans tres sectiones, C in K, A in M & N, & D in L; vnam A quæ est deinceps ad C, & aliam D oppositam ipsi C, (sic enim intelligendus est Author.) Dico rectangulum KM, ML, esse duplum quadratis rectæ XC: hoc rectangulum sub KM, ML, portionibus rectæ KL, sitis inter tres sectiones C, A, D, esse duplum rectæ XC.

Apparatus. Cum asymptoti FXE, GXH, ex centro X exeuntes, secent in X diametrum CXD productam vltra X, & attingentem sectionem D oppositam sectioni C, cui occurrit ex datis in puncto C, idque iuxta prop. 29. lib. 1. secabunt etiam per propos. 15. Procli rectam KL datam parallelam ipsi CXD, in punctis E & H; & quidem in loco inter sectiones sito; cùm ex natura sua numquam attingant hyperbolas quarum sunt asymptoti, suntque per prop. 17. cōmunes omnibus datis sectionibus.

Demonstratio. Per prop. 22. præcedentem, rectangulum sub EM, MH, æquale est quadrato rectæ CX; & per prop. 11. rectangulum sub HK, KE, æquale est quadrato rectæ CX: Rectangula verò ista duo simul sumpta sunt æqualia per lem. 6. rectangulo sub KM, ML; igitur cùm singula rectangula, vnum sub HK, KE, aliud sub EM, MH, sint æqualia quadrato rectæ CX; simul sumpta erunt dupla quadrato rectæ CX: quare per prop. 7. lib. 5. elem. rectangulum sub KM, ML, æquale illis duobus simul sumptis rectangulis, duplum etiam erit quadrati rectæ CX; cùm sint per prop. 8. æquales partes EM, HN; & per prop. 16. æquales partes KE, HL. demonstrauimus ergo propositū.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Recta linea secantis tres sectiones coniugatarum oppositarum, & asymptotos earum communes, parallela alicui è centro illarum ducta recta ad vnam è duabus oppositis sectis ab dicta recta linea: rectangula sub portionibus illius recta inter sectionem quam attigit recta ex centro, & asymptotos, & sub portionibus eiusdem recta inter asymptotos & sectionem sectam deinceps ad eam quam attigit recta ex centro, sunt æqualia inter se.

SVppositio. Sint sectiones oppositæ coniugatæ, A, B, C, D, centrum earum X, & asymptoti communes GXH, FXE; recta XC ex centro X ad C punctum sectionis C: tùm recta KEMNHL, parallela prædictæ XC, secans

secans in K sectionem C, & ei oppositam D in L, & asymptotos prædictas in E & H, & sectionem deinceps A in M, & N. Dico rectangulum sub KE, HK, esse æquale rectangulo sub EM, MH.

Demonstratio. per prop. 11. rectangulum sub HK, KE, æquale est quadrato rectæ XC; & per prop. 12. rectangulum sub EM, MH, æquale est quadrato rectæ XC: ergo per 1. axiō. lib. 1. elem. rectangula illa duo erunt æqualia inter se. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Si Parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, vtraque in duobus punctis; & nullius ipsarum occursus, alterius occursibus contineatur: conuenient inter se, extra sectionem.

SVppositio. Parabolæ ABCD, duæ rectæ lineæ AB, CD, occurrant singulæ duobus in punctis; hoc est recta AB in punctis A & B; & recta CD, duobus in alijs punctis C, D; & nullum ex his punctis contineatur vel terminetur in arcu aliorum duorum punctorum, sic enim nullius ipsarum rectarum occursus continebitur alterius occursibus, vel habeant occursum communem in vnō puncto lineæ curuæ Paraboles. Dico rectas ipsas AB, CD, conuenire in puncto I, extra sectionem.

Apparatus. Concipiatur aliqua diameter parabolæ datæ ABCD; & per propos. 31. lib. 1. elem. ex punctis B, & C viciniori bus vertici Parabolæ, agantur duæ rectæ lineæ EBF, GCH, parallelæ diametro conceptæ: ipsæ rectæ EBC, GCH, erunt inter se parallelæ per prop. 30. lib. 1. elem. & per coroll. prop. 51. lib. 1. erunt singulæ diametri ipsius Parabolæ: & per prop. 26. lib. 1. singulæ secabunt in vnico tantùm puncto Parabolam, vna in B, altera in C. Porrò ducatur recta BC, vniens puncta B, C, prædicta, quæque atit per propos. 10. lib. 1. intra sectionem.

Demonstratio. Quandoquidem recta linea BC, incidit in parallelas rectas EBF, GCH, erunt anguli EBC, GCB, æquales duobus rectis per prop. 29. lib. 1. elem. Porrò AB producta vltra B, procedet vltra sectionem per prop. 10. lib. 1. & quia secat in B rectam EBF, procedet per 11. ax. lib. 1. elem. ad partes contrarias A; diuidetque ideo angulum EBC. Similiter ex eisdem principijs probabitur recta DC producta vltra C, procedere extra sectionem, & diuidere angulum GCB: igitur cùm duo anguli IBC, ICB, sint partes duorum angulorum EBC, GCB, æqualium duobus rectis; per ax. 13. lib. 1. elem. coibunt in I extra sectionem duæ rectæ AB, DC, productæ, in puncto I. Sicuti fuit propositum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si Parabolen duæ rectæ lineæ contingant; concurrent extra ipsam in vnum punctum.

PRimò enim constat per prop. 24. lib. 1. rectam vnam tangentem parabolam concurrere extra sectionem cum diametro qui non transeat per punctum contactus: Quod si dicatur hæc diameter transire per aliud punctum contactus alterius tangentis è duabus datis, fiet nihilominus triangulum mixtilineum ex curuæ lineæ Paraboles portione sita inter puncta contactus, & tangente, & secta diametro, quam diametrum etiam secat secunda tangens data & quidem in puncto contactus: & quia tota procedit extra parabolam producta hæc tangens, ingredietur intra dictum triangulum, & per ax. 28. lib. 1. elem. occurret alteri primæ tangenti extra Parabolam. Quod si dicatur diameter secta ab prima tangente, non incedere per vllum punctum contactum datorum; huic occurrent per prop. 24 cit. lib. 1. datæ duæ tangentes & quidem vel in vnico puncto eodem, & habebimus intentum; vel in duobus diuersis; tunc verò alterutra tangens producta intersecabit hanc diametrum, & in partes contrarias abibit, iuxta ax. 11. lib. 1. elem. & ingredietur intra triangulum mixtilineum, productaque occurret alteri tangenti per cit. ax. 28. lib. 1. elem.

PROPOSITIO XXV.

Si Hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, vtraque in duobus punctis; nullius autem ipsarum occursus, alterius occursibus contineatur: conuenient quidem inter sese, extra sectionem; sed tamen intra angulum qui Hyperbolen contineat.

SVppositio. Hyperbolæ EFGH, sint duæ asymptoti AB, AC, ex centro eius A procedentes, & efficientes angulum BAC continentem Hyperbolam iuxta defin. 7. In hac autem Hyperbola, duæ rectæ lineæ EF, GH, occurrant singulæ duobus in punctis, ita vt nullius illarum occursus occursibus alterius contineatur, modo explicato in suppositione præcedentis propositionis. Dico has rectas EF, GH, occurrere sibi in puncto I extra ipsam sectionem, sed tamen intra angulum BAC continentem Hyperbolam.

Ap-

Apparatus. Ex centro A ad puncta F & H, viciniora vertici Hyperbolæ, transmittantur rectæ lineæ AF, AH, quæ erunt diametri per coroll. proposit. 51. lib. 1. ipsius Hyperboles. Denique puncta prædicta F, H, vniantur recta linea FH, quæ erit intra sectionem per prop. 10. lib. 1.

Demonstratio. Imprimis per prop. 10. lib. 1. rectæ EF, GH, productæ vltra F, & H, procedent extra sectionem; non tamen in puncto A seu centro; nam vel EF producta conflueret in rectam FA, & recta GH producta conflueret in rectam AH; vel diuersæ essent rectæ: si primum, rectæ EFA, GHA, essent diametri per coroll. prop. 51. lib. 1. datæ Hyperboles, & sic secarent duobus in punctis Hyperbolen, contra prop. 26. lib. 2. si secundum, duæ rectæ lineæ spatium continerent, contra 14. ax. lib. 1. elem. igitur productæ rectæ EF, GH, vltra F, & H, non procedent ad A centrum. Productiones igitur dictarum rectarum erunt diuersæ, & EF intersecabit in F rectam AF, & GH intersecabit in H rectam GH, & procedent per 13. axio. lib. 1. element. ad partes diuersas; diuides igitur recta EF, producta angulum AFH, & recta GH producta diuidet angulum AHF: duo autem anguli AFH, AHF, in triangulo FAH, sunt per prop. 17. lib. 1. elem. minores simul sumpti duobus rectis; ergo anguli facti ab recta FH, & productionibus rectarum EF, GH, vltra F, & H, erunt multò minores duobus rectis: igitur per axiom. 13. duæ rectæ EF, GH, concurrent ad partes horum angulorum, in puncto I, & quidem extra Hyperbolam, nam per prop. 10. lib. 1. productiones illarum sunt totæ extra illam; excludimus autem punctum concursus illarum, centrum A: Restat probare quod I punctum concursus non possit esse in vlla rectarum asymptotorum, neque etiam extra angulum BAC continentem Hyperbolam. Esto si fieri possit concurrat in K extra angulum BAC continentem Hyperbolam: certè cum se mutuò intersecet in H, rectæ AH, & recta GH producta vltra H, perueniendo ad punctum K, intersecarent iterum in alio puncto L, rectam AH, & sic duæ rectæ spatium clauderent, contra 14. ax. lib. 1. element. Idem absurdum sequetur ex eisdem principijs si dicantur concurrere in puncto aliquo alicuius asymptotorum AB, AC. Cùm igitur ostenderimus duas rectas EF, GH, productas concurrere extra sectionem, & non posse esse punctum huius concursus, centrum A, neque punctum vnum asymptoti cuiusuis aliud ab centro, neque punctum extra angulum BAC continentem Hyperbolam: superest vt punctum I concursus sit intra angulum BAC continentem Hyperbolam, sicuti Apollonius proposuit.

COROLL. NOSTRVM I.

Si duæ rectæ lineæ contingant Hyperbolen, productæ concurrent extra ipsam, & intra angulum continentem Hyperbolen, & non in centro eius, neque in asymptotis.

IMprimis per coroll. prop. 31. lib. 1. quælibet tangentium datarum hyperbolen in diuersis punctis secabit producta versus verticem, diametrum Hyperboles inter centrum eius & verticem, quod punctum sectionis est extra ipsam Hyperbolen; nam linea contingens in vnico puncto sectionem tota extra illam procedit. Porrò ducendo rectam vnientem duo puncta tactionum, & rectas è centro ad ista puncta tactionum, quæ erunt diametri Hyperboles, & singulæ diuident angulum continentem Hyperbolem, per coroll. nost. 7. ad prop. 2. efficient triangulum simul cum recta coniungente puncta tactionum; & intersecabunt productæ vltra ista puncta tactionum, ipsas tangentes rectas; non enim vnam rectam cum illis efficere possunt, alioqui tangentes productæ conuenirent cum diametro in centro, contra coroll. prop. 31. lib. 1. igitur se mutuò intersecantes diuident tangentes productæ duos angulos ad basim trianguli facti, minores simul sumptos duobus rectis; atque ideo anguli effecti ab illis tangentibus productis & basi simul sumpti erunt minores duobus rectis; quare per axio. 13. lib. 1. elem. concurrent productæ tangentes ad partes illorum angulorum simul minorum duobus rectis, in aliquo puncto; quod non erit centrum; neque aliud punctum ab illo centro in qualibet asymptotorum datæ Hyperboles; neque extra angulum continentem hyperbolen, vti demonstrabitur ex eisdem principijs allatis in demonstratione huius propositionis 25. superest igitur vt punctum huiusmodi concursus duarum rectarum tangentium Hyperbolam, in diuersis punctis vnis, vnius in vno, alterius in altero diuerso, sit intra angulum continentem Hyperbolam.

COROLL. NOSTRVM II.

Si vna recta Hyperbolen contingat in vnico solùm puncto, & altera recta secet in duobus punctis diuersis ab illo, & punctum contactus rectæ tangentis non sit in arcu secantis; concurrent producta ista duæ lineæ extra sectionem, & quidem intra angulum continentem ipsam.

FIat apparatus proportione seruata qui præceptus est ad demonstrationem huius propositionis: ex eisdem principijs allatis in demonstratione propositum concludetur verum.

PROPOSITIO XXVI.

Si in Ellipsi, vel circuli circumferentia, duæ rectæ lineæ non transeuntes per centrum, se inuicem secent: bifariàm sese non secabunt.

HAnc propositionem quoad circuli circumferentiam, exhibuit Euclides libro tertio elementorum, prop. 4. Nunc in vniuersum eam demonstrabimus.

Suppositio. Duæ rectæ chordæ CD, EF, se mutuò intersecent in puncto G, ita vt nulla illarum transeat per punctum H quod sit centrum ellipseos vel circuli. Dico quod bifariàm se mutuò non secent in G.

Apparatus. Esto si fieri possit, se mutuò bifariàm secent in puncto G, per quod & centrum H transmittatur recta chorda AGHB in dictis sectionibus: eritque per coroll. prop. 51. lib. 1. hæc chorda AGHD, diameter sectionis.

Demonstratio. Per prop. 6. quia diameter AGHB, rectas vtrasque chordas CD, EF, in G bifariàm diuidit intra sectiones; singulæ erunt æquidistantes tangenti rectæ sectionem propriam in terminis A vel B dictæ diametri; ideoque per propositio. 30. lib. 1. elemen. dictæ chordæ CD, EF, erunt parallelæ inuicem, contra datum & admissum in propositione, nam se mutuò intersecare in G puncto datæ sunt. Absurdum hoc procedens ex positione contradicente assertioni huius propositionis, manifestam reddit falsitatem propositionis, & veritatem assertionis.

PROPOSITIO XXVII.

Si Ellipsim, vel circuli circumferentiam, duæ rectæ lineæ contingant; & si quidem ea quæ tactus coniungit, per centrum transeat sectionis: contingentes lineæ sibi ipsis æquidistabunt; sin minus, conuenient inter sese ad easdem centri partes.

SVppositio. In ellipsi vel Circulo, duæ rectæ lineæ CD, KL, sint tangentes; rectaque lineæ nectens puncta A, H, contactuum, incedat per N centrum sectionis: Dico ipsas tangentes CD, KL, esse parallelas. Quod si sint duæ rectæ tangentes CD, EF, tangentes, rectaque BA vniens puncta A, B, contactuum, minimè transeat per N centrum sectionis: dico tangentes CD, EF, non esse parallelas, sed concurrere ad easdem centri N partes.

Apparatus pro prima parte demonstrãda. In sectione ex aliquo eius puncto G diuerso ab A & H; agatur chorda recta GMI, sed non per centrum N, parallela tangenti CAD, per prop. 31. lib. 1. elem. hæc recta CAD erit ordinatim applicata diametro ANH, per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. ideoque secabitur bifariàm in M ab diametro ANH, per def. 10. libri 1. inter primas. Porrò recta ANH erit diameter sectionis per coroll. prop. 51. lib. 1.

Demonstratio primæ partis. Diameter ANH in sectione bifariàm diuidit rectam GMI, in M, non per centrum N sectionis extensam; & ad terminum H dictæ diametri datur recta linea KHL contingens ipsam sectionem; ergo per propos. 6. recta linea KHL erit parallela rectæ GMI bifariàm diuisæ in M ab dicta diametro ANH. Sed in apparatu posuimus rectam chordam GMI parallelam ipsi alteri tangenti CAD rectæ sectionem in A extremo diametri prædictæ ANH; ergo per propos. 30. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ CAD, KHL, contingentes ellipsim vel circulum in A & H punctis erunt parallelæ vti propositum fuit in prima parte.

Apparatus pro secunda parte. Ex puncto A contactus rectæ lineæ CD, & sectionis, per centrum N, recta chorda ANH transmittatur, quæ in ellipsi & circulo erit diameter per coroll. prop. 51. lib. 1. Tum per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto B contactus alterius rectæ lineæ EBF, agatur recta chorda BPO parallela tangenti rectæ CAD, in extremo A diametri ANH.

Demonstratio secundæ partis. Recta EBF tangens ellipsim vel circulum in vnico puncto B, tota est extra sectionem, excepto puncto B: alia verò recta AB, vniens duo puncta A & B, lineæ curuæ datarum sectionum tota est intra sectionem per prop. 10. lib. 1. igitur non erunt sibi indirectum, duæ rectæ EBF, AB: productæ igitur vltra B punctum commune illis, se mutuò intersecabunt in illo puncto B, per 11. ax. lib. 1. elem. Similiter ostendentur duæ rectæ lineæ EBF, BPO, se mutuò intersecare in B puncto communi. Iam verò cùm recta EBF secet rectam BPO parallelam positã ipsi CAD, secabit etiam ipsam CAD, per prop. 11. Procli. atque ita concurrent in puncto sectionis; & quidem extra sectionem ad easdem centri N partes; quia totæ procedunt extra sectionem.

Aliter demonstrabimus in circulo has duas propositionis partes, ex solis elemen. principijs.

Primam partem sic. Tactus A & H rectarum CAD, KHL, & circuli, quia vnit recta AH incedens per N centrum circuli; erit per prop. 18. lib. 3. elem. recta ANH, ad angulos rectos lineis rectis CAD, KHL, tangentibus: ergo per prop. 28. lib. 1. ele. duæ rectæ CAD, KHL, tangentes prædictæ, erunt parallelæ.

Secun-

Secundam hoc modo. Ex centro N circuli ad puncta A & B contactuum rectarum linearum CAD, EBF, ducantur rectæ lineæ NA, NB, quæ angulos rectos in A & B efficient per propos. 18. lib. 3. elem. hos verò rectos angulos diuidit recta AB vniens puncta contactuum; nam per 2. prop. lib. 3. elem. recta AB tota est intra circulum; & rectæ CA, EB, tangentes procedunt totæ extra circuli aream, per prop. 16. lib. eiusdem 3. ergo anguli CAB, EBA, simul sumpti erunt minores duobus rectis: igitur duæ rectæ EBF, CAD, contingentes circulum productæ concurrent per ax. 13. lib. 1. elem. ad has partes prædictorum angulorum minorum duobus rectis, ad easdem centri N partes; & quidem extra circulum, quandoquidem totæ sunt extra ipsum, exceptis punctis A & B contactuum.

COROLL. NOSTRVM I.

In ellipsi, vel circuli circumferentia; si duæ rectæ contingentes coeant in vnum punctum exterius: recta linea vniens puncta contactuum non incedet per centrum.

ESto incedat per centrum, ergo per hanc propos. datæ rectæ lineæ contingentes, & concurrentes æquidistabunt, quod est absurdum: igitur recta linea vniens puncta contactuum datorum non incidet per centrum.

COROLL. NOSTRVM II.

Duarum parallelarum rectarum linearum contingentium ellipsim, vel circuli circumferentiam, recta linea vniens puncta contactuum, transibit per centrum.

ESto non transeat, per centrum: tunc per istam propositionem, datæ rectæ lineæ parallelæ, conuenient, contra datum. Igitur recta linea vniens puncta datorum contactuum transibit per centrum.

COROLLARIVM NOST. III.

In Parabola & Hyperbola duæ rectæ lineæ sectionem contingentes non possunt esse parallelæ.

NAm in parabola per coroll. nost. ad prop. 24. concurrunt in vnum punctum: etiamque in Hyperbola per coroll. nost. 1. ad propos. 25. igitur non erunt parallelæ.

COROLL. NOSTRVM IV.

In sectionibus conicis, si duæ rectæ lineæ aliquam illarum contingant, fuerintque parallelæ: ipsa erit Ellipsis vel circulus; in quibus dari possunt duæ rectæ lineæ parallelæ, ipsas tangentes.

NOn enim potest esse Parabola vel Hyperbola per coroll. 3. præced. ergo relinquitur vt sit Ellipsis vel circulus; in quarum alterutra si ad quemuis axem in eius verticibus ponantur rectæ lineæ perpendiculares, ipsæ per prop. 28. lib. 1. elemenr. erunt parallelæ alteri axi coniugato, ideoque per prop. 30. eiusdem lib. 1. elem. inuicem parallelæ. Et quia omnis axis coniugatus ordinatim est applicatus alteri axi prædicto suo, ideo per prop. 17. lib. 1. Apoll. duæ illæ rectæ parallelæ & perpendiculares axi dato in circulo vel ellipsi, contingent earum lineam curuam.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in coni sectione, vel circuli circumferentia, duas rectas lineas æquidistantes recta linea bifariàm secet: diameter erit sectionis.

SVppositio. In coni sectione, vel circuli circumferentia, sint duæ rectæ chordæ CD, AB, parallelæ, bifariàmque diuisæ, illa in E, ista in F; & recta linea EF transmissa per dicta media puncta E, F, & producta vtrimque. Dico hanc rectam EF esse diametrum sectionis coni, vel circuli circumferentiæ.

Apparatus. Si non ita sit, esto si fieri possit alia recta HF portio diametri sectionis, vel circuli circumferentiæ, secans rectam CD in alio puncto H diuerso ab E medio; productaque versus verticem sectionis donec attingat ipsam sectionem, vel circuli circumferentiam in puncto G.

Demonstratio. In Parabola vel Hyperbola, si concipiatur recta linea tangens in puncto G termino diametri GHF introductæ, hæc tangens erit per prop. 5. æquidistans rectæ AB bifariàm sectæ in F ab ipsa diametro GHF introducta: est autem ex datis recta CD parallela ipsi AB; ergo per prop. 30. lib. 1. elemen. erit etiam parallela dictæ rectæ tangenti in G. In ellipsi verò & circulo concipienda similiter recta linea tangens in puncto G; tunc verò per propos. 6. recta ista tangens erit parallela rectæ AFB bifariàm diuisæ in F, ab introducta diametro GHF; ideoque etiam recta CD parallela data ipsi AB, erit per citatam prop. 30. lib. 1. elem. ipsi rectæ tangenti in G extremo diametri introductæ. Iam verò in omnibus prædictis sectionibus & circuli circumferentia, quia duæ rectæ AB, CD, sunt parallelæ tangenti rectæ in G, erunt per coroll. nostrum 7. ad prop. 48. lib. 1. ordinatim applicatæ diametro introductæ GHF, ideoque bifariàm diuisæ ab illa, in punctis H & F, per 10. def. lib. 1. inter primas. Igitur diuisa erit bifariàm recta

CD, bis, in punctis E, & H, contra coroll. nostrum ad propos. 1. lib. 3. elem. hoc absurdum cùm deriuetur ex positione contradicente assertioni huius propositionis, ipsa positio falsa erit, & vera assertio quod recta EF sit diameter vel pars diametri sectionis coni vel circuli circumferentiæ.

Hanc proprietatem demonstrabimus in circulo ex solis elementis primis, hac ratione.

Apparatus. Ducantur chordæ AC, BD, CB; & rectæ FC, FD, ex puncto F medio rectæ AB.

Demonstratio. Quia chorda CB incidit in chordas AB, CD, parallelas, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli DCB, ABC, æquales; ideoque per coroll. nost. ad propos. 26. lib. 3. elem. æquales erunt arcus AC, BD; tùm per coroll. nost. ad prop. 29. lib. 3. elem. æquales chordæ AC, BD. Illis autem arcubus æqualibus si addatur communis arcus CKD, fient per 2. axio. lib. 1. elem. arcus totales ACD, BDC, æquales: quare per coroll. nost. ad propos. 17. lib. 3. elem. anguli CAB, DBA, æquales erunt. Quia verò in triangulis CAF, DBF, duo latera CA, AF, sunt respectiuè æqualia duobus lateribus DB, BF, angulosque continent æquales ostensos CAF vel CAB, DBF vel DBA, erunt per prop. 4. lib. 1. elem. bases eorum CF, DF, æquales; ex quo sequitur esse triangulum CFD isosceles; huius verò basis CD, datur diuisa bifariàm in E; nam recta FE datur incedere per medium eius punctum E, & per medium F punctum alterius rectæ AB: ergo per coroll. nost. 1. ad propos. 32. lib. 1. elem. erit recta FE ad angulos rectos chordæ CD; ergo per coroll. nostrum 2. ad prop. 29. lib. 1. element. erit etiam ad angulos rectos chordæ AB. Igitur per coroll. prop. 1. lib. 3. elem. recta EF producta incedet per centrum circuli; ideoque erit eius diameter per def. 17. lib. 1. elem.

PROPOSITIO XXIX.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, duæ rectæ lineæ contingentes in idem punctum conueniant; & ab eo ad punctum quod lineam tactus coniungentem bifariàm secat, alia linea ducatur: sectionis diameter erit.

SVppositio. Datæ sint duæ rectæ lineæ BA, CA, contingentes in B & C, punctis, coni sectionem vel circuli circumferentiam, BA quidem in vnico puncto B, CA verò in vnico puncto C; concurrantque ambæ in puncto A: ductaque sit recta BC vniens dicta puncta contactuum; & rectæ huius BC sit punctum medium D. Assero rectam AD transmittendam ex puncto A concursus datarum tangentium duarum BA, CA, ad medium punctum D rectæ BC vnientis dicta puncta B, & C, contactuum, esse diametrum sectionis coni, vel circuli circumferentiæ.

Apparatus. Si recta AD non sit diameter sectionis vel circuli circumferentiæ. Sit si fieri possit alia recta DE educta ab puncto D medio rectæ BC, secans alterutram tangentium, puta BA in E puncto diuerso ab A; hæc recta DE cùm attingat in E rectam tangentem BA, puncto sito extra sectionem vel circuli circumferentiam, secabit obuiam lineam curuam in puncto aliquo L: & ex puncto E transmittatur recta linea EC ad punctum C contactus alterius rectæ CA tangentis datæ: hæc recta EC per coroll. nost. 1. ad prop. 32. lib. 1. secabit lineam curuam sectionis in duobus punctis F, & C. Præterea concipiatur recta linea contingens sectionem vel circuli circumferentiam in puncto L, seu termino diametri introductæ; quæ erit per propos. 5. in parabola & hyperbola æquidistans rectæ BDC bifariàm sectæ in D; & in ellipsi & circulo per propos. 6. (modò recta BD non transeat per centrum ellipseos vel circuli.) Insuper ex puncto F agatur per propos. 31. lib. 1. elem. recta linea FK, parallela ipsi BC, quæ etiam erit parallela dictæ rectæ tangenti in L, per prop. 30. lib. 1. elem. & per coroll. nost. 3. ad prop. 18. lib. 1. secabit sectionem in alio puncto K diuerso ab F; vnde etiam secabit obuiam DLE introductam diametrum in puncto aliquo H. Producendo autem rectam FK, vltra K, secabit obuiam rectam BA tangentem, in puncto aliquo G, per axio. 28. lib. 1. element. In triangulo igitur BEC, cùm sit recta FG parallela basi BC, rectaque EHD secet bifariàm in D. basim BC, secetque alteram GF in H, parallelam ipsi BC; ipsam rectam GF secabit bifariàm in H per coroll. nost. ad prop. 4. lib. 6. elem. ideoque GH, FH, æquales.

Demonstratio. Ex apparatu recta linea contingens sectionem vel circuli circumferentiam in puncto L, est parallela rectæ BC diuisæ bifariàm in D: Recta autem FK est posita parallela rectæ BC; ergo per prop. 30. lib. 1. elem. recta FK erit parallela prædictæ contingenti rectæ in puncto L sectionem vel circuli circumferentiam: sunt verò duæ rectæ BC, FK, per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. ordinatim applicatæ diametro introductæ ELD; igitur bifariàm singulæ diuidentur ab dicta diametro ELD introducta, iuxta def. 10. & 12. lib. 1. inter primas. Quare recta FK bifariàm diuisa erit in H. Ostendimus rectas GH, FH, esse æquales in apparatu: igitur cùm sint rectæ GH, KH, singulæ æquales probatæ tertiæ rectæ FH; erunt per 1. ax. lib. 1. elem. æquales inter se GH, KH, totum & pars, contra 8. ax. lib.

lib. 1. elem. Abſurdum hoc profluens ex poſitione alterius diametri ED diuerſæ ab AD, manifeſtam reddit poſitionis falſitatem, & adſtruit rectam A D eſſe diametrum propoſitam.

Alia ratione idem demonſtrabimus in circulo, ex ſolis elementis primis.

Quia per corollarium 2. ad propoſ. 36. lib. 3. elem. duæ tangentes rectæ BA, CA, ſunt inter ſe æquales, erit triangulum BAC iſoſceles: ergo quia ex eius angulo A oppoſito baſi BC, recta AD procedit ad D medium chordæ BDC, erit ad angulos rectos ipſi chordæ BDC, per coroll. noſt. 1. ad prop. 32. lib. 1. elem. igitur producta recta AD, vltra D, procedet per centrum eius, iuxta coroll. ad propoſ. 1. lib. 3. elem. quare per defin. 17. lib. 1. elem. erit diameter circuli.

PROPOSITIO XXX.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam, duæ rectæ contingentes, in vnum punctum conueniant: diameter quæ ab eo puncto ducitur, lineam tactus coniungentem, bifariàm ſecabit.

SVppoſitio. Duæ rectæ lineæ BA, CA, contingentes ſectionem vel circuli circumferentiam, illa in B vnico puncto, iſta in C alio puncto vnico, conueniant in A punctum ſitum extrà ipſam ſectionem, quandoquidem procedunt extra ipſam vel circulum; Rectaque BC vniat dicta duo B, C, puncta contactuum: ſitque data diameter AD procedens ex illo puncto A concurſus, ſecans rectam BC in aliquo puncto, D. Aſſero bifariàm diuidi rectam BC, in hoc puncto D.

Apparatus. Si punctum D non ſit medium totius BC; ſit ſi fieri poſſit aliud E; hoc eſt bifariàm in E diuidatur recta BC, per propoſ. 10. lib. 1. elem. & ducatur recta AE.

Demonſtratio. Quandoquidem recta BC diuiſa eſt per aduerſarium bifariàm in E; recta AE per prop. 29. præcedent. erit diameter ſectionis, vel circuli, datur verò alia diameter AD. ex hiſce deductis ab poſitione aduerſarij contradicente aſſertioni huius propoſitionis ſequuntur iſta abſurda. Si ſectio data ſit Parabola, diametri eius AE introducta, & AD, data, ſe mutuò ſecabunt in A extra ipſam Parabolam, contra coroll. noſt. 2. ad prop. 27. lib. 1. vel cùm ſe mutuò ſecent in A, non erunt parallelæ, contra coroll. noſt. 3. ad cit. prop. 27. lib. 1. Quòd ſi ſectio data ſit ellipſis vel circulus, & diametri vniuſcuiuſque ſe mutuò ſecent in centro intra ipſas ſito, & ſe mutuò iſtæ duæ diametri ſecent ſe in A extra ipſas; duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecabunt duobus in punctis diuerſis ac diſſitis, contra 11. ax. lib. 1. element. Denique ſi ſectio data ſit Hyperbola; quandoquidem diametri eius ex centro procedant in quo ſe mutuò ſecant, A erit centrum; ideoque duæ rectæ BA, CA, tangentes Hyperbolen, concurrent in A centrum, contra coroll. noſtrum 1. ad propoſ. 25. Igitur poſitio falſa erit, & aſſertio vera.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si in Hyperbola, Ellipſi, & circulo, duæ rectæ lineæ tangentes in vnum conueniant punctum: recta linea ex hoc puncto per centrum ducta & producta ſi opus ſit, bifariàm diuidet rectam lineam vnientem puncta contactuum.

HÆc enim recta ducta in ellipſi & circulo erit diameter per coroll. prop. 51. lib. 1. quare per hanc prop. bifariàm diuidet rectam vnientem puncta contactuum.

In Hyperbola verò, quoniam per corollar. noſt. 1. ad prop. 25. punctum iſtud concurſus tangentium ſit in loco anguli continentis hyperbolam, & non in centro hyperboles, neque in eius aſymptotis, recta linea per hoc concurſus punctum, & centrum, diuidet angulum continentem hyperbolam; ideoque per coroll. noſt. 5. ad prop. 2. producta occurret hyperbolæ, eamque interſecabit; quare per corollar. prop. 51. lib. 1. erit eius diameter; & per hanc prop. diuidet biſariàm rectam vnientem puncta contactuum. Atque ita probauerimus intentum.

PROPOSITIO XXXI.

Si vtramque oppoſitarum ſectionum duæ rectæ lineæ contingant; & ſi quidem ea quæ tactus coniungit, per centrum tranſeat: contingentes lineæ æquidiſtantes erunt; ſin minus conuenient inter ſeſe ad partes centri.

SVppoſitio. Oppoſitas ſectiones A, B, contingant rectæ lineæ, CAD quidem in A, ſectionem A; EBF verò in B, ſectionem B; veris contactibus in vnico puncto; ſi linea AB nectens puncta A, B, contactuum, tranſierit per I centrum ſectionum datarum oppoſitarum; dico datas rectas CAD, EBF, contingentes, eſſe parallelas: ſi verò recta AB non inceſſerit per centrum I, aſſero datas rectas tangentes CAB, EBF, non eſſe parallelas. Pro prima aſſertione inſeruit prima figura; & pro ſecunda aſſertione, 2. figura.

Demonstratio primæ assertionis. Quandoquidem recta AB incedere datur per I centrum oppositarum sectionum A, B; & vnam earum A contingere datur in A, recta linea CD: quæ per B transmittetur sectionem B contingens in puncto B, per coroll. nost. 2. ad propos. 44. lib. 1. erit parallela ipsi CD; datut autem recta EF contingens in B, sectionem B: ergo ista recta EF, erit parallela alteri CD contingenti. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ assertionis. Quoniam recta AB, vniens puncta cootactuum A, B, non incedit per I centrum oppositarum sectionum; poterimus ducere ex puncto A per I centrum rectam AI, quæ producta vltra I, occurret per prop. 29. lib. 1. alteri oppositæ sectioni in G puncto, quæque erit per coroll. prop 51. lib. 1. diameter harum sectionum; quod si per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto G agamus rectam lineam HGK parallelam tangenti CAD sectionem A in puncto A, hæc recta HGK sectionem B cootinget in puncto G, per coroll. nost. 1. ad prop. 44. lib. 1. Iam verò quia eandem Hyperbolen B, duæ rectæ lineæ HGK, EBF, contingunt, illa io puncto G, hæc in puncto B; productæ concurrent extra ipsam in aliquo L puncto per propos. 25. secabitque EB, alteram HK; sunt autem parallelæ rectæ HK, CD; ergo per propos. 11. Procli recta EB producta etiam secabit rectam CD puta in C: & sic non erunt parallelæ rectæ EF, CD, quarum contactus A, B, recta linea AB coniungens noo incedit per centrum I. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Si vtrique oppositarum sectionum rectæ lineæ occurrant, ipsas vel in vno puncto contingentes, vel in duobus secantes; & productæ inter se conueniant: punctum in quo conueniunt, erit in angulo, qui deinceps est angulo continenti sectionem.

SVppositio. Rectæ lineæ AB, CB, oppositis sectionibus occurrant, vna vni, altera alteri, eas contingendo io vno puocto, vt in prima figura apparet, in qua recta CD contingit in vnico puncto C sectionem I, & alia recta AB contingit in puncto A, sectionem M: vel secando in duobus punctis, vt in secunda figura videre est, in qua recta CD, sectiooem I secat in duobus punctis C, D; & alia recta AB, sectionem M secat in duobus punctis A, B; concurrantque in vnam punctum N. Sintque harum oppositarum sectionum asymptoti communes FLG, KLH, se mutuò intersecantes in centro L datarum sectionum; vnde fit vt anguli KLG, FLH, sint anguli deinceps angulis FLK, HLG, continentibus suas proprias sectiones. Dico autem rectarum AB, CD, coire in concursus punctum N situm esse intra angulorum FLH, KLG, alterum, qui sunt deinceps angulis FLK, HLG, continentibus suas proprias sectiooes.

Demonstratio. Si duæ rectæ AB, CD, contingant sectiones, productæ vtrimque occurrent asymptotis per 3. prop. recta quidem AB in H & B, & recta CD io F & D, vt exhibet prima figura. Si verò secent sectiones in duobus punctis, productæ vtrimque secabunt per prop. 8. asymptotos; recta quidem AB in H & G; alia verò CD, in F, & K. & quia dantur duæ istæ rectæ AB, CD, concurrere in puncto N; & ostendimus singulas secare sectionum asymptotos ambas; necessariò punctum N concursus erit intra vnum angulorum deinceps prædictorum, FLH, vel KLG; nam vltra asymptotos productæ aberrant ab illis. Quod si esset aliud punctum situm extra locum assignatum; vna ex datis rectis AB, CD, eandem asymptotum bis secaret duobus in punctis diuersis contra 11. axiom. lib. 1. elem. punctum igitur N concursus erit intra alterum angulorum qui deinceps angulo continenti sectionem, vel angulis continentibus sectiooes.

COROLL. NOSTRVM I.

Si duæ rectæ lineæ contingentes vel secantes sectiones oppositas, singulæ suam; conueniant in vnum punctum: hoc non erit centrum sectionum; neque erit intra angulos continentes ipsas; neque in ipsis asymptotis.

ESt enim punctum concursus huiusmodi intra angulum seu anguli locum qui deinceps est angulo continenti sectionem, per hanc propositiooem: ergo non erit in centro sectionum, neque intra angulum continentem sectionem, neque in ipsis asymptotis; quæ omnia suot quid diuerso ab assignato in propositione præsenti.

COROLL. NOSTRVM II.

Si duæ rectæ lineæ sectiones oppositas contingant, vna vnam, altera alteram, conuenientes in vnum punctum: recta linea vniens puncta contactuum non transibit per centrum, sed per locum anguli deinceps ad angulum continentem sectionem.

SI enim transiret per centrum, esseot per prop. 31. parallelæ datæ rectæ contiggentes, & concurrentes in vnum, quæ duo pugnant inter se: igitur non transibit per centrum. Cùm autem vniat duo puncta cootactuum, quorum vnum est in vna sectione, aliud

in

in alia, oppositis locis puncto concursus tangentium rectarum axistenti per hanc propos. in loco anguli deinceps ad angulum continentem sectionem; necessariò obuias asymptotos secabit transeundo per locum anguli alterius deinceps ad dictum angulum continentem.

COROLLARIVM NOST. III.

Si duæ rectæ lineæ contingant sectiones oppositas, vna vnam, altera aliam fuerint parallelæ; recta linea vniens puncta contactuum, transibit per centrum.

Esto non transeat per centrum; tunc per propos. 31. rectæ lineæ contingentes datæ parallelæ, concurrent. quæ duo pugnant inuicem: igitur non poterit dici recta linea vniens puncta contactuum; quod non transeat per centrum. ergo transibit, quod volumus.

PROPOSITIO XXXIII.

Si vni oppositarum sectionum recta linea occurrens, & producta ex vtraque parte, extra sectionem cadat; cum altera sectione non conueniet, sed transibit per tres locos, quorum vnus quidem erit sub angulo sectionem continente, duo verò sub ijs angulis qui deinceps sunt.

Vppositio. Datarum sectionum oppositarum A, B, sit centrum I, & asymptoti GIH, EIF, vnique A earum sectionum recta linea EAH occurrens vel in vno solùm puncto A, vel in duobus C, D; & producta ex vtraque parte procedat extra sectionem A: his postremis verbis excluditur diameter transuersa oppositarum sectionum, quæ producta ex parte opposita verticibus propria semper procedit intra locum hyperboles propriæ & nunquam extra illam progreditur ipsam secando; nam per prop. 26. lib. 1. coroll. nostrum 1. in vno tantùm puncto verticis eam secat. Assero autem quòd cum altera B sectione non conueniet; sed transibit per tres locos, quorum vnus erit sub angulo EIH sectionem A contactam vel sectam, continente; alij verò duo loci sub angulis GIE, FIH, qui sunt deinceps prædicto angulo EIH sectionem A continente.

Demonstratio. Si recta EAH contingat in vnico tantùm puncto A, sectionem A, cum vtrisque asymptotis in E & H conueniet producta vtrimque per prop. 3. si verò recta EAH, sectionem A secet in duobus punctis, C, D, producta vtrimque occurret asymptotis in E, & H, per prop. 8. Quod si recta EAH producta occurreret alteri sectioni B, necessariò intermediam vnam ex asymptotis in alio puncto intersecaret, contra 11. ax. lib. 1. elem. igitur non occurret producta alteri B sectioni recta EAH, contingens vel secans sectionem A. Ipsa verò recta EAH siue contingens siue secans sectionem A, sub angulo EIH sectionem A continente; & producta vtrimque vltra E, H, puncta asymptotorum, in quibus ipsas secare ostensa est, procedet ad partes contrarias angulo EIH, hoc est per locos angulorum GIE, FIH, deinceps angulo prædicto EIH; & sic vti postremò assertum est, transibit per tres locos assignatos.

PROPOSITIO XXXIV.

Si vnam oppositarum sectionum recta linea contingat; & huic æquidistans ducatur in altera sectione: quæ à tactu ad medium lineæ æquidistantis ducitur; oppositarum sectionum diameter erit.

Vppositio. Oppositarum sectionum A, B, alteram A contingat recta CD in puncto A vnico; ipsique rectæ CD, aliarecta EF sit accommodata intra sectionem B oppositam, parallela: sitque punctum G medium rectæ EF, rectaque ex A puncto contactus prædicti, per G punctum medium rectæ EF transmissa. Dico rectam AG esse diametrum transuersam datarum oppositarum sectionum.

Apparatus. Si recta AG non sit diameter sectionum oppositarum: sit alia si fieri recta AK ducta ab puncto A per centrum oppositarum sectionum, quæ per propos. 29. lib. 1. secabit in H. lineam curuam sectionis B, & rectam EF obuiam in puncto K diuerso ab G. & cocipiatur recta linea contingens sectionem B in puncto H. eritque recta AHK diameter per coroll. prop. 51. lib. 1.

Demonstratio. Quia duæ rectæ lineæ CD, & altera per H concepta, contingunt singulæ suas sectiones datas oppositas; ipsæ erunt per proposit. 31. parallelæ inuicem, eò quòd recta AH, vniens puncta contactuum incedat per centrum earum: sed recta EF datur parallela rectæ CD; ergo per prop. 30. lib. 1. elem. erit parallela rectæ in H contingenti sectionem B. Igitur per propos. 47. lib. 1. recta EF bifariàm diuidetur in K, ab diametro AHK introducta ab aduersario. Habemus ergo rectam lineam EF, bis sectam diuersis in punctis G, & K, bifariàm, contra coroll. nost. ad propos. 1. lib. 3. elem. Absurdum hoc promanans ex introducta diametro AHK, diuersa ab AG, datarum sectionum oppositarum, indicat nullam aliam

asse

esse posse diametrum ex datis, præter illam AG, deductam ex puncto A contactus, ad medium G punctum rectæ EF accommodatæ in sectione B æquidistantis ipsi CD contingenti in A, sectionem A. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si vnam oppositarum sectionum recta linea contingat; & intra locum alterius ducatur recta linea illi tangenti parallela: occurret huic sectioni duobus in punctis.

SI enim concipiantur asymptoti communes his oppositis sectionibus iuxta prop. 15. his occurret tangens prædicta rectæ per prop. 3. ergo eisdem occurret recta parallela tangenti, per prop. 11. Procli: igitur obuiam lineam sectionis secabit duobus in punctis, antequam perueniat ad asymptotos.

PROPOSITIO XXXV.

Si diameter, in vna oppositarum sectionum rectam lineam bifariàm secet: quæ in termino diametri contingit alteram sectionem; lineæ bifariàm sectæ erit æquidistans.

SVppositio. Diameter AB, sectionum oppositarum A, B, secet rectam lineam CD accommodatam in vna B sectionum oppositarum, & quidem bifariàm in E: sitque altera recta HAI in termino A diametri datæ AB, contingens in vnico A puncto alteram sectionem A. Dico hanc rectam HAI esse æquidistantem bifariàm sectæ rectæ CD in E, ab data diametro ABE.

Apparatus. Si non sint æquidistantes rectæ CD, HAI; poterimus per prop. 31. lib. 1. element. ex vno D extremo rectæ CD, agere rectam DF parallelam ipsi tangenti HAI, quam probo secare in alio puncto F, sectionem B: nam recta per B punctum acta parallela tangenti rectæ HAI, sectionem B in puncto B, continget per coroll. nost. 1. ad prop. 44. lib. 1. Cùm ergo eidem rectæ HAI sit posita parallela recta DF; erunt per prop. 30. lib. 1. parallelæ, recta CD ducta, & concepta parallela ipsi HAI, & probata tangere sectionem B in puncto B: igitur per coroll. nost. 3. ad propos. 8. lib. 2. recta DF ducta secabit in alio puncto F sectionem B. Porrò hæc recta DF secabitur in G ab diametro ABG, per propos. 11. Procli, quia recta HAI ab eadem diametro secatur in A. Iam verò per propos. 48. lib. 1. recta DF bifariàm diuidetur in G, ab diametro ABGE. Denique recta linea CF ducatur vniens puncta C, F, lineæ curuæ sectionis B; hæc recta per prop. 22. lib. 1. concurret cum diametro prædicta ABGE.

Demonstratio. In triangulo CDG, quia duo latera CD, FD, bifariàm secta sunt, illud in E, hoc in G; erunt per 2. prop. lib. 6. elem. parallelæ rectæ CF, EG, hoc est CF, & diameter ABGE; quæ in apparatu ostensæ sunt concurrere. Contradictio ista indicat positionem aduersarij falsam esse, & assertionem huius propositionis esse veram.

PROPOSITIO XXXVI.

Si in vtraque oppositarum sectionum, rectæ lineæ inter se æquidistantes ducantur: quæ ipsarum medium coniungit; oppositarum erit diameter.

SVppositio. In vna A, oppositarum sectionum A & B, sit recta chorda CD, & in alia B sectione opposita, alia chorda EF, parallela prædictæ CD; punctumque G medium rectæ CD; & punctum H medium alterius rectæ EF, rectaque GH transmissa. Dico hanc rectam GH esse diametrum datarum sectionum A, B, oppositarum.

Apparatus. Imprimis recta GH, secabit sectionem A in aliquo puncto A, & aliam sectionem B in alio puncto B, quia sunt intermedia. Quod si non sit diameter recta GABH; sit si fieri possit alia GILK, educta ex puncto G medio, per centrum ipsarum sectionum oppositarum, quæ necessariò intermediam sectionem A secabit in aliquo puncto I diuerso ab A, & occurret sectioni B in puncto L per prop. 29. lib. 1. & ingrediatur intra sectionem B, per coroll. nost. 1. ad prop. 31. lib. 1. ideoque secabit rectam EF in K, per 11. prop. Procli, in alio puncto K diuerso ab H, eritque diameter recta GILK per coroll. prop. 51. lib. 1. ideoque solummodo in puncto vnico I, secabit sectionem B, per coroll. nost. 1. ad prop. 26. lib. 1. Concipiatur autem in puncto I recta linea contingens in vnico puncto I, sectionem A; erit per 5. prop. parallela ipsi CD; ideoque etiam parallela rectæ EF, per prop. 30. lib. 1. elem. quare per prop. 48. lib. 1. recta EF bifariàm diuidetur in puncto K ab recta AILK diametro transuersa introducta ab aduersario.

Demonstratio. Datur recta EF bifariàm diuisa in E; & ex positione aduersarij ostendimus in apparatu diuidi bifariàm in K: igitur recta linea EF, bis bifariàm diuidetur duobus in punctis diuersis, contra coroll. nostrum prop. 1. lib. 3. elem. hoc absurdum deductum ab positione alterius diametri diuersæ ab GH vnien-

vnientis puncta media G, H; parallelarum CD, EF, datarum; deductaque ab vno G ex illis punctis, falsa erit; remanebitque probata diameter GH, sectionum oppositarum ex datis.

PROPOSITIO XXXVII.

Si oppositas sectiones, recta linea secet, non transiens per centrum: quæ à medio ipsius ad centrum ducitur oppositarum sectionum, diameter erit quæ recta appellatur: transuersa verò diameter ipsi coniugata est ea, quæ à centro ducitur æquidistans lineæ bifariam sectæ.

Svppositio. Oppositas sectiones A, B, recta linea CD secet; A quidem in C, B verò in D, minimeque ipsa recta CD incedat per X centrum datarum oppositarum sectionum: sitque rectæ CD punctum E medium; & ex illo per centrum X, recta linea EX traducatur tùm per centrum X alia recta linea AXB emissa æquidistans bifariàm sectæ in E, rectæ CD. Dico primò rectam EX esse diametrum quæ vocatur recta, sectionum datarum oppositarum. Secundò dico rectam AXB esse earundem diametrum transuersam, coniugatam prædictæ EX.

Apparatus. Ex puncto D sectionis B transmittatur per X centrum recta DX, producta vltra centrum X, occurret per prop. 29. lib. 1. alteri A sectioni oppositæ, in puncto F, erunt æquales portiones DX, FX, per prop. 30. lib. 1. Insuper puncta C & F, sectionis A, vniantur recta linea CF. Præterea quia in triangulo CDF resultante, duo latera CD, FD, sunt bifariàm secta, illud in E ex datis, hoc in X centro ex probatis; erit per prop. 2. lib. 6. element. recta EX parallela ipsi CF: est autem per lemma 43. lib. 1. recta EX minor quàm CF; ergo recta BXA data parallela ipsi CD, cùm debeat per prop. 11. Procli secare rectam CF parallelam ipsi EX iam sectæ ab dicta BXA, secabit in G puncto ex intermedijs ipsius CF; resultat enim parallelogrammum EXGC, cuius duo latera EX, CG, debent esse æqualia per prop. 34. lib. 1. element. Igitur CG æqualis ipsi EX minori quàm CF, erit etiam minor quàm CF: recta ergo BXA secans in G puncto, rectam CF sitam intra locum sectionis A per prop. 2. & lib. 1. secabit intermediam sectionem A, in aliquo puncto puta A; ideoque per propos. 29. lib. 1. occurret etiam oppositæ sectioni B, in aliquo puncto puta B: & quia transit per centrum X, erit diameter transuersa datarum sectionum oppositarum, per coroll. prop. 51. lib. 1. Porrò resultabunt alia duo triangula DEX, XGF.

Demonstratio. Quià sunt per apparatum, rectæ parallelæ EX, CG, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli æquales EDX, GXF; tùm etiam anguli EXD, GFX, æquales; igitur per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui anguli DEX, XGF, in triangulis DEX, XGF, erunt æquales: ideoq; ipsa triangula, æquiàgula. Quare per 4. prop. lib. 6. ele. erit vt DE ad EX, sic XG ad GF; prima autem DE ac tertia XG, sunt æquales per 1. ax. lib. 1. elem. (quia sunt æquales tertiæ EC, prima quidè DE æqualis ipsi EC ex datis, tertia verò XG æqualis ipsi CE, per prop. 34. lib. 1. elem. in parallelogrammo EXGC.) igitur per prop. 14. lib. 5. elemen. secunda EX erit æqualis quartæ GF: ostendimus autem in apparatu, rectã CG esse æqualem ipsi EX; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. portiones CG, GF, totius rectæ CF, erunt æquales inter se, & idcirco bifariàm diuisa erit recta CF, in puncto G ab diametro BXAG. Quod si concipiamus rectam lineam contingentem sectionem A, in puncto A quod est terminus diametri BXA diuidentis bifariàm in G, rectam CF, hæc contingens recta erit parallela rectæ CF bifariàm sectæ, per propos. 5. ideoque ipsa CF, erit ordinatim applicata diametro BXAG, per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. est autem ostensa recta EX parallela isti rectæ CGF ordinatim applicatæ diametro transuersæ BXAG datarum oppositarum sectionum; ergo etiam per definit. 12. lib. 1. inter primas, ipsa recta EX erit etiam ordinatim applicata dictæ diametro transuersæ BXAG; & quidem in centro X quod diametrum dictam transuersam diuidit bifariàm per definit. 3. lib. 1. inter secundas: ergò per propos. 16. lib. 1. recta EX erit diameter coniugata dictæ transuersæ BXAG: igitur per defin. 17. lib. 1. inter primas diuidet bifariàm rectas omnes lineas parallelæ diametro BXA, constitutas inter datas sectiones oppositas: vnde per def. 15. lib. 1. inter primas, recta diameter erit datarum oppositarum sectionum. abundè ergo demonstrauimus duas assertiones huius propositionis.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Recta omnis linea parallela secanti rectè sectiones oppositas, occurrit ipsis sectionibus oppositis.

Vt enim ducetur ex loco intra vnam sectionem oppositarum; aut ex linea curua vnius illarum; aut ex loco inter illas oppositas. Si primum, occurret ad partes verticis sectionis, lineæ eius curuæ obuiæ; & quia altera extendi potest in infinitum; diuaricatis in infinitum extremis eius iuxta prop. 8. lib. 1. eius lineæ curuæ occurret dicta recta: & propter hanc rationem, in duobus alijs casibus dicta recta linea parallela secanti oppositas sectiones, vtrique occurret, sicuti fuit propositum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Si oppositas ſectiones duæ rectæ contingant, in vnum punctum conuenientes: Quæ ab eo puncto ad medium lineæ tactus coniungentis ducitur; oppositarum ſectionum diameter erit, quæ recta vocatur: tranſuerſa verò ipſi coniugata, quæ per centrum ducitur, lineæ tactus coniungenti æquidiſtans.

SVppoſitio. Sint oppoſitæ ſectiones A, B; quarum vnam A, contingat in puncto vnico C recta linea CX; alteram B contingat in puncto recta linea DX; conueniant verò hæ duæ tangentes in punctum X, quod non erit centrum oppoſitarum ſectionum, per coroll. noſt. ad propoſ. 32. Sitque rectæ lineæ CD vnientis prædicta C, D, puncta contactuum, punctum medium E. Aſſero primò, rectam EX eſſe diametrum datarum ſectionum oppoſitarum, quæ recta vocatur. Aſſero ſecundò tranſuerſam diametrum prædictæ EX coniugatam eſſe rectam lineam AOB tranſeuntem per centrum O datarum ſectionum parallelam ipſi CD coniungenti puncta C, D, contactuum.

Apparatus. Si recta linea EX non ſit diameter recta datarum ſectionum oppoſitarum, ſit ſi fieri poſſit alia EF educta ex puncto E non attingens punctum X concurſus datarum rectarum CX, DX, tangentium, hæc verò recta EF, cùm introducatur diameter recta ſectionum oppoſitarum, neceſſariò tranſibit per centrum ſectionum oppoſitarum, iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. Igitur per prop. 31. lib. 5. elem. ex puncto C ſectionis B, poterimus rectam lineam concipere accommodatam in ſectione B, parallelam ipſi diametro rectæ EF, quæ erit ordinatim applicata diametro coniugatæ ipſi rectæ EF, ex dictis in definitionibus 10. 12. 15. 16. lib. 5. inter primas; hanc verò rectam ordinatim applicatam ſecat recta CX tangens in puncto C; ergo per prop. 51. Procli, eadem recta CX ſecabit rectam EF, puta in puncto F: ex quo ad punctum D recta linea tranſmittatur FD, quæ ſecabit ſectionem A in aliquo alio puncto G diuerſo ab D; (ſi enim non ſecaret in punctis D & G ſectionem A, ipſam tangeret inter tangentem datam DX, & ſectionem A, contra propoſ. 32. lib. 1.) Concipiatur autem diameter tranſuerſa ducta per centrum ſectionum datarum parallela CD, ſecans ſectionem B in B, & ſectionem A in A, parallelaque ipſi CD coniungenti puncta prædicta contactuum rectarum CX, DX, coëuntium in X; hæc ducta ſeu concepta diameter tranſuerſa, non poteſt eſſe recta CD, tranſiret enim per coroll. cit. prop. 51. lib. 1. per centrum ſectionum datarum; & ideo per propoſ. 31. duæ rectæ lineæ CX, DX, eſſent parallelæ, contra data: igitur recta CD non erit diameter tranſuerſa, ſed alia. Denique ex puncto G ſito in linea curua ſectionis, agatur recta linea GH parallela ipſi rectæ CD; hanc ſecabunt in M recta DX; & in I, recta EF; & in K, recta EX; & in L, recta CXF, per prop. 11. Procli; quia ſecant dictæ rectæ lineæ rectam CD parallelam. Hæc autem recta GH vel tranſibit per centrum datarum ſectionum, vel non: quomodocumque ſumatur, concludemus propoſitum: nam ſi tranſeat per centrum, illud erit I punctum, ſectio nimirum communis rectæ diametri EF rectæ introductæ, & tranſuerſæ GH: quod ſi recta GH non ſit diameter tranſuerſa, ſeu non tranſeat per centrum ſectionum, ſit alia AB, parallela ipſi CD, vnde etiam erit parallela rectæ GH per prop. 30. lib. 1. elem. & ſimiliter per prop. 55. Procli, ſecabitur in P, O, N, R, ✱, ab eiſdem rectis CF, EX, EF, DX; & in hoc caſu erit centrum N, ſectionum datarum, in ſectione communi diametrorum EF, introductæ rectæ, & tranſuerſæ poſitæ AB. Verùm aduertendum eſt ex coroll. prop. 31. lib. 1. quod punctum M vel R, ſectionis communis datæ tangentis DX, & tranſuerſæ diametri erit inter centrum I vel N, & ſectionem A; tùm etiam punctum L vel P, ſectionis communis datæ tangentis CX, & tranſuerſæ diametri, erit inter centrum I vel N, & ſectionem B. His paratis ſit

Demonſtratio. In triangulo CFD, quia recta LG eſt parallela lateri DC, & recta FE educta eſt ab angulo CFD, oppoſito lateri CD, ad medium eius punctum E, vbi diuiſa eſt bifariàm; per coroll. noſtrum ad prop. 4. lib. 6. elem. recta LG etiam bifariàm in I ſecta erit ab recta FE: ergo ſi conſtituatur recta GH diameter tranſuerſa ſeu incedens per I centrum, probatum ex poſitione aduerſarij; tota recta GH bifariàm diuiſa erit in I, per prop. 30. lib. 1. ideoque rectæ IG, IH, æquales; quia verò IL, IG, ſunt oſtenſæ æquales; erunt æquales per 1. axiom. lib. 1. elem. IL, IH, totum & pars, contra 8. axioma lib. 1. element. Quod ſi velis rectam AB eſſe diametrum tranſuerſam: ſimili diſcurſu reducemus ad aliud abſurdum, aduerſarios. Quia diameter introducta recta EF incedit per centrum, & ſimiliter tranſuerſa AB, in ſectione communi illarum, puncto nimirum N erit ipſum centrum; quare per propoſ. 51. lib. 1. tota AB diuiſa erit bifariàm N, & rectæ NA, NB, æquales: Et quia in triangulo CFD, baſis CD diuiſa eſt bifariàm in E ex datis, recta PS eſt parallela ipſi

baſi

basi CD, rectâque ex F angulo seu vertice opposito dictæ basi transmissa est ad medium E, dictæ baseos CD; erit per cotoll. nostrum ad prop. 4. lib. 6. elem. recta PS diuisa bifariàm in puncto N: sed recta NS maior est quàm NA, producta nimirum recta NA intra locum sectionis A, vt attingat in S, rectam DG sitam intra locum sectionis A, per prop. 10. lib. 1. ergo per 1. ax. lib. 1. elem. recta NP æqualis ipsi NS maiori quàm NA, maior etiam erit quàm NB æqualis ostensæ ipsi NA: hoc est pars NP, erit maior quàm totum NB, contra 8. ax. lib. 1. elem. Quod NP sit minor quam NB; patet, nam data recta CX, tangens sectionem B, tota procedit extra sectionem producta; igitur cùm secare ostensa sit rectam AB, secabit extra sectionem; inter Centrum & sectionem, si sit diameter transuersa, per coroll. prop. 31. lib. 1. Hæc autem absurda deducta ex positione aduersarij contradicente assertioni primæ huius propositionis, falsa erit: ideoque verum erit quòd recta EX sit diameter quæ vocatur recta datarum sectionum oppositarum. Transibit igitur recta EX per centrum datarum sectionum, per prop. 51. lib. 1. coroll. alia verò recta per hoc centrum ducta parallela datæ rectæ CD vnienti puncta C, D, contactuum, quam ostendimus non incedere per ipsum centrum; ideoque sectiones ipsas oppositas secat non incedens per centrum; erit per propos. præcedent. 37. transuersa & ipsi rectæ probatæ EX coniugata. Quod erat secundò propositum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Recta diameter coniugata transuersæ in sectionibus oppositis procedit per locos angulorum deinceps ad angulos continentes datas sectiones oppositas.

VNit enim per hanc propositionem punctum concursus duarum rectarum contingentium, quod per prop 32. situm est intra locum anguli deinceps continenti sectionem; tum punctum medium rectæ lineæ coniungentis puncta contactuum dictarum contingentium rectarum linearum, ideoque secantis obuias asymptotos & incedentis per alterum angulum deinceps iuxta coroll. 2. ad cit. prop. 32. existit intra locum dicti anguli deinceps, per coroll. nostrum 4. ad prop. 16. Igitur cùm duo ista puncta per quæ transit recta diameter sint intra locum angulosve deinceps prædictos, vnum in vno, alterum in alio, procedet per angulos deinceps ad eos qui continent sectiones datas oppositas.

PROPOSITIO XXXIX.

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ in vnum punctum conuenientes: quæ per punctum illud, & per centrum ducitur, lineam tactus contingentem, bifariàm secabit.

SVppositio. Sectiones A, B, oppositas, duæ rectæ lineæ DE, CE, contingant, prima sectionem B in vnico puncto D, secunda sectionem A in vnico puncto C; conueniantque ambæ in puncto E, quod erit aliud ab centro, per coroll. nostrum ad prop. 32. quodque erit vltra illud centtum, in angulo deinceps ad angulos contioentes datas hyperbolas oppositas, per cit. prop. sitque recta linea CD, vniens dicta puncta C, D, contactuum, quæ non transibit per centrum, alioqui ipsæ rectæ DE, CE, tangentes, datæ concurrere essent parallelæ, per propos. 31. Igitur centrum datarum sectionum sit H punctum: & per illud ex E puncto concursus datarum rectarum tangentium sit emissa recta secans rectam lineam AHB transmissam parallelam rectæ CD, & diametrum transuersam datarum sectionum, quæ ideo per coroll. nost. ad propos. 37. occurret sectionibus datis in B, & A; productaque si opus sit hac recta EH, secabit per 11. propos. Procli, rectam CD in aliquo puncto F. Dico autem hanc EHF diuidere in F, aliam rectam CD vnientem puncta contactuum C, D.

Apparatus. Si recta CD, non diuidatur bifariàm in F, ab recta EHF; poterimus illam diuidere bifariàm in G, per prop. 10. lib. 1. elem. & ducere rectam EG, quæ erit diuersa ab recta EHF.

Demonstratio. Per præcedentem propositionem 38. recta EG erit diameter quæ dicitur recta datarum sectionum oppositarum, & transuersa dictæ EG coniugata, ipsa AHB: igitur ambæ istæ diametri EG, AB, transibunt per centrum datarum sectionum oppositarum, per coroll. prop. 51. lib. 1. quod erit in sectione communi illarum diametrorum puta I, diuersum ab H, per quod incedit recta EHF ex concessis. Recta igitur AB, per prop. 30. lib. 1. bifariàm diuidetur in I puncto, & in alio H, puncto: contra coroll. nost. ad prop. 1. lib. 3. elem. Absurdum hoc indicat positionem contradicentem assertioni huius propositionis, esse falsam, & assertionem veram, videlicet rectam EH productam si opus sit, emissam ex E puncto concursus datarum tangentium CE, DE, per centrum H, diuidere bifariàm in F, rectam CD vnientem prædicta puncta contactuum.

V COROL-

COROLL. NOSTRVM I.

Eisdem positis: recta linea EH per centrum H, & punctum E ducta concursus duarum tangentium rectarum CE, DE; erit diameter recta sectionum oppositarum coniugata transuersæ BHA.

NAm per hanc propositionem secabit bifariàm in F rectam DC coniungentem puncta contactuum: ergo per prop. 38. præcedentem, recta EH erit diameter recta & coniugata transuersæ BHA parallelæ ipsi DC vnienti puncta contactuum.

COROLL. NOSTRVM II.

Eisdem positis: duæ rectæ lineæ EH, FH, in directum erunt.

SI enim ita non sit, producta recta EH vltra H, in partes alias respectu rectæ FH, abibit per ax. 11. lib. 1. elem. secabitque in K verbi gratiâ rectam CD, puncto diuerso ab F, medio demonstrato rectæ CD: sed & per hanc prop. 39. etiam in K puncto diuideretur bifariàm: ergo contra coroll. nost. ad prop. 1. lib. 3. elem. recta linea CD, bis in F & K, bifariàm diuideretur, quod absurdum est, ideoque positio falsa contradicens assertioni huius corollarij, quæ idcirco vera erit.

COROLL. NOSTRVM III.

Eisdem positis: recta linea FH producta vltra centrum H, occurret puncto E.

SI enim non occurrat, sed in L vni tangenti; ducta EH erit in directum rectæ FH, per coroll. nostrum 2. quare duæ rectæ lineæ FHE, FHL, segmentum FH commune obtinebunt, contra 10. axio. lib. 1. elem. positio ergo contradicens huic corollario, falsa erit, & coroll. verum.

PROPOSITIO XL.

Si oppositas sectiones duæ rectæ contingentes in vnum conueniant; & per punctum in quo conueniunt, linea ducatur, tactus coniungenti æquidistans, & sectionibus occurrens: quæ ab occursibus, ad medium lineæ tactus coniungentis ducuntur; sectiones ipsas contingunt.

SVppositio. Oppositas sectiones A, B, contingant duæ rectæ lineæ, CE quidem rectam sectionem A in puncto C, alia verò recta DE, sectionem B in puncto vnico D; sitque recta CD vniens dicta puncta contactuum, quæ non transibit per centrum datarum sectionum, alioqui datæ rectæ CE, DE concurrentes in E, essent parallelæ per prop. 31. sed neque centrum erit in E puncto concursus, per coroll. nost. ad propos. 32. Præterea ex puncto E per prop. 31. lib. 1. elem. ducta sit recta linea FEG æquidistans ipsi CD, & occurrens in F, sectioni A; & in G, sectioni B. Denique ab his punctis F, G, occursuum, ad medium H punctum rectæ CD, reperiendum per prop. 10. lib. 1. elem. transmissæ sint rectæ FH, GH: Dico has rectas FH, GH, sectiones datas contingere in vnico puncto; HF quidem sectionem A in vnico puncto F; rectam verò GH, alteram sectionem B in vnico puncto G.

Apparatus. Per H punctum medium rectæ CD vnientis puncta C & D prædictorum contactuum transmittatur ad E punctum concursus datarum rectarum tangentium, recta linea HE.

Demonstratio. Recta linea HE, erit per prop. 38. diameter quæ recta appellatur datarum sectionum oppositarum; quæque per coroll. prop. 51. lib. 1. incedet per centrum illarum, quod sit exempli gratiâ X, in ipsa HE iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. aliud ab puncto E, & aliud ab puncto H; & iuxta propos. 32. punctum E sit in angulo deinceps ad angulos in X factos & continentes datas hyperbolas oppositas. Si per hoc X punctum seu centrum, concipiatur recta linea seu transuersa diameter AXB parallela dictæ CD vnienti puncta contactuum prædictorum; illa erit coniugata prædictæ rectæ diametro HXE per cit. propos. 38. Cùm igitur recta CHD sit parallela diametro transuersæ AXB coniugatæ ipsi HXE secundæ, & ambæ bifariàm diuidantur ab diametro HXE rectæ seu secundæ; erit per definit. 17. & 16. & 12. lib. 1. inter primas, recta CH ordinatim applicata diametro secundæ HXE; sed & recta CE sectionem A contingere datur, & occurrit in E, secundæ diametro HXE: ergo per prop. 38. lib. 1. rectangulum sub EX, XH, æquale erit quadrato semissis secundæ diametri HXE, hoc est quartæ parti figuræ quæ ad AXB diametrum transuersam coniugatam constituitur. Præterea, quia recta FEG parallela est ipsi CD, erit per def. 12. 16. 17. lib. 1. inter primas, ordinatim applicata ad secundam diametrum XEE, & huic diametro occurrit recta FH in puncto H: ergo per cit. prop. 38. lib. 1. recta FH sectionem A continget in puncto F. Eadem methodo probabitur recta GH, sectionem B contingere. Quare propositum fuerit demonstratum.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Si in oppositis sectionibus, duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum: sese bifariàm non secabunt.

SVppositio. In oppositis A, B, sectionibus, quarum centrum sit H; duæ rectæ lineæ D A, B C, non transeuntes per centrum H, se mutuò secent in E puncto. Dico eas non se mutuò bifariàm intersecare in puncto E.

Apparatus. Esto si fieri possit, se mutuò bifariàm secent in E puncto; Ducanturque rectæ BD, AC; illa intra locum sectionis B erit, ista intra locum sectionis A per prop. 10. lib. 1. tùm singulæ BD, CA, bifariàm diuidantur per prop. 10. lib. 1. elem. illa in F, hæc in G. Imprimis per lem. 7. dictæ duæ rectæ BD, AC, erunt æquales & parallelæ; & rectæ EF, EG, vnicam constituent rectam GEF, per idem lemma 7. quæ ideo per prop. 36. erit diameter datarum sectionum oppositarum; ideoque incedet per H centrum ipsarum, iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. diuersumque ab E puncto ex datis. Igitur ex D puncto sectionis B, recta linea ducta per centrum H, & vlteriùs producta occurret per propos. 29. lib. 1. in K puncto alterius sectionis A, eritque diuersa ab recta DEA. Similiter recta ex B puncto sectionis B per H centrum transmissa & producta vltra H, conueniet in puncto I, sectionis A, eritque diuersa ab recta BEC: nec dici poterit quod hæc terminetur in puncto C; alia verò DHK, terminetur in puncto K; sic enim duæ rectæ lineæ figuram comprehenderent, contra 14. ax. lib. 1. elem. Denique puncta K, I, diuersa, in linea curua sectionis A, vniantur recta linea IK, quæ erit tota intra locum sectionis A, per prop. 10. lib. 1.

Demonstratio. Per prop. 30. lib. 1. duæ rectæ lineæ DHK, BHI, se mutuò bifariàm diuident in puncto H centri; duæque rectæ DB, IK, erunt per lemma 7. æquales & parallelæ; ostendimus autem in apparatu, rectam DB esse æqualem & parallelam rectæ AC, & nunc rectam IK esse æqualem & parallelam ipsi AC; igitur per prop. 30. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ AC, IK, erunt æquales & parallelæ. Producta autem recta CA, secabit in triangulo IHK latera HI, HK, in M & L, per ax. 28. lib. 1. element. quia parallela est basi IK, vel per prop. 11. Procli; est autem per lemma 43. lib. 1. tota recta MCAL minor quàm recta IK; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. recta CA minor quàm recta MCAL, erit multo minor quàm recta IK: inæquales igitur erunt rectæ CA, IK, prius concessæ æquales: pugnantia ergo cùm procedant ex positione contradicente affirmationi propositæ, manifestam faciunt falsitatem positionis, & adstruunt veritatem propositionis.

PROPOSITIO XLII.

Si in oppositis sectionibus quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non transeuntes per centrum: bifariàm sese non secabunt.

SVppositio. Sint sectiones oppositæ coniugatæ, A, B, C, D, centrumque ipsarum X; & in eis duæ rectæ lineæ EF, GH, se mutuò decussent in puncto K, extra centrum X. Dico se bifariàm non intersecare in puncto K.

Apparatus. Esto si fieri possit, se mutuò bifariàm intersecent in puncto K, quod non est centrum sed X: & per prop. 31. lib. 1. element. per centrum X agatur diameter transuersa AXB duarum oppositarum sectionum A, B, parallela ipsi EKF, occurrenti dictis sectionibus A, B, oppositis: tùm alia recta CXD, per idem centrum X, diameter transuersa aliarum duarum oppositarum sectionum C, D, parallela ipsi GKH occurrenti in G & H, dictis sectionibus oppositis C, D.

Demonstratio. Erunt per prop. 37. rectæ lineæ KX ducenda, & AXB, ducta, diametri coniugatæ sectionum oppositarum A, B. Quod si fingamus animo rectam lineam contingentem sectionem A in puncto A, ipsa erit per prop. 5. parallela diametro KX, bifariàm sectæ in centro X per propos. 29. lib. 1. Similiter si concipiamus animo aliam rectam lineam contingentem in C, sectionem C, erit per cit. propos. parallela ipsi KX bifariàm sectæ in centro X, si producatur vtrimque. igitur per prop. 30. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ contingentes in C & A, sectiones A & C, erunt parallelæ inter se, contra prop. 21. conueniunt enim in eodem puncto vnius asymptoti datarum sectionum coniugatarum. Absurdum hoc proueniens ex positione contradicente huic propositioni, indicat positionem esse falsam, & propositionem adstruit. Et sic demonstrata erit.

PROPOSITIO XLIII.

Si vnam oppositarum sectionum, quæ coniugatæ appellantur, recta linea in duobus punctis secet; & à centro duæ rectæ lineæ ducantur, vna quidem ad medium lineæ secantis, altera verò ipsi

rò ipsi æquidistans: erunt hæ oppositarum sectionum coniugatæ diametri.

SVppositio. Oppositarum sectionum coniugatarum A, B, C, D, vnam A, secet recta linea E F duobus in punctis E, F; & ab centro X illarum, recta linea X G deducta sit ad medium punctum G, rectæ EF; tùm alia recta XC deducta ex eodem centro X parallela ipsi E F: manifestum est per coroll. prop. 51. lib. 1. ipsas esse diametros sectionum oppositarum; itaque recta GX producta vltra X perueniet in B puncto sectionis A, sictæ in puncto A; & rectam CX productam vltra X, occurrere sectionibus oppositis C, D, vni in C, alteri in D, per propos. 29. lib. 1. Dico autem rectas AXB, CXD esse coniugatas diametros datarum sectionum oppositarum coniugatarum.

Demonstratio. Quia recta linea AXB est diameter sectionum oppositarum A, B, lineamque rectam E F intra locum sectionis A accommodatam, bifariàm in G secat: recta linea concepta contingere sectionem A in puncto A, erit per propos. 5. parallela ipsi rectæ EF; ergo per prop. 30. lib. 1. elem. recta illa contingens erit parallela rectæ CXD. Iam verò quia sunt datæ sectiones oppositæ coniugatæ, vnamque illarum A recta quædam linea contingit in A; & ab centro X duas habemus rectas lineas, vnam XA ad punctum A contactus prædicti, alteram verò XC parallelam ipsi contingenti prædictæ: erunt per prop. 20. duæ rectæ lineæ BXA, CXD, diametri coniugatæ datarum sectionum oppositarum coniugatarum, quomodo fuit propositum.

PROPOSITIO XLIV.

Data coni sectione, diametrum inuenire.

APparatus. Ducatur in data coni sectione, quæcumque recta linea eius curuam lineam secans duobus in punctis: tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex quocumque alio puncto sito intra locum sectionis, agatur recta linea parallela prædictæ secanti; hæc per coroll. nost. ad propos. 18. lib. 1. occurret producta vtrimque, duobus in punctis lineæ curuæ ipsius sectionis, ex vna parte vni puncto, ex altera alteri. Tùm singulæ istæ duæ lineæ bifariàm diuidantur per prop. 10. lib. 1. elem. & puncta media coniungantur recta linea. Dico hanc rectam esse diametrum sectionis coni.

Demonstratio. Per prop. 28. hæc recta linea vniens prædicta media puncta duarum rectarum accommodatarum in sectione, erit diameter illius. Atque ita fecerimus imperatum.

Hæc praxis conuenit etiam circulo; nam prop. 28. citata, comprehendit etiam circulum. Quod si demonstrationem aliam desideres in circulo dependentem solùm ab primis Geometriæ elementis; consule illam quam attulimus particularem, in propositione 28.

PROPOSITIO XLV.

Data Ellipsi, vel Hyperbolâ, centrum inuenire.

APparatus pro ellipsi. Per propositionem 44. præcedentem, reperiatur diameter ellipseos; & per prop. 10. lib. 1. ele hæc diameter bifariàm diuidatur. Dico quod punctum medium huius diametri terminatæ vtrimque in circumferentia ellipseos, sit centrum illius.

Demonstratio in ellipsi. Quandoquidem per def. 1. lib. 1. inter secundas, punctum quod ellipseos diametrum bifariàm diuidit, est eius centrum; & diametrum datæ ellipseos bifariàm diuiserimus in vno puncto: hoc erit per citatam definitionem, centrum inuentum datæ ellipseos.

Apparatus in Hyperbola. Per prop. 44. præcedentem, reperiantur duæ distinctæ diametri Hyperboles datæ; quæ diametri duæ cùm non sint parallelæ, per coroll. nost. 6. ad propos. 27. lib. 1. si producantur, concurrent ex vna parte ad vnum punctum, extra locum datæ Hyperboles iuxta coroll. nost. 4. ad cit. propos. 27. Hoc verò punctum, assero esse centrum Hyperboles datæ.

Demonstratio. Per coroll. prop. 51. lib. 1. rectæ omnes lineæ per centrum Hyperboles transeuntes sunt diametri eius: ergo duæ diametri diuersæ se mutuò intersecantes inuentæ in Hyperbola incedent per centrum eius. Iam verò vel centrum Hyperboles datæ, erit punctum inuentum, videlicet intersectio duarum eius diametrorum; vel aliud punctum diuersum. Si secundum, diametri inuentæ per illud incedent, singulæ; verùm in alio puncto se intersecant: igitur istæ duæ diametri cùm sint duæ rectæ lineæ diuersæ mutuo se intersecantes, vel segmentum habebunt commune inter duo dicta diuersa puncta, vel spatium concludent: primum est contra 10. ax. secundum contra 14. lib. 1. elem. igitur nullum aliud centrum constitui poterit in Hyperbola, præter punctum intersectionis duarum eius diametrorum. Igitur in Hyperbola & ellipsi centrum reperimus, & rectè inuentum esse ostendimus.

COROL-

COROLL. NOSTRVM I.

In datis oppositis sectionibus centrum inuenire, & diametrum transuersam.

Apparatus. Per hanc prop. 45. vnius Hyperbolarum è duabus datis oppositis, centrum reperiatur: & per prop. 44. diameter eiusdem reperiatur. Dico hoc centrum repertum, & diametrum repertam, esse centrum & diametrum datarum oppositarum sectionum.

Demonstratio. Ostendimus enim in definitione 3. lib. 1. inter secundas, centrum esse commune, & per proposit. 14. lib. 1. diameter transuersa est communis sectionibus oppositis; quæ sunt singulæ Hyperbolæ: ergo reperto centro & diametro vnius illarum, illa erunt ambarum propria proposita.

COROLL. NOSTRVM II.

Ellipseos est vnicum centrum in eius area.

Sint, si fieri possit, duo centra in ellipsi, in eius areä. poterimus recta linea vnire duo illa puncta seu centra, quæ per axio. 28. lib. 1. element. producta vtrimque terminabitur in duobus punctis circumferentiæ illius: Igitur per prop. 30. lib. 1. recta linea ista, bifariàm diuidetur in duobus illis centris seu punctis diuersis ac diffitis, contra coroll. nost. ad prop. 14. lib. 3. elem. hoc absurdum indicat positionem esse falsam, & propositum verum.

COROLL. NOSTRVM III.

In Parabola nullum est centrum in quo se mutuò secent diametri eius.

Nam per coroll. nost. 3. ad prop. 27. lib. 1. constat diametros omnes Parabolæ esse parallelas rectas lineas; quæ, quia ex natura sua se mutuò interfecare non possunt, diametri Parabolæ se mutuò non secabunt in aliquo puncto: quare nullum centrum obtinebit Parabola in quo se mutuò secent, diametri eius.

COROLL. NOSTRVM IV.

Rectè Apollonius non proponit centrum inueniendum in Parabola, sicuti in Ellipsi, & Hyperbola; in quo se mutuò secent diametri eius.

Quia in præcedente nostro corollario demonstrauimus nullum esse huiusmodi centrum in Parabola.

COROLL. NOSTRVM V.

In Hyperbola vnicum est centrum.

Hoc probauimus in demonstratione ad hanc Authoris propositionem quadragesimam quintam.

COROLL. NOSTRVM VI.

Apollonius non proponit centrum in circulo reperiendum.

Hoc manifestum est: & quidem prudenter supponit hoc ex prima propositione lib. 3. elem.

PROPOSITIO XLVI.

Data Coni sectione, quæ Parabola vocatur: axem inuenire.

Apparatus. Per prop. 44. Parabolæ datæ diameter eius aliqua AB reperiatur: ad quam per prop. 11. lib. 1. elem. ponatur recta linea FBE perpendicularis, ex puncto eius aliquo B intra locum ipsius sito: hæc recta linea FBE, quandoquidem angulum rectum constituit cum recta AB, secabit ipsam producta; ideoque per prop. 27. lib. 1. occurret duobus in punctis F, E, lineæ curuæ Paraboles. Porrò hæc chorda FE, bifariàm diuidatur in puncto D, per prop. 10. lib. 1. elem. & per cit. prop. 11. eiusdem libri ex puncto D erigatur versus verticem Paraboles, recta linea DC ad angulos rectos ipsi FE rectæ; producta autem recta DC versus verticem, occurret in C puncto lineæ curuæ Paraboles per axio. 28. lib. 1. elem. Dico autem rectam hanc DC, esse axem quæsitum Paraboles propositæ. Quod si punctum medium chordæ FE, fuerit punctum B: tunc dico rectam AB esse axem quæsitum.

Demonstratio, Posito quod recta DC sit diuersa ab BA. Est per apparatum recta AB diameter Parabolæ; suntque duæ rectæ BA, DC, ad angulos rectos eidem rectæ EF; ergo per prop. 28. lib. 1. elem. erunt parallelæ inuicem rectæ BA, DC: igitur per proposi. 26. lib. 1. recta linea DC parallela diametro BA in parabola, secabit in vnico tantùm puncto C, lineam curuam Paraboles, etiam si in infinitum producatur vtrimque: ergo per coroll. nost. 5. ad prop. 46. lib. 1. recta linea DC erit diameter altera datæ Paraboles. Porrò per prop. 31. lib. 1. element. ex infinitis punctis diametri DC, educantur rectæ lineæ intra locum Paraboles parallelæ ipsi chordæ FDE, has secabit omnes diameter DC secans in D rectam FE, per prop. 11. Procli; quæ omnes ducen-

dæ lineæ occurrent duobus in punctis lineæ curuæ paraboles per prop. 27. lib. 1. Sed & has omnes ductas parallelas diameter DC secabit ad angulos rectos per coroll. nost. 2. ad prop. 29. lib. 1. elemen. Instar omnium duximus rectam GH parallelam ipsi FE, quæ vti diximus secabitur in I puncto ad angulos rectos ab diametro DC, eritque terminata in G & H duobus punctis lineæ curuæ Paraboles. Nunc verò probare nos oportet diuisam esse bifariàm rectam GH in I ab diametro DC; sic enim probabuntur ex eisdem principijs alias omnes prædictæ rectæ lineæ parallelæ ipsi FE, diuisas esse bifariàm ab diametro eadem DC. Esto si fieri possit recta GH non sit diuisa bifariàm in puncto I, ab diametro DC; tunc per prop. 10. lib. 1. elem. diuidere poterimus ipsam chordam GH, bifariàm in puncto K, & ducere rectam DK, per puncta media D, K, rectarum chordarum parallelarum FE, GH. Iam verò per prop. 28. recta linea DK erit diameter Parabolæ datæ, & etiam ostensa est diameter eiusdem Parabolæ recta DC; ergo diametri DC, DK, conuenient in puncto D, & non erunt parallelæ, contra coroll. nostrum 3. ad prop. 27. lib. 1. hoc absurdum consequens ad positionem quod recta DC non secet bifariàm in I, rectam GH, falsa erit; & sic probauerimus secare ipsam bifariàm, & reliquas omnes huiusmodi chordas parallelas chordæ FE. Igitur per def. 18. lib. 1. inter primas, recta DC erit axis Parabolæ datæ. Quod si recta BA sit eadem quæ DC, eodem modo ex eisdem principijs probabitur esse axis datæ Parabolæ.

COROLL. NOSTRVM I.

In Parabola, si vna eius diameter secet bifariàm & ad angulos rectos, rectam chordam in ea ductam; secabit bifariàm, & ad angulos rectos, rectas omnes eius chordas parallelas prædictæ; eritque eius axis.

HOc enim demonstrauimus in diametro DC, secante bifariàm, & ad angulos rectos, chordam FE, & eius omnes chordas parallelas ipsi FE, qualis est instar omnium chorda GH.

COROLL. NOSTRVM II.

In Parabola, si vna eius diameter est perpendicularis duabus eius chordis parallelis, easque diuidit bifariàm: reliquas etiam omnes parallelas eius chordas ipsis, secabit bifariàm, & ad angulos rectos; eritque axis ipsius Parabolæ.

HOc manifestum est ex corollario præcedente primo.

PROPOSITIO XLVII.

Data Hyperbola, vel Ellipsi axem inuenire.

APparatus, pro reperiendo axe in Hyperbola. Per prop. 45. reperiatur punctum K quod sit centrum Hyperboles datæ, sumatur in linea curua Hyperboles aliquod punctum E, per quod ex centro K ad F aliquod punctum intra locum Hyperboles agatur recta linea KEF, quæ erit diameter ipsius Hyperboles per coroll. prop. 51. lib. 1. & secabit in E obuiam curuam lineam Hyperboles: tùm in centro K fiat aliquis angulus GKH abduabus KG, KH, rectis lineis quæ sint asymptoti propriè dictæ, vel impropriè, datæ Hyperboles; fianque per prop. 3. lib. 1. element. rectæ KG, KH, æquales ipsi KF; puncta G & H, erunt extra hyperbolen, sicuti sunt totæ ipsæ KG, KH; & centro K, interuallo rectæ KG, describatur circulus, cuius circumferentia transibit iuxta 25. axio. lib. 1. elem. per puncta alia F, & H, ideoque secabit obuiam lineam curuam Hyperboles in puncto A, antequam veniat ad punctum F, iterumque eandem in alio puncto C, priusquam attingat punctum H externum: nam linea curua ipsa in infinitum extendi potest versus partes inferiores, iuxta prop. 8. cit. lib. 1. Præterea puncta A & C, vniantur recta linea AC, quæ per prop. 10. lib. 5. tota erit intra aream datæ Hyperboles, eritque chorda eius. Tùm per prop. 10. lib. 1. elem. hæc chorda AC, bifariàm in D diuidatur; ex quo puncto D, recta linea ad K centrum transmittatur; tùm aliæ rectæ agantur KA, KC. Notandum verò est rectam KD, prouenientem ex puncto K seu centro quod extra Hyperbolam est, & terminatam in puncto D quod situm est intra locum Hyperboles, cùm sit punctum medium rectæ AC probatæ existere intra Hyperbolam; secare obuiam lineam curuam Hyperboles in puncto B. Quod si ex omnibus punctis rectæ BD, educantur rectæ lineæ parallelæ ipsi AC, secabuntur omnes ab recta KBD, per prop. 11. Procli, & secabunt in duobus punctis lineam curuam Hyperboles, iuxta 28. lib. 1. elem. Dico autem rectam KBD, esse axem Hyperboles transuersum: rectum verò seu coniugatam diametrum ipsi diametro KBD, esse rectam lineam MKN perpendicularem ipsi BKD in centro K.

Demonstratio in Hyperbola. Imprimis recta KBD, educta è centro K, secansque in B lineam curuam Hyperboles; erit per coroll. propos. 51. lib. 1. diameter ipsius Hyperboles. Iam verò consideremus triangula tria resultantia ex apparatu, AKC, KDA, KDC. Quia rectæ KA, KC, sunt æquales per def. 15. lib.

lib.1. elem. triangulum AKC, erit isosceles; ideoque eius anguli KAC, KCA, ad basim AC, erunt per prop.5.lib.1.elem. æquales inter se. Quia verò ab vertice K dicti trianguli isoscelis, deducta est recta KD, ad medium D punctum, baseos AC illius; erit recta KD ad angulos rectos ipsi AC basi, per coroll. nostrum 1. ad propos.32. lib.1. elem. Porrò quia rectæ omnes aliæ lineæ acommodatæ intra hanc Hyperbolam commemoratæ sunt parallelæ ipsi AC sectæ ad angulos rectos in D, quas secat eadem diameter KBD, eodem modo secabuntur ad angulos rectos ab eadem diametro KBD, idque per coroll. nost.2. ad propos.29. lib.1. elemenr. probabimus autem easdem secari bifariàm ab eadem diametro BDD: si enim non secentur bifariàm in punctis sectionum communium illarum & dictę diametri, poterimus diuidere illas bifariàm per propos.10 lib.1. element. & accipiendo punctum medium vnius, & coniungendo illud cum D puncto medio chordæ AC, hæc recta linea erit per 28. propos. diameter Hyperboles; est autem probata recta KBD, etiam diameter illius; ergo duæ diametri eiusdem Hyperboles se mutuò secabunt intra ipsam, contra coroll. nostrum 5. ad prop.27. lib. 1. ergo omnes illæ chordæ erunt per defin. 10. & 12. lib.1. inter primas ordinatim applicatæ ad diametrum KBD, datæ Hyperboles. Porrò si ex alijs omnibus punctis diametri KBD productæ infra D, sitis infra rectam ADC ordinatim applicatam ipsi diametro KBD, agantur aliæ rectæ lineæ parallelæ ipsi AC, occurrent ex vtraque parte lineæ curuæ Hyperboles per propos. 19. lib. 1. & simili modo ostendentur bifariàm sectæ & ad angulos ab diametro KBD productâ, sicuti probauimus de alijs rectis parallelis seu chordis supra rectam AC transmissis. Igitur diameter KBD, secans ad angulos rectos, chordas omnes rectas parallelas ipsi AC, & bifariàm; ipsa diameter KBD, erit axis transuersus Hyperboles per def.18. lib.1. inter primas. Quod si oporteat in sectionibus oppositis B & I, axes coniugatos reperire. Vnius puta B reperiatur axis transuersus IKB per hanc prop. & per prop.11. lib.1. elem. ex centro K excitetur perpendicularis recta MKN, ipsi transuerso IKB; hæc recta MKN erit per coroll. nostrum ad defin.18. lib.1. inter primas, coniugatus axis transuerso IKB.

Apparatus in ellipsi. Quandoquidem per coroll. nost. ad proposit.30. lib.1. constat dari duas diametros inæquales, quæ per coroll. propos.51. 1.lib. incedere debent per centrum eius. Reperiendo per prop.45. centrum K, datæ ellipseos; de maioribus semidiametris sumere poterimus per 3. prop. lib 1. element. ex centro K, rectas lineas æquales semidiametro minori, quæ minores erunt quàm semidiametri maioris; nam per prop.15.lib.5.element. vt diameter maior ad minorem diametrum, ita semissis maioris ad semissem minoris; prima autem ostensa est in coroll. citato nostro ad prop.30. lib.1. maior, quàm secunda; ergo per coroll. nost.2. ad propos.14.lib.5. elem. semidiameter maioris erit semidiametro minoris maior: (sumuntur autem semidiametri ab centro ad circumferentiam ellipseos, in quo centro bifariàm diuiduntur per ipsam prop. 30. rectæ omnes chordæ ellipseos incedentes per centrum, veluti diametri iuxta coroll. propos.51. lib.1.) Ergo extrema puncta portionum sumptarum ab centro in semidiametris maioribus, æquales minori semidiametro, erunt in area ellipseos in ipsis semidiametris maioribus inter verticem eius & centrum. Insuper per propos.10. lib.1. elem. portiones singulæ duæ maioris diametri inter eius vertices, & prædicta extrema notata in semidiametris eius, bifariàm diuidantur, & per prop. 3. lib.1. elem. de diametro minore vtrimque producto vltra suos terminos sitos in circumferentia ellipseos, sumantur ex centro K duæ rectæ lineæ, vna ex vna parte, alia ex altera, æquales portioni vni semidiametri maioris sitæ inter centrum K, & postremum punctum notatum; extrema harum rectarum ab centro erunt extra aream & circumferentiam ellipseos. Igitur circumferentia circuli centro K descripti interuallo portionis vnius semidiametri maioris inter centrum K & punctum vltimo loco signatum situmque intra aream ellipseos, transibit per alia extrema duo signata in diametro minore producta, quæ sunt extra aream & lineam curuam ellipseos, & per aliud punctum notatum vltimum in alia semidiametro maiore, per axiom.25. lib. 1. elem. eò quòd rectæ terminatæ centro K, & prædictis punctis, sint æquales; verùm opus erit necessariò vt incipiendo circumferentia circuli ab puncto interiore, vt incedendo per alterum punctorum exteriorum, infringat in vno puncto circumferentiam ellipseos; & vlteriùs progrediendo, vt perueniat ad aliud punctum interius; iterum secet circumferentiam ellipseos in alio puncto secundo, ingrediendo; iterumque vt attingat aliud punctum exterius, egrediendo secet circumferentiam ellipseos in tertio puncto; denique vt tandem redeat ad primum punctum interius vnde cœpit, denuò ingrediatur & occurrat alteri puncto quarto circumferentiæ ellipseos. Sed nos non egemus illis omnibus punctis quatuor O, L, C, A, sed solùm duobus, exempli gratiâ A, C, quæ recta linea AC vniemus, eamque per prop.10. lib.1. elem. bifariàm diuidemus in D puncto, ex quo ad centrum K rectam lineam extendemus & producemus vtrimque, quæque per ax. 28. lib.1. elem. attinget in E & F, circumferentiam ellipseos; eritque tota ista linea diameter eius per coroll. propos.51. lib.1. quia per centrum K progreditur; deducendo autem ex centro K, duas rectas KA, KC, habe-

bimus triangulum isosceles AKC, ob latera KA, KC æqualia, ex natura circuli declarata in def. 15. lib. 1. elem. quare per prop. 5. lib. 1. elem. anguli KAC, KCA, erunt æquales, in basi AC. Considerando autem duo alia triangula resultantia KDA, KDC; quia duo latera obtinent KA, AD, respectiuè æqualia duobus lateribus KC, CD, suntque eorum anguli contenti ab prædictis lateribus respectiuè æqualibus ostensi æquales, habebunt angulos deinceps ad D æquales per 4. propos. lib. 1. elem. ideoque recti ambo anguli deinceps, per 10. defin. lib. 1. elem. ideoque per eandem def. diameter EKDF ellipseos erit ad angulos rectos ipsi rectæ AC, seu AC chordæ ellipseos datæ. Quod si ex innumeris punctis diametri EKF prædictæ, inter quæ sit centrum K, ducte rectæ lineæ intelligantur parallelæ chordæ ellipseos AC, per propos. 31. lib. 1. secabunt ipsam diametrum per prop. 11. Procli, & per coroll. nost. 1. ad propofit. 18. lib. 1. vtrimque occurrent circumferentiæ ellipseos, eruntque chordæ illius: sed inter has manifestam duco rectam MKN per centrum K, quæ erit diameter datæ ellipseos, iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. & aliam rectam chordam huiusmodi BG, de qua & alia AC quidquid dixerimus, applicari debent alijs animo ductis. Probo autem diametrum EKF diuidantem bifariàm & ad angulos rectos chordam AC, diuidere etiam bifariàm & ad angulos rectos alteram BC ipsi parallelam. Imprimis per coroll. nostrum 2. ad prop. 29. lib. 1. element. diameter EKDF, est ad angulos rectos ipsi BG in puncto I, sicuti est ad angulos rectos in D, parallelæ AC alteri. Quod si ipsa diameter EKF, non secet bifariàm in I rectam BG, sicuti secat bifariàm rectam AC in D; poterimus per prop. 10. lib. 1. elem. diuidere bifariàm in H puncto diuerso ac dissito ab I altero puncto, rectam BG; & per hæc puncta D & H, media rectarum AC, BG, chordarum ellipseos, parallelarum, rectam lineam HD transmittere; quæ erit per prop. 28. diameter ellipseos; itaque producta transibit per centrum K, iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. sed non potest transire per illud K punctum, exeundo ex puncto H, nisi congruat eius pars inter puncta D & K, cum parte diametri alterius EKDF, inter ipsa D & K; vel non congruat: si primum, duæ rectæ lineæ obtinebunt segmentum commune DK; si secundum duæ rectæ lineæ spatium continebunt: primum repugnat axiomati 10. secundum decimoquarto lib. 1. elemen. hæc absurda indicant non posse dici rectam BG sectam ad angulos rectos in I ab diametro EKIF, parallelam chordæ alteri AC, quod non diuidatur in I, bifariàm ab eadem diametro EKF: & sic de alijs omnibus rectis chordis in ellipsi ductis parallelis chordæ AC, bifariàm & ad angulos rectos diuisæ ab diametro EKF in puncto D: diuidentur igitur omnes huiusmodi rectæ chordæ bifariàm & ad angulos rectos ab diametro EF, parallelæ ipsi AC chordæ diuisæ bifariàm & ad angulos rectos in D ab eadem diametro EF. Quoad rectam chordam MKN, attinet quæ est etiam diameter probata in ellipsi; quia transit per centrum eius K, bifariàm diuidetur per prop. 30. lib. 1. in illo puncto centri, ab eadem alia diametro EKF: quod verò sit ipsi MKG perpendicularis alia diameter EKF, repeto demonstrationem implicitè allatam; cùm sit parallela posita chordæ AC, cui est ad angulos rectos diameter EKF, in D, demonstrata; erit etiam ad angulos rectos in K centro, diametro MKN, eadem diameter alia EKF, per 2. coroll. nostrum ad prop. 29. lib. 1. elem. Dico autem rectam EKF esse axem datæ ellipseos, & alium axem ei coniugatum esse rectam MKN.

Demonstratio. Imprimis recta EKF est diameter ostensa ellipseos; & probata secare bifariàm & ad angulos rectos, chordas omnes in illa sectione accommodatas parallelas chordæ AC; ergo erit per defin. 18. lib. 1. inter primas, axis ellipseos datæ. Et quia recta MKN est etiam per apparatum diameter in ellipsi; estque parallela prædictis omnibus chordis sectis bifariàm & ad angulos rectos ab axe EKF; erit per defin. 19. lib. 1. eiusdem 1. inter primas axis coniugatus prædicto EKF. Reperimus ergo axes coniugatos in ellipsi.

Quod si tam in Hyperbolis oppositis, quàm ellipsi; ex eo quòd recta KD sit demonstrata axis, non sequi diametrum MKN parallelam chordis omnibus bifariàm & ad angulos rectos diuisis ab axe KD; ipsam diametrum MKN esse axem coniugatum axi KD, licet ipsa sit ad angulos rectos diuisa ab axe KD: nam def. 19. citata, videtur inuoluere, vt etiam demonstretur rectas omnes chordas in ellipsi & hyperbolis oppositis parallelas axi KD, diuidi ab diametro MKN bifariàm & ad angulos rectos.

Sed contrà. Esto si fieri possit, alia diameter diuersa ab MKN, axis coniugatus. hæc diameter diuersa introducta, nihilominus secari ad angulos rectos debet ab axe KD: igitur sequetur vt duo anguli recti rectilinei qui debent esse æquales inter se, per 12. axio. lib. 1. sint inæquales, vnus enim continebit alterum. hoc absurdum condemnat cauillationem introductam ab aduersario, & confirmat in veritate discursum ac demonstrationem allatam in hac propositione. Ex quibus sequitur pro intellectu definitionis 19. lib. 1. inter primas, satis esse vt duæ diametri in sectionibus oppositis & ellipsi, & circulo, sint axes coniugati; si vna earum probetur secare bifariàm & ad angulos rectos rectas omnes chordas parallelas alteri datæ diametro, quæ erit alter axis coniugatus prædicto: licet ostendi possit quod hæc alia diameter, secet etiam bifariàm & ad angulos

gulos rectos chordas omnes alteri parallelas. Hoc verò reponemus seorsim tanquam corollarium, in numero septimo corollariorum nostrorum sequentium: & sic repetiuimus idem quod docueramus in fine declarationis decimænonæ definitionis citatæ lib. 1. inter primas.

COROLL. NOSTRVM I.

In Hyperbola, & sectionibus oppositis, & Ellipsi: si diameter vna sit perpendicularis duabus rectis lineis parallelis intra ipsas sectiones accommodatis; easque secet bifariam. Erit etiam perpendicularis reliquis omnibus chordis parallelis prædictis; easque secabit bifariàm; eritque axis datæ sectionis.

HOc enim demonstrauimus in diametro KD secante bifariàm & ad angulos rectos AC, & aliam ipsi parallelam chordam; & reliquas omnes ipsi parallelas intra diuidere bifariàm & ad angulos rectos; & esse axem.

COROLL. NOSTRVM II.

In Parabola, Hyperbola, Ellipsi, & oppositis sectionibus; si vna recta in eis accommodata sit perpendicularis axi proprio: bifariàm secabitur ab axe illo.

IN Parabola FCE, sit eius axis CD qui est etiam diameter eiusdem Parabolæ, iuxta def. 18. lib. 1. inter primas; sitque ad angulos rectos in D, chorda FDE: si non sit secta bifariàm in D ab axe CD; poterimus illam diuidere bifariàm in puncto A, per prop. 10. lib. 1. element. & concipere rectam lineam aliam GH, seu chordam, ordinatim applicatam dicto axi CD, quæ secabitur ab illo bifariàm in I, & ad angulos rectos, per citā definit. 18. quare per prop. 28. lib. 1. element. erunt parallelæ rectæ chordæ FE, GH. Ducta autem recta AI, erit per prop. 28. diameter Parabolæ: sed secat aliam diametrum CD in puncto I: contra coroll. nost. 3. ad prop. 27. in quo demonstrauimus esse parallelas. absurdum hoc accusat falsitatis positionem rectæ FDE non diuisæ bifariàm in D ab axe CD perpendiculari ipsi FDE in D: secta igitur erit bifariàm in D, sicuti asserit corollarium.

In reliquis sectionibus poterimus ducere per centrum proprium earum, axem coniugatum dato, per hanc propositionem 47. qui erit angulos rectos ipsi dato; quare data recta erit parallela ipsi axi coniugata per prop. 28. lib. 1. elem. Ergo per def. 18. & 10. & 12. lib. 1. inter primas, secabit bifariàm datam chordam cui est perpendicularis axis datus. Sed in Hyperbola oportebit applicare discursum factum in allata demonstratione huius corollarij; & sequetur ex positione aduersarij rectam AI diametrum Hyperboles secare aliam CD, in puncto I, siro intra locum ipsius Hyperboles, contra coroll. nost. 3. ad prop. 27. lib. 1. quod cum sit absurdum, positio vnde procedit falsa erit, & assertio corollarij vera.

COROLL. NOSTRVM III.

In omni sectione coni; si vna chorda secta sit ad rectos angulos ab axe proprio: rectæ omnes chorda in eadem sectione parallela prædictæ, diuidentur bifariàm & ad angulos rectos ab eodem axe; eruntque ordinatim applicatæ ad ipsum.

IMprimis rectæ omnes chordæ secabuntur ab obuio axe dato, & ad angulos rectos per 2. coroll. nost. ad prop. 29. lib. 1. element. quandoquidem est perpendicularis datæ chordæ cui sunt parallelæ reliquæ: Igitur per coroll. nostrum 2. præcedens, singulæ secabuntur ab axe dato, bifariàm: ideoque per def. 1 a. lib. 1. inter primas, erunt ordinatim applicatæ dato axi prædicto.

COROLL. NOSTRVM IV.

In omni sectione coni, si vna recta chorda intra sectionem propriam secetur ad angulos rectos ab axe proprio: erit ordinatim applicata ad ipsum axem sectionis.

PEr coroll. nostrum 2. etiam data chorda bifariàm secabitur ab ipso axe. Quod si concipiamus animo infinitas alias chordas in eadem sectione parallelas prædictæ, erunt omnes illæ & data ordinatim applicatæ eidem axi per coroll. nost. præcedens 3. igitur data erit ordinatim applicata axi proprio.

COROLL. NOSTRVM V.

Si recta linea sectionem coni contingat in vnico puncto, quod sit extremum diametri eius vel transuersi lateris: recta linea ex quocumque puncto huius diametri producenda si opus sit, intra locum sectionis, parallela prædictæ tangenti; erit ordinatim applicata ipsi diametro.

HÆc recta linea parallela posita tangenti, secabitur ab diametro data sicuti secatur tangens data, per 11. prop. Proclij & per prop. 30. lib. 1. terminabitur vtrimque in sectionis datæ linea curua. Quod si hæc corda non sit ordinatim applicata datæ diametro; poterimus concipere per idem punctum diametri rectam lineam ipsi diametro ordinatim applicatam; nam diameter huiusmodi ex natura diametri sectionum conicarum, respicit rectas lineas ordinatim sibi applicatas, iuxta def. 10. & 12. lib. 1. inter primas. hæc autem recta linea ordinatim applicata erit diuersa ab prædicta parallela, alioqui consequeremur intentum. Iam verò per prop. 31. lib. 1. elem. ab eodem

dem extremo datæ diametri, iu quo contingere ſectionem data eſt recta, poterimus emittere rectam lineam æquidiſtantem ordinatim applicatæ conceptæ, quæ per propoſ.17. lib.1. continget iu hoc vnico puncto ſectionem. Hęc verò ducta recta contingens erit eadem atque data, vel diuerſa: ſi eadem, concepta recta ordinatim applicata, ſecans datam parallelam datæ tangenti, erit per prop.30. lib.1. elemen. parallela datæ & ſectæ ab illa, quod repugnat: ſi diuerſa, inter tangentem rectam vnam, & ſectionem contactam ab illa, altera recta linea cadet, contra prop.35.lib.1. hæc abſurda indicant datam rectam parallelam rectæ tangenti non poſſe dici quod nou ſit ordiuatim applicata datæ diametro: igitur erit ordinatim applicata. quod erat demonſtrandum.

COROLL. NOSTRVM VI.

In omni ſectione coni, ſi vni rectæ ordinatim applicatæ diametro ſectionis propriæ, altera recta linea parallela accommodetur in eadem ſectione: erit etiam ordinatim applicata ad eandem diametrum.

SI enim per prop.31. lib.1. elem. per extremum diametri ſectionis ſitum in linea curua ipſius ſectionis, agatur recta linea parallela datæ ordiuatim applicatæ diametro prędictæ; hæc recta linea poſita continget iu illo extremo ſectionem per prop. 17. lib. 1. eritque per prop.30. lib.1. elem. parallela rectæ lineæ accommodatæ parallelæ ipſi ordinatim applicatæ datæ; igitur per præcedens coroll. noſt. 5. erit accommodata recta, ordinatim applicata eidem diametro datæ.

COROLL. NOSTRVM VII.

In oppoſitis ſectionibus, & Ellipſi: Si detur vna diameter, qua ſit axis, ita vt ſecet omnes chordas parallelas chordæ vel diametro alteri tranſeunti per centrum propriæ ſectionis, bifariàm & ad angulos rectos. alia diameter cui ſunt parallela dicta chorda, erit etiam axis ſectionis, coniugatus alteri dato prædicto.

HOc demonſtrauimus in fine demonſtrationis allatæ ad hanc prop. 47. & illud, vti polliciti eramus, reponimus iu hoc corollario uoſtro ſeptimo, vt magis eluceſcat, & vti illo poſſimus ad alia in hiſce conicis demonſtranda.

COROLL. NOSTRVM VIII.

In oppoſitis ſectionibus, axem reperire tranſuerſum, & ei coniugatum.

QVia per prop.14. lib.1. ſectiones oppoſitæ commune latus tranſuerſum habent commune; & axis tranſuerſus eſt diameter per def. 18. lib. 1. inter primas: ſi reperiatur vnius Hyperbolæ è datis oppoſitis, diameter tranſuerſa quæ ſit eius axis tranſuerſus, per hanc propoſit. erit etiam axis alterius oppoſitæ ſectionis. Alter verò ei coniugatus erit, ſi ex centro excitetur recta linea huic axi communi ad angulos rectos; iuxta coroll.noſt.ad def.18. lib.1. inter primas.

COROLL. NOSTRVM IX.

In circulo reperire duos axes coniugatos.

AD quamcumque diametrum circuli, ex centro eius excitetur alia diameter ad angulos rectos prædictæ, per propoſit.11. libri 1. element. Dico has duas diametros eſſe coniugatos axes.

Demonſtratur. Ex innumeris punctis diametri vnius ex dictis, excitentur chordæ circuli perpendiculares huic primæ diametro; bifariàm omnes ſecabuntur ab illa, per 3.prop. lib.3.elem. eruntque parallelæ inter ſe & alteri diametro ſecundæ prædictæ, per prop.29. lib.1. element. Similiter ex infinitis alterius ſecundæ diametri punctis, excitentur chordæ perpendiculares huic ſecundæ diametro; bifariàm etiam diuidentur ab illa, eruntque parallelæ iuter ſe, & prædictæ diametro primæ, ex eiſdem citatis principijs. Quare cùm iſtæ duæ diametri rectas omnes lineas alteri æquidiſtantes bifariàm ſecent, & ad angulos rectos; ipſæ erunt per def.19. lib.1. inter primas, axes coniugati in circulo.

COROLL. NOSTRVM X.

Quæcumque propoſuimus in corollarijs noſtris præcedentibus, excepto octauo, & ſequentibus tribus: communia ſunt circulo.

DEmonſtrationes enim allatæ, communes ſunt circuli circumferentiæ.

COROLL. NOSTRVM XI.

In omni ſectione coni, & circulo. Si ad extremum axeos eius ſitum in linea curua ipſius ſectionis, ponatur recta linea perpendicularis ipſi axi: continget in hoc vnico puncto ipſam ſectionem.

SI enim ad punctum vnum ex iutermedijs axeos datæ ſectionis erigatur recta linea perpendicularis ipſi axi, per prop.11.lib.1.element. hæc erit per coroll. noſt. 4. ordinatim applicata ad ipſum axem: datur autem alia recta linea perpendicularis eidem axi in eius extremo ſito in linea curua ipſius ſectionis; ergo per prop.28. lib.1. element. erit hæc recta linea parallela ordinatim applicatæ rectæ ad axem: igitur per propoſit. 17. vel 32. lib.1. continget ſectionem in illo vnico puncto extremo

tremo axeos illius. Quod erat demonstrandum. Quoad circulum patet ex coroll. ad propos. 16. lib. 3. element.

COROLL. NOSTRVM XII.

Si recta linea contingens quamlibet sectionem coni in extremo sui axeos, est perpendicularis ipsi axi.

PEr aliquod punctum axeos sectionis situm intra locum sectionis ducatur recta linea parallela contingenti, ipsa occurret sectioni duobus in punctis, & bifariàm secabitur ab axe, eritque ordinatim applicata ipsi axi per coroll. nost. 2. ad prop. 3. igitur per def. 18. & 13. secabitur ab axe ad angulos rectos. Cùm igitur tangens data, & hæc ducta sint parallelæ, erit per prop. 29. lib. 1. elem. angulus rectus factus ab tangente & axe, ideoque per defin. 10. lib. 1. elem. tangens erit perpendicularis axi quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM XIII.

Si recta linea contingat sectionem coni in extremo axis sui transuersi: inter illam & curuam lineam sectionis nulla recta linea incedet per illud punctum contactus, quin secet sectionem: & angulus mixtilineus contingentiæ factus ab illa recta linea tangente, & curua sectionis, minor est quolibet acuto angulo rectilineo: reliquus verò mixtilineus factus ab eadem curua linea sectionis, & axe, maior est quolibet angulo acuto rectilineo.

SEctionis conicæ quæ circulus est mentionem non facimus; quia quæ proponimus demonstrata sunt in circulo, propositione 16. lib. 3. elem.

Iam verò ea probemus in Parabola, Hyperbola, & ellipsi.

Per coroll. nostrum 12. præcedens, patet rectam lineam contingentem coni sectionem in extremo axeos proprij, esse perpendicularem ipsi axi in puncto contactus; quare efficiet angulum rectum cum axe. Quod si ex hoc puncto educeretur recta linea inter hanc tangentem & curuam lineam sectionis non secans sectionem coni, haberet solùm commune punctum contactus cum linea curua sectionis, & sic contra vltimam partem prop. 32. lib. 1. inter tangentem sectionem, & lineam curuam sectionis alia recta linea caderet, hoc absurdum indicat talem rectam lineam duci non posse; secabit igitur sectionem in duobus punctis quorum vnum est punctum contactus, aliud in ipsa sectione: igitur per proposit. 10. lib. 1. portio huius secantis rectæ, erit intra sectionem, & efficiet cum axe acutum angulum rectilineum continentem angulum mixtilineum factum ab tangente & linea curua sectionis; quare quilibet angulus acutus erit maior isto angulo contingentiæ mixtilineo; & angulus hic seu quilibet acutus continebitur in angulo mixtilineo facto ab linea curua sectionis & axe, igitur maior hic angulus erit quolibet acuto angulo rectilineo, per axio. 19. lib. 1. element.

COROLL. NOSTRVM XIV.

Si centro Ellipseos fiat circulus semidiametro minore altera eiusdem Ellipseos diametro modo non sit semiaxis minor; circumferentia huius circuli secabit in quatuor punctis circumferentiam Ellipseos.

HOc declarauimus in demonstratione allata circa ellipsim.

PROPOSITIO XLVIII.

His autem demonstratis: reliquum est, vt ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

INtellige Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipseos. tùm etiam ex consequenti necessitate, oppositarum sectionum: nam in prop. 46. proposuit axem Parabolæ inuestigandum; & præcedente 47. Hyperbolæ, & Ellipseos, nullo autem modo præfiniuit axes circuli reperiendos; in quo innumeri esse possunt, vti coroll. nostro ad finem demonstrabimus. At verò in alijs coni sectionibus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsi, asserit hac propositione nullos alios esse in ipsis, quàm quos determinauit, hoc est vnicum in Parabola, & Hyperbola; duosque coniugatos, tàm in sectionibus oppositis, quàm in Ellipsi. Quod vt præstemus, diuidemus hanc propositionem in sectiones sequentes.

In Parabola, vnicus est axis, nullusque ei coniugatus.

Quandoquidem omnes axes curuarum linearum inter quas est Parabola, sunt diametri, per defin. 18. lib. 1. inter primas; & omnes diametri in Parabola sunt rectæ lineæ parallelæ per nostrum coroll. 3. ad prop. 27. lib. 1. & demonstrauerimus in propos. 46. axem parabolæ esse rectam CD: si alius axis esse possit in Parabola, erit alia eius diameter parallela prædicto axi, pura AB; atque ita diuidet bifariàm & ad angulos rectos rectas omnes lineas seu chordas ad ipsam inuectam diametrum ordinatim applicatas, per defin. 18. lib. 1. inter primas: quarum ordinatim applicatarum aliquæ, vel erunt eædem cum chordis FE, GH, vel diuersæ: si eædem, ipsæ diuidentur bis bifariàm in diuersis punctis, contra coroll. nost. ad proposit. 1. lib. 3. elem. si diuersæ; poterimus vnam ex illis ductam concipere per vnum I pun-

punctum sectionis communis stabiliti axis CD, & chordæ ab eo sectæ GH bifariàm & ad angulos rectos in I; sitque recta LIMN, quam secet ad angulos rectos in M, axis introductus AB. Verùm cùm sint rectæ lineæ CD, AB, paralleiæ, easque per 15. prop. Procli secet recta LIMN; erunt per prop. 19. lib. 1. element. anguli AMI, CIM, æquales duobus rectis; est verò angulus AMI rectus, ergo alter CIM rectus erit: sed aliunde cùm recta CD sit axis, & secet ad angulos rectos rectam GIH in I erit angulus CIH rectus continens angulum CIM rectum probatum ex positione aduersarij; atque ita cùm per 12. axiom. lib. 1. elem. recti omnes anguli rectilinei sint æquales, erit rectus angulus CIH continens angulum CIM rectum, æqualis ipsi angulo CIM, contra 8. axiom. lib. 1. element. Absurdum hoc & præcedens euidentem reddunt falsitatem introducti alterius axis AB, ab inuento CD per proposit. 46. quare in Parabola vnicus est axis, quod erat ostendendum.

Aliter demonstrabitur, ex positione aduersarij & apparatu prædicto, in resultante triangulo IMK, anguli ad basim MK, erunt singuli recti; contra 17. prop. lib. 1. elem. Igitur duo axes CD, AB, in Parabola esse non possunt; nec plures, ergo vnus tantùm.

Ex dictis sequitur manifestum esse in Parabola nullum esse axem coniugatum alteri: nam axis coniugatus alteri non definit esse diameter; & omnes diametri Parabolæ sunt parallelæ inter se; & ostendimus, nullam huiusmodi diametrum parallelam vni axi, esse posse axem; concluditur euidenter in Parabola nullum esse axem coniugatum alteri axi.

Sed age alteram demonstrationem huius postremi propositi afferamus. Esto si fieri possit axis GIH coniugatus axi alteri CD in Parabola: Hi verò duo axes sint per coroll. nost. ad defin. 18. lib. 1. inter primas sibi inuicem ad angulos rectos in puncto I. tum per coroll. nost. 2. ad prop. præcedent. 47. recta GH ab axe CD, secabitur bifariàm in I. & per coroll. nost. 3. ad eandem propos. rectæ omnes chordæ huic GIH parallelæ in parabola erunt sectæ bifariàm & ad angulos rectos ab axe CD. Sed vicissim iuxta defin. 19. lib. 1. inter primas, alia recta GIH quæ asseritur axis coniugatus alteri CD, debebit vicissim diuidere bifariàm & ad angulos rectos, rectas omnes alias lineas parallelas axi CD, verbi gratiâ rectam AB. hoc verò est impossibile, nam linea AB in infinitum producta vltra B, nunquam terminabitur in alio puncto lineæ curuæ Paraboles, per propositio. 26. libri 1. vnde bifariàm diuidi nequit ab axe GIH. Igitur nullus axis coniugatus alteri in Parabola adstrui potest.

In Hyperbola vnicus est transuersus axis nullusque ei coniugatus.

Nam hyperbola vt sic concipi potest sine opposita propria. Quare cùm axis coniugatus alteri axi, sit etiam diameter, transibit per coroll. prop. 51. lib. 1. per centrum Hyperboles, si detur talis axis coniugatus; & per defin. 19. lib. 1. inter primas, debebit secare bifariàm & ad angulos rectas omnes lineas parallelas alteri coniugato axi; cumque Hyperbola vnica necessariò non includat sibi oppositam terminantem ex vna parte rectas illas lineas parallelas alteri axi transuerso, non poterit determinari punctum medium illarum rectarum parallelarum terminatarum quidem ex vna parte linea curua Hyperboles datæ. Igitur nullus axis coniugatus transuerso axi in Hyperbola vnica esse potest.

In oppositis sectionibus, vnicus est axis transuersus, & vnicus ei coniugatus rectus.

Esto axis ACBG, transuersus inuentus in oppositis sectionibus iuxta prop. 47. præcedent. & axis MCN ei coniugatus. Dico nullos alios esse ab his.

Esto si fieri possit alius axis transuersus LCFH, qui cùm sit diameter transuersa, per def. 18. lib. 1. inter primas, necessariò per centrum C, datarum oppositarum sectionum incedet. Nihilominus axis ABG diuidet bifariàm in G, & ad angulos rectos chordam DGE parallelam axi coniugato MCN, per defin. 19. lib. 1. inter primas: & alter axis diuidet obuiam DGE rectam in puncto H, per axiom. 28. lib. 1. elem. Concipiamus autem vnam chordam ordinatim applicatã axi LCFH introducto ad punctum eius H, secabitur in H ab ipso ad angulos rectos per defin. 18. lib. 1. inter primas, hoc est erit angulus rectus CHE: est autem in triangulo HCG, angulus rectus in G, quia axis alter ACBG diuidit ad angulos rectos chordam DGF; igitur per coroll. 1. ad propos. 17. lib. 1. angulus CHI erit acutus; ergo multò magis erit acutus angulus CHI, pars eius, qui fuit ostensus rectus ex positione aduersarij; quæ ideo falsa erit, videlicet esse alium transuersum axem oppositis sectionibus, diuersum ab axe inuento ACBG. Sed neque erit alius axis rectus ei coniugatus, videlicet OCP, diuersus ab inuento MCN: cùm enim per coroll. nost. ad definit. 19. lib. 1. inter primas; debeat esse ad angulos rectos ipsi axi ACB, esset angulus ACP rectus, qui continetur in alio recto ACN, ideoque inæquales, contra 12. axio. lib. 1. elem. euidens est igitur propositio in oppositis sectionibus.

In

In Ellipsi vnicus est axis transuersus, & vnicus ei coniugatus.

Apparatus 1. Inuento axe transuerso AEB, & ei coniugato CED, per prop. 4. in ellipsi. Sit si fieri possit alius transuersus axis FEK incedens per centrum E, vt alius AEB; sunt enim ambo diametri per def. 18. inter primas lib. 1. vnde per coroll. prop. 51. lib. huius, incedere debet per E centrum ipsius ellipseos. Concipiatur autem recta linea LFM contingens ellipsim in F puncto extremo axeos transuersi FEK introducti; hæc recta LFM tota extra ellipsim procedet ex natura tangentium rectarum lineas curuas conicas in aliquo earum puncto: Et quia punctum F contactus, ad inter duos axes coniugatos inuentos AEB, CED, cum vtrisque conueniet extra ellipsim.per propof.25.lib.1. Exempli gratia in puncto M cum axe BEA producto vltra A, & in L cum axe DEC producto vltra C. Iam verò probare nos oportet rectam hanc lineam LFM tangentem ellipsim in puncto F prædicto, nulla ratione esse orthogonium axi FEK introducto, seu quod idem est, non efficere angulos deinceps EFM, EFL, rectos; sed esse obliquam ipsi axi FEK introducto; ideoque dictos angulos deinceps esse inæquales.Quod si per prop. 12.lib.1.elem. ex puncto F prædicti contactus, ad axem AEB inuentum, demittatur recta linea FI orthogonia;erit iuxta coroll. nost. ad 18. def. inter primas lib. 1. semiordinatim applicata ipsi axi AEB. Sed esto, si fieri possit, recta linea LFM cōtingens in F puncto extremo axeos FEK introducti,ipsam ellipsim, efficiat angulos rectos æquales EFM, EFL, ipsi, & deinceps ad axem FEK introductum; resultabunt triangula rectangula EFM,EFL. Inspiciamus EFM: quoniam recta FI deducta est ab angulo recto EFM,perpendicularis ad eius latus ME oppositum, erit media proportionalis inter rectas MI, IE, per coroll. prop.8.lib.6.elem. ideoque per 17.propof.lib. eiusdem 6.quadratum super recta FI erit æquale rectangulo sub EI, IM; Et quoniam hæc eadem recta FI est educta ab puncto F contactus rectæ lineæ LFM, & ipsius ellipseos, estq; probata ipsa FI semiordinatim applicata axi AEB inuento ipsius ellipseos;erit per prop.37.lib.1. quadratum super recta FI, ad rectangulum sub EI,IM, sicut rectum latus axeos inuenti AEB, ad ipsum axem AEB: est autem rectum latus axeos AEB,inæquale ipsi axi,per coroll.nost.1. ad prop.21. lib.1. ergo quadratum super recta FI,erit inæquale rectangulo sub EI, IM. Cùm igitur probauerimus quadratum super recta FI esse inæquale rectangulo sub EI,IM;tùm etiam æquale rectangulo eidem: hæc duo pugnantia consequentia ad positionem quod recta linea LFM contingens ellipsim in puncto F extremo diametri FEK ipsius ellipseos, diuersæ ab axibus eius AEB,CED,sit ad ipsā FEK diametrū perpendicularis; erit ipsa positio impossibilis: ideoque ipsa recta LFM contingens ellipsim in extremo F diametri FEK prædictæ, obliqua erit ipsimet diametro; seu quod idem est, efficiet cum illa inæquales angulos EFM, EFL. Et sic erit discurrendum in omnibus alijs diametris ellipseos diuersis ab eius axibus AEB, CED, inuentis per prop 47. Et sic probauerimus assumptum.

Apparatus 2. Ex punctis innumeris axeos introducti FEK, exempli gratia ex puncto O, & centro E, educantur per 31. propof. lib. 1. elem. rectæ lineæ POR, GEH, parallelæ tangenti rectæ LFM; istæ omnes rectæ erunt parallelæ inter se, per 30. propof. lib. 1. element. tùm etiam erunt per coroll. nost. 7. ad propof. 43. lib. 1. ordinatim applicatæ ad diametrum FEK, & bifariàm sectæ. Dico autem diametrum GEH esse coniugatam ipsi diametro introductæ FEK. Si enim ita non sit: Esto alia diameter v.g. SET, quæ per 17.def. inter primas lib. 1. erit parallela ordinatim applicatæ rectæ POR ad diametrum FEK;sed eidem rectæ POR, est parallela diameter GEH, ergo per 30. prop. lib.1. elem. erunt parallelæ inuicem rectæ GEH, SET, per idem centrum E incedentes, contra naturam rectarum parallelarum: hoc absurdum indicat nullam aliam diametrum in ellipsi esse coniugatam diametro eius FEK, præter diametrum GEH. Verùm ista GEH secat vti probauimus in primo apparatu diametrum sibi coniugatam FEK ad angulos inæquales;ergo etiam secabit ad eosdem angulos inæquales, diameter GEH rectas omnes parallelas diametro FEK, iuxta coroll. nost.3.ad prop.29.lib.1.elem.

Demonstratio. Duarum diametrorum FEK, GEH, coniugatarum in ellipsi, ex positione aduersarij; si vna FEK introducitur axis ellipseos, altera GEH erit axis coniugatus ipsi FEK. Verùm neutra ex apparatibus secat parallelas alteri, bifariàm & ad angulos rectos simul:ergo neutra erit axis,per def.18.inter primas lib.1.

COROLLARIVM NOSTRVM.

In circulo: infiniti sunt axes coniugati; & omnes diametri sunt axes.

Aduerte corollarium hoc nulla ratione pugnare cum propositione hac quadragesima octaua Apollonij nostri: nam intelligit more suo sectiones conicas. Parabolam, Hyperbolam,sectiones oppositas, & ellipsim tantummodo, nisi circulum nominet.

Igitur cùm in circulo sint infinitæ diametri, hoc est rectæ lineæ transeuntes per centrum eius, & vtrimque terminatæ in eius circumferentia tam iuxta def. 17.lib.1. element.

quàm secundùm mentem Authoris in corollario suo ad propos. 51. lib. 1. & ex centro eius possint his omnibus diametris per propos. 11. lib. 1. element. excitari rectæ chordæ perpendiculares ipsis diametris singillatim sumptis; manifestum est per corollarium nostrum ad defin. 19. lib. 1. inter primas, & per ipsam defin. 19. has omnes diametros sibi inuicem perpendiculares, esse axes coniugatos in circulo. Quare demonstrauerimus in circulo propositum.

PROPOSITIO XLIX.

Data coni sectione, & puncto non intra sectionem dato: ab eo rectam lineam ducere, quæ sectionem contingat. [Oportet autem in Hyperbola punctum quod datur non existere in centro, neque in productis asymptotis supra centrum, neque in angulo contraposito ei qui Hyperbolen continet]

HÆc propositio vniuersalis est ad omnes sectiones coni curuarum linearum, Parabolam, Hyperbolam, oppositas sectiones, & ellipsim. Suntque in omnibus tres diuersi casus: aut enim punctum datum, est in linea curua sectionis; vel in axe transuerso eius producto; vel extra ipsam sectionem & eius locum, & extra eius axem transuersum. Excluditur autem punctum datum intra locum sectionis, ex quo nulla recta linea contingens ipsam sectionem duci potest, ita vt tota extra sectionem cadat.

Apollonius non commemorat circulum; quia ex elementis Geometricis constat methodus ducendi rectam lineam contingentem ipsum. Sed non ineptum erit refricare memoriam, propositum exequendi in circulo, citando propositiones elementares ex quibus dependet. Itaque vti distinctius procedamus, artem dabimus in omnibus sectionibus conicis citatis, comprehendendo etiam circulum à quo incipiemus.

In Circulo.

Si punctum datum sit circumferentia circuli, propositum ad praxim reducemus per coroll. nost. 1. ad prop. 16. lib. 3. element. si verò punctum assignetur extra circuli circumferentiam, & eius aream; imperatum faciemus per proposit. 17. lib. 3. cit. Notandum tamen est in circulo duos tantùm casus esse; primum quando punctum designatur in circuli circumferentia; Alterum quando datur extra dictam circumferentiam & eius aream: nam ex hoc puncto dato per centrum circuli traduci poterit recta quæ erit diameter eius, & axis eius per coroll. nost. ad proposit. præced. 48. ita enim punctum datum reperietur in aliquo axe circuli producto, & nunquam extra dictum axem; quod non contingit in alijs conicis sectionibus quæ vnicum axem transuersum sibi vendicant per propos. præcedent. & sic duo tantùm casus erunt in circulo, tres verò in alijs coni sectionibus.

Quod si seruetur methodus tradenda in ellipsi, in circulo alia methodo ducentur huiusmodi rectæ lineæ ipsius circumferentiam in vnico puncto contingentes, ita vt nullæ earum partes existant in eius area.

In Parabola.

Suppositio, & apparatus in casu primo, quo datur punctum in linea eius curua: qui duplex erit; aut enim punctum datum B est in extremo axis seu vertice paraboles; vel in alio puncto quod non est extremum axeos. Si punctum B sit extremum axeos, sic erit operandum. Per prop. 46. reperiatur axis BD, datæ Paraboles, necessariò terminabitur in puncto B dato, quia vnicus est solum axis in Parabola, per prop. 48. præcedent. tùm per propos. 11. lib. 1. element. ex puncto quocumque alio, puta H, axeos BD, sito intra locum Paraboles, educatur chorda IHK, in ipsa Parabola, ad angulos rectos; hæc chorda per coroll. nost. 4. ad proposit. 47. erit ordinatim applicata axi BD: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto B agatur recta linea FBG parallela rectæ lineæ IHK prædictæ: Dico rectam FBG contingere sectionem Parabolæ in puncto B.

Si verò punctum detur A quod non sit extremum axeos: reperiatur per propos. 46. axis BD ipsius Paraboles; & per propos. 12. lib. 1. element. ex puncto A demittatur recta linea ADC ad axem BD perpendicularis; hæc erit ordinatim applicata ad illum per corollar. nost. 4. ad propos. 47. Tùm per propos. 3. lib. 1. element. ex producto axe DB vltra B verticem, sumatur recta BE æqualis ipsi BD: denique recta linea EA vniat punctum datum A, cum puncto E inuento. Dico rectam EA contingere Parabolam in puncto A dato.

Demonstratio primi membri. Quia recta FBG, est æquidistans per apparatum, rectæ lineæ IHK ordinatim applicatæ ad axem BD; ipsa per prop. 17. vel 32. lib. 1. Parabolen continget in puncto B. Secundum verò membrum

sic

sic demonstrabitur: Quoniam ex apparatu recta linea ADC est ordinatim applicata diametro seu axi EBD, in Parabola data; & sumpta est recta BE, æqualis ipsi BD: per prop.33. lib.1. recta linea AE sectionem contingeet in puncto A dato. Igitur fecerimus imperatum.

Apparatus in casu quo datum sit punctum E, in axe EBD, producto vltra verticem B. Per prop.3. lib.1. elem. de axe BD producendo in infinitum versus partes contrarias vertici B, detrahatur recta linea BD æqualis rectæ BE: & per prop. 11. lib. 1. elem. excitetur in puncto D, recta chorda ADC, perpendicularis axi EBD, hæc recta chorda erit ordinatim applicata axi EBD, per coroll. nost.4. ad prop.47. Denique punctum E vniatur cum extremo altero A vel C, chordæ ADC. Dico rectam EA contingere Parabolen in puncto A vnico, ex dato E puncto.

Demonstratio. Ex apparatu constat rectam ADC esse ordinatim applicatam diametro seu axi EBD; & portio huius axeos BE, æqualis est portioni BD, eiusdem axeos, facta in apparatu: ergo recta linea ex puncto dato E in producto dicto axe vltra verticem B, ad A extremum vnum rectæ ADC, erit per prop. 33. lib.1. contingens in A, ipsam Parabolam datam. Et sic ad praxim reduxerimus propositum & rectè factam esse demonstrauerimus.

Apparatus in casu quo punctum C datum sit extra axem BD productum vltra B, verticem. Reperiatur per prop.46. ipse axis BD, si non sit datus: & per prop.31. lib.1. elemen. ex puncto C dato, ducatur versus Parabolam datam recta linea CGF parallela axi BD: hæc recta occurret vni soli puncto G lineæ curuæ Paraboles per prop. 26. lib. 1. Sed age eximamus scrupulum quo aliquis angi posset, dubitando an hæc recta CGF occursura sit ipsi Parabolæ. Per prop.8. lib. 1. certum est Parabolam in infinitum augeri seu extendi posse versus partes oppositas vertici eius; & per coroll. nost.1. ad prop. 22. lib. 1. constat rectas lineas ordinatim applicatas ad quamcumque diametrum eius, ideoque etiam ad eius axem producendũ in infinitum versus partes contrarias vertici, semper esse maiores & maiores: quare si ex puncto dato C recta linea CL ducatur per 12 prop. lib. 1. elem. perpendicularis ad axem DBL, productum vltra verticem B, hæc recta CL erit determinata: sumpta verò recta BD æquali ipsi BL, in axe LBD, per 3. prop. lib.1. elem. & ex puncto D, erigatur recta linea DG perpendicularis axi LBD, per 11. prop. lib. 1. elem. quia secat ipsum axem in D, occurret Parabolæ lineæ curua in puncto G, ad partes C, per coroll. nost.2. ad propos. 18. lib.1. eritque per prop. 28. lib. 1. elem. parallela ipsi LC, ob angulos rectos in L & D; sed & sunt rectæ LBD, CGF, parallelæ positæ: igitur per prop.11. Procli recta CGF secabit rectam DC in aliquo puncto quod dico esse G, punctum lineæ curuæ Paraboles prædictum, nam resultabit parallelogrammum LCGD, cuius opposita latera erunt æqualia LC, DG; G autem est in linea curua Paraboles; ergo recta CGF occurrit lineæ curuæ Paraboles, ideoque per coroll. nost.2. ad propos.26. lib. 1. producta ingredietur intra locum Paraboles. Sumpta autem recta BI æquali ipsi BD, quia recta DG est ordinatim applicata ipsi axi LBD per coroll. nost.4. ad prop.47. recta linea IG continget in puncto G vnico Parabolam, per prop.33. lib.1. & obuiam rectam CG interfecabit in G, totaque procedet extra Parabolam: igitur iuxta 11. ax. lib.1. elem. recta CG producta vltra G procedet intra locum Parabolæ, cùm non possit inter rectam IG tangentem, & curuam lineam Parabola incedere per prop.32. lib. 1. & non possit congruere lineæ curuæ Paraboles eò quòd specie differant. Denique quia recta CGF, est parallela axi LBD, ingrediturque intra locum Paraboles, erit per coroll. nost.1. ad prop.46. lib. 1. diameter ipsius Paraboles: igitur si ex puncto G, sumamus intra locum Parabolæ, de diametro CGF, rectam GF, æqualem ipsi GC, per proposit. 3. lib. 1. element. & ex puncto F, per proposit. 31. lib.1. element. transmiserimus rectam lineam AFK parallelam contingenti IG prædictæ, secabitur in F, per 11. proposit. Procli, & diametro CGF; & per coroll. nostrum 2. ad proposit. 18. lib.1. occurret vtrimque in A ab K, lineæ curuæ Paraboles; eritque ordinatim applicata ipsi diametro CGF, per coroll. nostrum 7. ad proposit. 48. libri 1. Insuper ducatur recta ex puncto dato C, ad punctum A, vel punctum K. Dico rectam CA, vel rectam CK, Parabolam contingere in vnico puncto, illam in C, hanc in puncto K.

Demonstratio. Quia per apparatum rectæ GC, GF, sunt æquales; & in puncto F, est recta linea AFK, ordinatim applicata diametro CGF; per prop. 33. lib.1. erit recta CA, vel CK, contingens Parabolam in vnico tantùm puncto. Atque ita transmiserimus ex puncto C dato extra lineam curuam Paraboles, & extra axem eius productum rectam lineam contingentem ipsam in vnico puncto.

COROLLARIVM NOSTRVM.

In Parabola, recta omnis linea ducta ab quocumque puncto plani in quo est Parabola dato extra eius locum & lineam curuam, parallela axi ipsius Parabolæ; occurret lineæ curuæ Parabolæ & progredietur intra eius locum, lineamque eius curuam intersecabit in illo solùm puncto occursus.

HÆc omnia demonstrauimus in hoc vltimo casu.

In Hyperbola.

Apparatus in casu quo detur punctum B, in vertice B axeos eius C B. Producto axe CB intra Hyperbolam, sumatur punctum D in ipso intra ipsam; & per prop. 11. lib. 1. element. excitetur vtrimque recta linea ADE perpendicularis ipsi axi CBD, quem secabit in D; ideoque vtrimque lineæ curuæ Hyperboles occurret in punctis A & E, per coroll. nost. 7. ad prop. 13. eritque ordinatim applicata ipsi axi CBD, per prop. 47. coroll. nost. 4. Denique per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto B dato ponatur recta linea FBI parallela rectæ ADE. Dico rectam FBI contingere in vnico puncto B dato, Hyperbolam.

Demonstratio. Quia per apparatum constat rectam ADE esse ordinatim applicatam axi CHBD, & huic in B vertice Hyperboles, puncto dato, est posita recta linea FBI, parallela; per prop. 17. vel 32. lib. 1. erit recta linea FBI contingens in vnico B puncto dato verticis axeos dati CB.

Apparatus in casu quo detur punctum A in linea curua Hyperboles, quod non sit extremum axeos eius. Per prop. 47. reperiatur axis CHB; centrumque eius H per prop. 45. si non sit data. Tùm per prop. 12. lib. 1. elem. ex puncto dato A, demittatur recta linea perpendicularis ADE ad axem CBD, quæ erit ad ipsum ordinatim applicata per coroll. nost. 4. ad prop. 47. Insuper per prop. 10. lib. 6. elem. positis duabus rectis CD, DB, in directum, diuidatur transuersum CB latus in G, sicuti est tota CDB concepta, in D; ita vt sit vt CD ad DB, sic CG ad GB. Denique transmittatur recta GA. Dico rectam AG contingere in vnico A dato puncto, Hyperbolam.

Demonstratio. Quia per apparatum est CG ad GB, sicut CD ad DB; rectaque ADE est ordinatim applicata diametro CHBD seu axi Hyperboles: erit per prop. 34. lib. 1. recta AG contingens in vnico A dato puncto lineam curuam Hyperboles, quod non sit extremum eius axeos.

Apparatus in casu quo punctum G detur in axe CHBD, extra Hyperbolen ipsam. Verùm non debet esse centrum eius H, neque supra centrum; ita vt GB portio transuersi lateris inter punctum datum & verticem eius situm in ipsa Hyperbola sit non minor dimidio HB vel HC, transuersi dicti lateris: tunc enim per coroll. nostra 1. & 2. ad prop. 31. lib. 1. recta linea quæcumque ex illo puncto deducta ad quodcumque punctum lineæ curuæ Hyperboles, producta vlterius procedet intra ipsius locum; & sic non erit tangens ita vt producta, tota extra Hyperbolam procedat: quod tamen requiritur in recta linea contingente sectionem. Sit igitur punctum G, in axe extra sectionem eiusque lineam curuam, ita vt GB sit minor quàm HB. Producto axe CB vltra B intra locum Hyperboles, incedet per coroll. nostrum 1. ad cit. prop. 31. lib. 1. & datis tribus rectis hoc ordine CG, secunda GB, & tertia CB, per lemma 12. reperiatur recta linea BD addenda in directum ipsi CB ex puncto eius B; ita vt tota CBD composita ex tertia data & quarta seu addita BD, ad ipsam quartam lineam seu additam, sit vt prima CG ad secundam GB: tùm per prop. 11. lib. 1. elem. excitetur in puncto D, recta linea ADE vtrimque perpendicularis ad axem CBD; hæc recta occurret in A & E, lineæ curuæ Hyperboles, per coroll. nostrum 7. ad prop. 13. eritque ordinatim applicata ipsi axi, per coroll. nost. 4. ad prop. 47. Denique ex puncto G dato recta linea GA ad punctum A, transmittatur; vel recta GE ab puncto G dato ad punctum E: Dico quod Hyperbolen contingat in vnico puncto, illa GA, in A; hæc GE, in E.

Demonstratio. Quandoquidem recta ADE est ordinatim applicata, per apparatum, ad diametrum seu axem CBD; estque per eundem apparatum vt CG ad GB, sic CD ad DB: erit per prop. 34. lib. 1. recta linea GA, contingens Hyperbolam in vnico puncto A; & alia recta GE, contingens eandem Hyperbolam in vnico puncto E.

Casus vltimus in Hyperbola, quando datur extra eam punctum, & extra eius lineam curuam, & extra eius axem, subdiuiditur in plura membra: aut enim punctum K dabitur intra angulum continentem Hyperbolam, factum ab eius asymptotis definitis defin. 3. vel in vna aut altera asymptotorum, non productarum vltra centrum H, veluti F punctum in asymptoto HF: vel intra angulum deinceps ad angulum prædictum continentem Hyperbolam, veluti punctum K: vel intra angulum contrapositum angulo continenti Hyperbolam, quale est punctum O: vel denique in altera asymptotorum productarum supra centrum H. In tribus primis membris possibile est propositum; & in duobus postremis ad praxim reduci nequit.

Apparatus pro primo membro, quando datur punctum K intra angulum EHF continentem Hyperbolam effectum ab duobus eius asymptotis HE, HF, profluentibus ex centro H, ipsius Hyperboles. Ex centro H, per punctum K datum, transmittatur recta linea HK, & producatur vltra K; erit hæc recta, diameter Hyperboles per coroll. [illegible]op. 51. secabitque in vno tantùm puncto L obuiam lineam curuam Hyperboles, per coroll. nostrum 1. ad prop. 26. lib. 1. Et quia punctum K datur extra axem Hyperboles, diameter ducta HKL non erit axis; sed neque erit asymptotos, per coroll. nost. 3. ad propos. 2. quia diuidit angulum EHF continentem Hyperbolam. Præterea producta hac diametro LKH vltra centrum H, sumatur per prop. 3. lib. 1. elem. recta

HN æqualis ipsi HL: erit tota NL transuersa diameter datæ Hyperboles per def. 1. lib. 1. inter secundas. Insuper ex lemmate 12. datis tribus rectis, MK prima, KL secunda, NL tertia, huic tertiæ addatur in rectum recta LM, ita vt sit tota NLM ad LM adiectam, sicut est prima NK ad secundam KL. Ad hæc per secundum membrum primi casus, ducatur per L punctum in linea curua Hyperboles, quod est extra terminum axeos illius, ex demonstratis, recta linea PLR contingens in vnico L puncto, ipsam Hyperbolam: & per punctum M inuentum in diametro eius transuersa MHKLM, recta linea AMO parallela ipsi contingenti PLR; hæc recta AMO, vtrimque occurret in A & O, lineæ curuæ Hyperboles; eritque per coroll. nost. 5. ad propos. 47. erit ordinatim applicata diametro NHM. Denique ex puncto K dato, ad puncta A & O, rectæ lineæ traducantur KA, KO. Assero quod Hyperbolam datam contingant singulæ in vno puncto, illa in A, hæc in O.

Demonstratio. Quia ex puncto A lineæ curuæ Hyperboles datæ, vel ex puncto eius O, recta linea AMO ordinatim applicata est diametro transuersæ NKM, vti ostendimus in apparatu; & per eundem est vt NK ad KL, sic NM ad ML: recta linea KA, vel KO, contingent Hyperbolam datam per prop. 34. lib. 1. illa in A, hæc in O, punctis vnicis.

Apparatus pro membro, quando datum est punctum F, in alterutra asymptotorum, puta HF, non producta supra centrum H, Per prop. 10. lib. 1. elem. bifariàm diuidatur in D, portio HF asymptoti inter centrum H Hyperboles è quo defluit cum alia HE asymptoto, & punctum F datum: tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto D agatur recta linea DA parallela asymptoto alteri HE, versus ipsam Hyperbolam; hæc recta DA per coroll. nost. 1. ad propos. 13. occurret in vno tantùm puncto Hyperboles, puta A, ipsam secabit in ipso A puncto per coroll. nost. 8. ad cit. prop. 13. Denique ex puncto dato F, per A punctum inuentum in linea curua Hyperboles, recta linea FA ducatur. Dico quod hæc recta linea FA, in vno tantùm A puncto contingat Hyperbolam.

Demonstratio. Producendo rectam lineam FA vltra A, quia secat rectam DA in A, secabit etiam rectam HE ipsi DA parallelam, in E per propos. 11. Procli. Igitur quia in triangulo HFE, recta DA est parallela basi HE, per 2. prop. lib. 6. elem. secabuntur latera HF, EF, proportionaliter; est autem per apparatum latus HF sectum bifariàm in D, ergo aliud latus EF, bifariàm sectum erit in A. Habemus ergo rectam lineam FE occurrentem asymptotis HF, HE, in E & F, sectam bifariàm in A ab Hyperbola: igitur per prop. 9. solùm continget in vno puncto A Hyperbolam ipsam.

Apparatus pro membro, quando datur punctum K, in altero angulorum PHN, FHM, deinceps ad angulum MHN continentem Hyperbolam. Recta linea KH immittatur ex puncto dato K, per H centrum Hyperboles, & producatur vltra H. & in linea curua Hyperboles eligatur aliquod punctum C, ex quo per prop. 31. lib. 1. elem. ducatur recta linea CD parallela ipsi rectæ HK; hæc recta CD secabitur in I ab asymptoto HN per prop. 11. Procli, ideoque obuiam lineam curuam intersecabit in puncto D, quia asymptotus per def. 3. tota est extra Hyperbolam. Præterea per propos. 10. lib. 1. elem. recta linea CD bifariàm in E diuidatur, ex quo puncto E recta linea ad H centrum traducatur quæ secabit in puncto B, lineam curuam Hyperboles; eritque per coroll. prop. 51. lib. 1. diameter transuersa sectionis. Insuper per prop. 3. lib. 1. element. de producta diametro EBH vltra H centrum, sumatur recta HG æqualis ipsi HB; erit transuersum latus GHB, per def. 1. lib. 1. inter primas. Quod si per prop. 55. lib 1. datis duabus rectis lineis; GHB pro latere transuerso, & recto inueniendo per coroll. nost. 2. ad propos. 51. lib. 1. reperiatur sectio opposita datæ; erunt per prop. 43. coniugatæ diametri, GHB, KH. Tùm ex his quæ diximus in def. 2. reperiatur rectangulum applicatum diametro transuersæ GHB, æquale quartæ parti figuræ applicatæ eidem diametro transuersæ GHB; & per lemma 11. ad lib. 1. data recta KH, & rectangulo isto inuento, reperiatur alia recta HL, ita vt rectangulum sub KH, HL, sit æquale dicto rectangulo inuento seu quartæ parti figuræ: & de producta recta KH vltra centrum H, sumatur recta HL æqualis inuentæ HL, per 3. prop. lib. 1. elem. Ad hæc per prop. 31. eiusdem lib. 1. elem. ex puncto L agatur recta linea LA parallela diametro transuersæ GHB, quæ in vnico A puncto intersecabit lineam curuam Hyperboles, per prop. 26. lib. 1. Denique ex puncto dato K, per hoc punctum A inuentum in linea curua Hyperboles, recta linea KA transmittatur. Assero quod recta KA in vnico tantùm puncto A, datam Hyperbolam contingat.

Demonstratio. Quia per apparatum, rectangulum sub KH, HL, est æquale quartæ parti figuræ ad GHB diametrum transuersam applicatæ: recta linea KA continget in vnico puncto A sectionem seu Hyperbolam datam, per coroll. 2. prop. 38. lib. 1.

Quod si detur punctum O, intra angulum FHP contrapositum angulo MHN continenti Hyperbolam datam, ostendemus nullam duci posse rectam lineam ex illo puncto O, contingentem Hyperbolam datam. Nam vel parallela erit vni asymptotorum; vel vnam secabit, alteram æquidistantem habens; vel ambas secabit; vel centrum H transfiget. Si primum, aut secundum, nunquam occurret Hyperbo-

læ, quandoquidem ex natura sua asymptotos quælibet nunquam eidem Hyperbolæ occurrit. Si tertium, per prop. 11. versus hyperbolen interfecabit lineam curuam Hyperboles; & sic eam non poterit contingere in vnico puncto. Si quartum & vltimum, diuidet angulum MHN continentem Hyperbolam datam, & sic eam interfecabit, per coroll. nostrum 5. ad prop. 2.

Denique si datum P punctum sit in vna MHP, exempli gratià, asymptotorum productarum vltra centrum H, ad partes oppositas datæ Hyperboles: assero nullam rectam lineam duci posse contingentem in vnico puncto Hyperbolam datam. Nam vel parallela erit alteri FN asymptoto, vel eam secabit productam vltra H centrum; vel eam secabit non productam; vel congruet cum asymptoto MHP. Si primum, quandoquidem rectæ lineæ nunquam conueniunt, & asymptotus FHN nunquam occurrit ex natura sua Hyperbolæ, multò minus recta ex P ducta ei parallela, eidem Hyperbolæ occurret, quia prius asymptoto FHN occurrere deberet. Si secundum, tunc magis ac magis diuaricabitur ab asymptotis eas interfecando, & in partes contrarias abeundo, & sic nunquam vt illæ occurret Hyperbolæ. Si tertium, tunc quia secat ambas asymptotos continentes angulum deinceps angulo continenti Hyperbolam datam, conueniet per prop. 11. cum ipsa Hyperbola, eius lineam curuam interfecando in vnico puncto, & sic non continget ipsam. Si vltimum, manifestè apparet eam non occurrere sectioni, sicut nec ipsa asymptotos. Probauerimus ergo intentum Apollonij in Hyperbola, & restrictiones à nobis additas in ipsa Hyperbola.

In oppositis sectionibus.

Apollonius nihil de oppositis sectionibus proposuit, pro transmittenda recta linea, vel ducendis rectis lineis duabus, ab puncto dato ad ipsas oppositas sectiones. Quod supplebimus hisce sequentibus conclusionibus, quæ distinguent possibile ab impossibili.

CONCLVSIO NOSTRA I.

Ab vno puncto dato intra locum anguli continentis Hyperbolam vnam & extra ipsam, recta linea duci poterit contingens illam in vnico puncto, sed non continget aliam oppositam, neque illi occurret: imò ex eodem puncto isto nulla transmitti poterit recta contingens hanc oppositam in vnico puncto.

Sint sectionum oppositarum asymptoti DCE, FCG, transeuntes per earum centrum C; & punctum H datum intra locum anguli FCE continentis Hyperbolam inferiorem B, & extra ipsam Hyperbolam. Dico posse duci ex puncto H rectam lineam HI contingentem in vnico puncto I, Hyperbolam B, quæ nulla ratione continget neque occurret sectioni A oppositæ: & nullam rectam duci posse ex hoc puncto H, quæ contingat in vnico puncto sectionem A dictam oppositam.

Imprimis ex dictis in Hyperbola, quandoquidem datur punctum H, intra angulum continentem Hyperbolam B, poterimus ducere rectam lineam HI contingentem in vnico puncto I, Hyperbolam B; quæ recta HI, nullo modo conueniet cum sectione A opposita ipsi B, per propos. 33. quare multò minus eam continget in vnico puncto. Et quia angulus FCE continens Hyperbolam B, est contrapositus angulo DCG continenti Hyperbolam A; ex illo puncto H, nulla linea deduci poterit recta contingens in vnico puncto Hyperbolam A, sicuti demonstrauimus circa finem eorum quæ diximus in Hyperbola. Atque ita probata erit conclusio.

CONCLVSIO NOSTRA II.

Ex puncto vno dato in linea curua vnius sectionum oppositarum, recta linea duci poterit contingens ipsam, sed non occurret alteri oppositæ, neque eam continget oterit in vnico puncto: imò neque alia recta transmitti poterit contingens oppositam in vnico puncto.

Sint vti in conclusione prima, sectiones oppositæ, & asymptoti, & centrum; punctumque datum sit I in linea curua hyperboles B. Dico ab hoc puncto I posse emitti rectam lineam IH contingentem Hyperbolam ipsam B in vnico I dato puncto, sed non occurrentem neque contingentem sectionem A oppositam in puncto vllo: Tum ex hoc eodem puncto I nullam rectam agi posse lineam quæ contingat oppositam A Hyperbolam in vnico puncto.

Primum manifestum est ex dictis in Hyperbola: alterum verò constat ex prop. 33. nam recta IH nulla ratione occurrere potest Hyperbolæ A oppositæ, ergo neque eam contingere potest in vnico puncto. Tertium sic demonstrabitur: vel recta huiusmodi linea parallela erit vni asymptotorum, alteram secando per prop. 11. Procli; vel ambas asymptotos secabit. Si primum nunquam conueniet hæc recta cum asymptoto parallela, ex natura parallelarum rectarum; & quia exterior est respectu huius asymptoti, multò minus conueniet cum sectione opposita, & sic eam contingere non poterit in vnico puncto. Si secundum, sectionem oppositam secabit in vnico puncto, per coroll. nost. 3. ad prop. 16. & sic eam contingere nequibit in vnico puncto. quare tota conclusio hæc nostra 2. demonstrata remanebit.

CON.

CONCLVSIO NOSTRA III.

Si punctum detur in vna asymptotorum oppositarum sectionum extra centrum; duci poterit ex illo ad vnam oppositarum quæ vicinior est illi puncto, recta linea contingens ipsam in vnico puncto, sed non occurret alteri oppositæ sectioni; & nulla alia recta duci poterit ex eodem illo dato puncto, contingens alteram sectionem.

PVnctum datum sit K, in asymptoto CE, quod tamen non sit centrum C. Dico quod recta linea KI, duci poterit contingens in vnico puncto I, sectionem B viciniorem dato puncto K, quæ recta linea KI nulla ratione contingere poterit oppositam sectionem B: & quod nulla alia recta linea emitti poterit contingens in vnico puncto sectionem A, ex illo eodem dato puncto K.

Primum executioni mandatum est in Hyperbola: itaque vti diximus recta linea KI sectionem B viciniorem continget in vnico puncto I; sed per propos. 33. non occurret sectioni A oppositæ; ergo multò minus eam contingere poterit in vnico puncto. Et quia punctum K respectu sectionis A, est in vna asymptotorum eius producta vltra centrum C; patet ex dictis in fine discursuum nostrorum de Hyperbola, nullo modo rectam agi posse lineam ex illo puncto K, quæ sectionem A contingere possit in vnico puncto.

CONCLVSIO NOSTRA IV.

Si punctum detur in altero angulorum deinceps ad angulum continentem alteram suam propriam Hyperbolam ex duabus oppositis: recta linea ex illo emitti poterit contingens in vnico puncto quamlibet ex Hyperbolis oppositis; & alia recta contingens aliam Hyperbolam oppositam in vnico puncto; sed hæ duæ rectæ lineæ non erunt in directum, hoc est vnam rectam non efficient.

HOc effecimus in hyperbola; quare illud idem efficiemus in sectionibus oppositis AB, ex puncto dato L, in angulo ECG qui est deinceps ad angulum DCG continentem Hyperbolam A, vel ad angulum ECF continentem Hyperbolam B, ducendo rectam LI contingentem in vnico puncto I, Hyperbolen B; & aliam rectam LM contingentem in vnico puncto M, Hyperbolen A. Verùm duæ istæ rectæ lineæ LI, LM, non erunt in directum, neque vnam efficient lineam; alioqui contra propos. 33. recta vna linea contingens in vnico puncto vnam ex sectionibus oppositis, cum alia sectione opposita conueniret. manifesta est igitur conclusio nostra 4.

In Ellipsi.

Apparatus in casu quo detur punctum B in extremo axeos BHC. Per prop. 11. lib. 1. elem. sumpto quolibet puncto D ex intermedijs axeos BHC, excitetur vtrimque recta linea ADF perpendicularis ipsi axi: tùm per propos. 31. lib. 1. elem. ex puncto dato B extremo axeos, agatur recta linea EBI parallela ipsi rectæ ADF chordæ in ellipsi ductæ. Dico hanc rectam EBI contingere in vnico puncto B dato extremo ellipseos, ipsam ellipsim.

Demonstratio. Quia chorda ADF est perpendicularis posita axi BHC, erit ordinatim applicata ad ipsum, per coroll. nost. 4. ad propos. 47. & per apparatum recta linea EBI in vertice B sectionis est posita parallela ipsi rectæ ADF; erit ipsa recta EBI, contingens in vnico puncto B dato extremo axeos in ellipsi, ipsammet ellipsim, per prop. 32. lib. 1.

Apparatus in casu quo detur punctum A in circumferentia ellipseos, quod non sit extremum eius axeos cuiuscumque. Per propos. 45. reperiatur centrum H, datæ ellipseos: tùm per prop. 47. inueniatur axis eius quilibet BHC, è duobus proprijs illius: Præterea per propos. 12. lib. 1. elem. ex puncto A dato demittatur recta linea ADF perpendicularis ad axem BHC: Insuper per lemma 12. Datis tribus rectis hoc ordine CD, DB, CB, reperiatur alia BG, quæ adiecta in directum ad CB, sit tota CBG ad BG additam, sicut CD ad DB. Denique ex puncto G ad punctum A datum agatur recta linea GA: dico hanc rectam AG esse quæsitam, quæ contingat in vnico A puncto dato in circumferentia ellipseos, extra quodlibet extremum cuiuslibet è duobus suis axibus, ipsam ellipsim datam.

Demonstratio. Quia in circumferentia ellipseos habemus punctum A datum, ex quo ad eius diametrum BHC vel axem, est ordinatim applicata recta linea ADF, perpendicularis ipsi BC axi, per coroll. nost. 4. ad prop. 47. & per apparatum est CG ad BG, sicut CD ad DB: recta linea AG, continget in vnico puncto A dato ipsam ellipsim, per propos. 34. lib. 1. tùm etiam recta GF.

Apparatus in casu quo G punctum detur in axe CHB producto, extra ipsammet ellipsim, & eius circumferentiam. Producatur axis CHBG vltra G, & ponatur per 3. prop. lib. 1. elemen. recta Gb æqualis ipsi GB: tùm per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur CB recta in D, sicuti est Cb in G; erit vt CG, ad Gb, vel GB, sic CD ad DB: & ex puncto D excitetur per prop. 11. lib. 1. element. recta chorda ADF ad angulos rectos ipsi CB. Denique ducatur recta GF, vel GA. Dico rectam GA contingere in puncto dato A vnico, ellipsim datam.

Demonstratio. Quia per apparatum est CD

 ad

ad DB, vt CG ad GB, & recta ADF est ordinatim applicata diametro seu axi BHC, per coroll. nostrum 4. ad propos. 47. quia perpendicularis axi CHB: erit per prop. 34. lib. 1. recta linea G A contingens in vnico puncto A dato, ellipsim. Sed & etiam GF ob eandem rationem continget eandem ellipsim in puncto F.

Apparatus in casu quo punctum G detur extra ellipsim eiusque circumferentiam, & extra axem eius productum. Per prop. 45. inquiratur centrum H, datæ ellipseos: & ex puncto G dato per centrum H recta linea GBHC transmittatur, & producatur vltra H, donec attingat in C puncto circumferentiam ellipseos, iuxta axiom. 18. lib. 1. elem. hæc recta GBHC, secabit etiam obuiam circumferentiam ellipseos in puncto B, antequam perueniat ad centrum H: sed & hæc eadem recta erit per coroll. propos. 51. lib. 1. diameter ellipseos datæ. Insuper producta recta CHBG, vltra G, ponatur per prop. 3. lib. 5. elem. recta Gb æqualis ipsi GB; & per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur recta CB, in D sicuti diuisa est in G, recta Cb; erit vt CG ad GB, sic CD ad DB. Præterea, quia recta GBC non est axis ellipseos, alioqui contra datum, punctum G datum esset in axe producto; ducatur ex secundo apparatu seu in casu quo punctum datur in circumferentia ellipseos, veluti hoc punctum B, quod non est extremum axeos, recta linea EBI contingens in vnico puncto B, ipsam ellipsim: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto D, agatur recta chorda ADF in ellipsi, parallela contingenti rectæ EDI. Denique ex puncto G dato ad quodlibet punctorum A, F, recta linea ducatur GA, vel GF. Dico quod contingat illa in A, hæc in F, ellipsim, in vnico puncto.

Demonstratio. Quia recta chorda ADF est parallela rectæ lineæ EBI contingenti sectionem in extremo B, diametri eius; erit ordinatim applicata ipsi diametro CHBG, per coroll. nost. 5. ad propos. 47. & quoniam est CD ad DB, sicut CG ad GB: erit recta linea GA contingens ellipsim in A vnico puncto, & alia recta GF contingens eandem in vnico puncto F, per prop. 34. lib. 1.

COROLL. NOSTRVM I.

In Parabola, Hyperbola, Ellipsi, & Circulo: si punctum detur in linea curua; ex illo vnica tantùm linea recta contingens ipsam lineam curuam ducetur.

SI enim alia recta contingens sectionem in eodem dato puncto duceretur; alia recta immitteretur in locum qui inter coni sectionem, & rectam lineam contingentem interijcitur, contra secundam partem prop. 32. lib. 1. hoc absurdum accusat falsitatis positionem contradicentem affirmationi huius corollarij, quæ ideo vera erit.

COROLL. NOSTRVM II.

In Parabola: ab puncto eodem dato in eius axe producto, & extra lineam curuam Paraboles, duæ tantùm rectæ lineæ ducentur, ipsam contingentes, singula in vno puncto, quarum vna erit ad vnam partem ipsius axeos, altera ad aliam; eruntque æquales inter se.

SVppositio, & apparatus. Parabolæ ABC sit axis EBD; & punctum E datum in illo producto extra ipsam Parabolam; & linea recta EA ducta ex illo puncto E, contingens ipsam in vnico puncto A per istam prop. 49. tùm ex puncto A demittatur recta linea AD perpendicularis ad axem EBD, per propos. 12. lib. 1. elem. producta vltra D, occurret alteri puncto C, lineæ curuæ Paraboles, per coroll. nost. 2. ad prop. 18. lib. 1. eritque ordinatim applicata dicto axi, per coroll. nost. 4. ad prop. 47. denique ex puncto dato E ad punctum C, recta linea transmittatur; quæ erit ad partes alias rectæ EA contingenti, respectu axeos EBD. Dico autem rectam EC etiam contingere Parabolam in vnico puncto C; & nullas alias rectas duci posse ab dato puncto E contingentes datam Parabolam; & illas duas esse æquales inter se.

Demonstratio. Esto si fieri possit, alia recta ex E ducta contingat Parabolam, quæ erit EF, in puncto F remotiore quàm punctum A, respectu verticis B; vel erit EH, in puncto viciniore vertici. B, quàm punctum A: si EF, produci poterit recta EA vltra punctum A contactus, quæ semper procedet extra Parabolam; quare per ax. 18. lib. 1. elem. secabit in G, rectam EF; & sic contra 14. ax. lib. 1. element. duæ rectæ lineæ spatium concludent: si verò EH; producta vltra H punctum contactus, procedet extra Parabolam; & sic intersecabit aliam rectam EA, in puncto I; & ita contra cit. axio. duæ rectæ figuram comprehendent; igitur nulla alia recta linea ex puncto E dato ad partes rectæ EA, respectu axeos EBD, duci poterit Parabolam contingens in vnico puncto, præter ipsam rectam EA. Et quia recta EA contingit in A, Parabolam datam, conueniens cum diametro seu axe eius EBD, extra ipsam Parabolam; & ab tactu A ad axem EBD, est ordinatim applicata recta ADC, vti ostendimus in apparatu; erit per prop. 35. lib. 1. recta BD, æqualis ipsi BE: eritque etiam ex puncto C ordinatim applicata recta CDA ad axem seu diametrum EBD, abscindens rectam BD, æqualem ipsi BE: quare per propos. 33. lib. 1. recta linea EC continget in vnico puncto C, datam Parabolam. Porrò ex eisdem principijs probabimus nullam aliam rectam duci posse ex puncto E ex parte contraria rectæ EA respectu axeos EBD, contingentem ipsam Parabolam, sicuti initio probaui-

mus

mus ad partes ipsius EA, respectu diametri EBD. superest igitur, vt ostendamus, rectas duas contingentes EA, EC, esse æquales inter se. Quandoquidem recta ADC, per apparatum est perpendicularis axi EBD, erunt duo triangula EDA, EDC, rectangula; ideoque per prop. 47. lib. 1. elem. duo simul quadrata rectarum ED, DA, erunt æqualia quadrato rectæ EA; tùm etiam duo simul quadrata rectarum ED, DC, erunt æqualia quadrato rectæ EC: sunt autem duæ rectæ DA, DC, æquales inter se per definit. 12. & 10. lib. 1. inter primas, ergo per prop. 16. Procli, earum quadrata erunt æqualia, quibus si addatur commune quadratum rectæ ED, erunt duo simul quadrata rectarum ED, DA, æqualia duobus simul quadratis rectarum ED, DC, per 2. ax. lib. 1. elem. Quare per 1. axiom. lib. eiusdem quadrata rectarum EA, EC, erunt æqualia inter se: igitur per proposi. 16. Procli, ipsæ rectæ EA, EC, erunt æquales inter se. Atque ita probauerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM III.

In Parabola: ab puncto dato extra eius locum, & lineam curuam, & axem productum, duæ solùm rectæ lineæ contingentes ipsam duci possunt; vna versus vnam partem diametri Parabolæ transeuntis per datum ipsum punctum, altera versus aliam; quæ erunt inæquales.

Svppositio. Sit datum punctum C extra locum Parabolæ, & eius lineam curuam, & eius axem BD quærendum per prop. 46. si datus non sit, ductæ sint duæ rectæ lineæ CA, CK, contingentes ipsam Parabolam, singulæ in vno puncto, illa in A; hæc in K, iuxta praxim traditam in casu postremo assignato in Parabola. in hac eadem propos. 49. vnaque CA ad partem sinistram diametri CF transeuntis per punctum datum C, altera CK ad partem dexteram dictæ diametri CF, quæ erit parallela axi BD, per coroll. nost. 2. ad propos. 46. lib. 1. Dico nullas alias rectas lineas contingentes Parabolam duci posse ab eodem C puncto dato; & esse ipsas CA, CK, prædictas, inæquales inter se.

Demonstratio. Quia per praxim traditam in Parabola, iuxta istum casum, recta linea AFK, ordinatim est applicata diametro CGF, quæ parallela est axi BD; totaque recta AFK est intra locum Parabolæ, per prop. 10. lib. 1. intra quem locum procedit axis BD parallelus diametro CGF ostensus; recta linea AFK, secabit axem BD, in puncto H, per proposit. 11. Procli. Iam verò quia recta AFK ordinatim applicata est diametro CGF, in puncto F, bifariàm secabitur in F, per 12. & 10. def. lib. 1. inter primas; & quidem ad angulos inæquales seu obliquos: si enim bifariàm secaretur in F ad angulos æquales deinceps, essent recti ambo; ideoque per prop. 29. lib. 1. element. etiam anguli BHA, BHK, essent recti; atque ita recta AHFK, esset perpendicularis ad axem BHD, & per coroll. nost. 4. ad propos. 47. esset etiam ordinatim applicata ipsi axi BHD; & per def. 18. & 10. lib. 1. inter primas, bifariàm diuisa in H ab axe BHD. Quare recta eadem linea AK, bifariàm bis esset diuisa in duobus punctis F, & H, contra coroll. nost. ad prop. 1. lib. 3. elem. igitur non erit ad angulos æquales recta linea AK, diuisa bifariàm in F, à diametro CGF, sed ad inæquales. Quocirca cùm in triangulis AFC, KFC, sint duo latera AF, FC, æqualia respectiuè lateribus KF, FC, angulos continentia inæquales; erunt in illis per prop. 24. lib. 1. elem. bases inæquales AC, KC; hoc est dictæ duæ lineæ contingentes Parabolam. Sed & nullæ aliæ ex eodem puncto C dato, duci poterunt contingentes ipsam Parabolam, vti facilè probabitur ex principijs allatis in corollario nostro 2. præcedente. Quare propositum erit manifestum.

COROLL. NOSTRVM IV.

In Hyperbola: ex dato puncto in axe transuerso eius, infraque centrum eius, extraque ipsius locum & lineam curuam; duæ solùm rectæ lineæ transmittentur ipsam contingentes, singulæ in vnico puncto; vnaque erit ex vna parte axeos transuersi, altera ex alia parte: & erunt æquales inter se.

Svppositio. Datum sit punctum G, infra centrum H, in axe CHB transuerso Hyperboles, & extra eius locum & lineam curuam; transmissæ sint ex dictis in Hyperbola, duæ rectæ lineæ GA, GE, ipsam contingentes, singulæ in proprio puncto vnico, illa in A, hæc in E. Dico nullam aliam duci posse ex dicto puncto G, rectam lineam quæ Hyperbolam ipsam contingat; tùm ipsas contingentes GA, GE, esse æquales inter se.

Demonstratio. Primùm demonstrabitur ex principijs allatis in demonstratione corollarij nostri secundi. Alterum verò sic. Ex praxi allata duceudi duas rectas GA, GE; recta linea ADE est ordinatim applicata ipsi axi CHGBD in puncto D, & ad angulos rectos; ergo per definit. 18. & 10. lib. 1. inter primas, recta linea AE erit bifariàm diuisa in D, ab axe CBD. Quare cùm in triangulis GDA, GDE, duo latera GD, DA, sint æqualia respectiuè duobus lateribus GD, DE, angulosque rectos contineant æquales per 12. axiom. lib. 1. element. bases eorum GA, GE, erunt per prop. 4. lib. eiusdem 1. elem. æquales inter se. Atque ita coroll. hoc erit manifestum.

COROL-

COROLL. NOSTRVM V.

In Hyperbola: Ex dato puncto extra eius axem transuersum, & intra angulum continentem ipsam, & extra eius lineam curuam, & locum; duæ solùm rectæ lineæ deduci poterunt ipsam contingentes, singulæ in vnico puncto particulari, vna ad vnam partem diametri transeuntis per ipsum datum punctum, altera ad aliam partem; quæ erunt inæquales inter se.

SVppositio. Datum sit punctum K extra Hyperbolæ ALO locum, & extra eius axem transuersum AB, lineamque curuam, sed intra angulum EHF continentem ipsam factum ab eius asymptotis HE, HF, propriè dictis, prouenientibus ab centro H, Hyperboles. Dico duas solùm lineas rectas KA, KO, duci posse contingentes Hyperbolam, quarum vna sit ad vnam partem diametri HKLM transeuntis per punctum datum K, altera ad aliam: tùm ipsas esse inæquales inter se.

Demonstratio. Imprimis per ea quæ diximus in Hyperbola, duæ prædictæ rectæ lineæ in casu dato, videlicet KA, KO, sunt singulæ contingentes Hyperbolam datam in vnico puncto, illa in A, hæc in O; & recta AMO est ordinatim applicata diametro HKLM transeunti per K punctum datum: quare per defin. 12. & 10. lib. 1. inter primas, illa recta linea AMO, bifariàm erit diuisa in puncto M. Præterea ex dictis ac demonstratis in coroll. nostro 2. si aliæ rectæ lineæ duci possent ab eodem puncto K, contingentes Hyperbolam vero contactu, sequerentur absurda ibi commemorata: igitur verum erit, quod nulla alia ab duabus KA, KO, ab dato puncto duci poterit contingens in vnico puncto Hyperbolam. Restat vt probemus prædictas duas rectas KA, KO, esse inæquales: Esto si fieri possit sint æquales; tunc quia in triangulis KMA, KMA, duo latera KM, MA, sunt relatiuè æqualia duobus lateribus KM, MO, & bases KA, KO introductæ æquales, erunt anguli deinceps ad M æquales per 8. prop. lib. 1. elem. ideoque recti per defin. 10. eiusdem lib. 1. elem. Porrò recta AMO occurrens duobus in punctis A, & O, lineæ curuæ Hyperboles, non erit parallela vlli asymptotorum eius HE, vel HF; nam per coroll. nost. 2. ad prop. 13. ipsa tantùm vni puncto Hyperbolæ occurreret, contra concessa; igitur ipsa recta AMO, producta vtrimque occurret ipsis asymptotis. Et si concipiamus infinitas lineas ex punctis diametri HM actas parallelas prædictæ AMO, vtrimque productas, secabuntur per prop. 11. Procli ab asymptotis HE, HF, & ab obuia linea curua Hyperboles: ergo per coroll. nostrum 2. ad propos. 6. ipsæ omnes prædictæ lineæ parallelæ ipsi AMO, erunt ordinatim applicatæ diametro HLM; ideoque bifariàm sectæ ab illa per defi. 12. & 10. lib. 1. inter primas; & per coroll. nost. 2. ad prop. 29. lib. 1. elem. ad angulos rectos; quare per defin. 18. lib. 1. inter primas, diameter HLM data diuersa ab axe HB, Hyperboles datæ, erit axis; contra propos. 48. absurdum hoc arguit falsitatis positionem vnde procedit; videlicet in casu dato, rectas KA, KO, esse æquales inter se: igitur erunt inæquales, sicuti asseruimus.

COROLL. NOSTRVM VI.

In Hyperbola: ex dato puncto in vna asymptotorum eius, vnica solùm recta linea ipsam Hyperbolen contingens in vnico puncto, transmitti potest ad partes alterius asymptoti.

SVppositio. Sint asymptoti HE, HF, ex centro H ipsius Hyperboles datæ; & punctum F datum in asymptoto FH. Dico vnicam solùm rectam lineam FAE, contingentem in vnico puncto A ipsam Hyperbolen duci posse, versus alteram HE asymptotum.

Demonstratio. Duximus illam in hac propositione; & ostendimus occurrere alteri asymptoto EH in puncto E: quare ipsa recta FAE ducta erit ex puncto dato F in asymptoto HF, versus alteram asymptotum HE. Quod verò alia huiusmodi recta contingens in vnico puncto Hyperbolam, ex eodem puncto F duci nequeat. Probatur: si enim esset possibile, vel contingeret lineam curuam Hyperboles, infra rectam AE, vel infra rectam AF; non enim alia ex eodem puncto F duci potest contingens in A puncto, diuersa ab ducta, quandoquidem per axiom. 21. lib. 1. congruunt, & eadem est: sed & in primo casu ex duobus assignatis, talis recta linea introducta, vel transibit supra totam rectam FAE contingentem, vel infra illam, contingendo in G puncto vnico Hyperbolam; vel infra illam; si primum, ista introducta contingens secaretur ab recta FAE producta vel non producta in alio puncto H, & sic duæ rectæ lineæ diuersæ clauderent spatium contra 14. axiom. lib. 1. elem. si secundum, quia per prop. 8. lib. 1. Hyperbolæ linea curua potest in infinitum protendi, & hæc recta introducta tangens includitur inter duo puncta F, & G, obuiam secabit lineam curuam Hyperboles in puncto I, antequam contingat in G puncto; quod repugnat vero contactui. In secundo vero casu: esto si fieri possit recta linea FK contingens in K puncto lineæ curuæ Hyperbolea vnico, produci illa poterit vltra K in infinitum; & sic semper diuaricabitur magis ac magis ab linea curua contacta in K, ad quam magis ac magis semper accedit asymptotus HF distantia quacumque data minore, per prop. 14. conuenient ergo seu sibi mutuo occurrent in alio puncto L, duæ diuersæ rectæ, HFL asymptotus, & introducta tangens FKL; & sic contra

14. ax.

14. axiom. lib. 1. element. duæ rectæ lineæ claudent spatium. Aliter demonstrabimus rectam FK non esse contingentem, licet introducatur: nam per prop. 3. occurret alteri asymptoto HE, occurret igitur prius obuiæ lineæ curuæ Hyperboles producendæ in infinitum iuxta propos. 8. lib. 1. quare hæc introducta tangens secabit lineam curuam Hyperboles, quod repugnat vero contactui. Hæc absurda indicant fieri non posse vt alia contingens recta Hyperbolam esse possit in hoc casu, præter rectam FAE. Quod erat propositum in hoc corollario.

COROLL. NOSTRVM VII.

In Hyperbola ex puncto dato intra angulum qui est deinceps ad angulum ipsam continentem; non potest duci nisi vna recta linea ipsam contingens in vnico puncto.

SVppositio. Sint Hyperboles datæ, asymptoti FHN, PHM, ex centro H, hyperboles procedentes, & in eo se mutuo intersecantes; angulusque MHN continens Hyperbolen; & anguli PHN, FHM, deinceps ad illum: punctumque datum K intra locum anguli PHN deinceps. Dico vnicam solùm rectam lineam KA duci posse contingentem Hyperbolam datam in vnico A puncto, ex puncto illo K dato.

Demonstratio. Illam rectam KA contingentem duximus in casu vltimo pro Hyperbola in hac propositione. Superest vt ostendamus, nullam aliam duci posse ex illo puncto K, contingentem Hyperbolam in vnico puncto, vero contactu, diuersam ab KA. Esto si fieri possit alia recta huiusmodi: Hæc imprimis vel transibit supra rectam KA productam vtrimque in infinitum, & conuenientem eum vtraque asymptoto in R, & S, per propos. 3. vel infra illam, contingendo in C puncto vnico ipsam Hyperbolam infra punctum A; si primum secabit iterum in M, rectam KAS, & sic duæ rectæ lineæ diuersæ spatium claudent, contra 14. axiom. lib. 1. element. si secundum, quandoquidem linea curua Hyperboles extendi iuxta propos. 8. lib. 1. potest in infinitum, obuiam ipsam secabit in O, recta KC, antequam contingat ipsam in C, & sic eam vero contactu non continget, sed secabit: Vel continget in aliquo alio puncto ad partes dexteras ipsius puncti A; hæc porrò recta introducta, vel erit parallela asymptoto PHM, vt est recta KD, vel alteri FHN sicuti est recta KL; si recta KD, hæc secabit in D puncto vnico lineam curuam Hyperboles, & non continget vero contactu, per nost. coroll. 2. ad prop. 14 si verò adstruatur recta KL parallela asymptoto FHN, quæ nulla ratione occurrere potest Hyperbolæ ex eius natura, multò minus illa KL procedens extra locum terminatum hyperbola & illa asymptoto FHN, ipsi Hyperbolæ occurret, & sic eam contingere non poterit. Quod si recta introducta nulli asymptotorum sit parallela, vt recta KE contingens in E puncto Hyperbolam ad partes dexteras puncti A, si transeat infra rectam KAM, obuiam asymptotum FHN secabit in puncto I; producta verò vltra K, secabit aliam asymptotum PHM, cui non est parallela in alio puncto P, ad partes superiores H centri; si primum, recta PKIE, secabit Hyperbolam in E, ingrediendo intra eius locum; nam recta linea HX ducta et parallela per prop. 31. lib. 1. elem. ex centro H, secabit angulum MHN, continentem Hyperbolam datam, per lemma 5. ergo hæc recta HX cùm sit diameter transuersa ipsius Hyperboles per coroll. propos. 51. lib. 1. secabit in X, ipsius Hyperboles lineam curuam, ideoque etiam recta PKIE, ipsi parallela, secabit eandem Hyperbolam per coroll. nost. 2. ad propos. 26. lib. 1. si verò dicatur recta KIE producta vltra K non occurrere in P, asymptoto MHP, suprà centrum H, sed infra illud in puncto T, iterum occurret in V, alteri asymptoto FHN, & sic duæ rectæ lineæ spatium comprehendent, contra 14. axiom. lib. 1. elem. si denique vt perueniat ad E punctum contactus introducti, incedat supra rectam KAM, necessario obuiam ipsam KAM, producendam in infinitum intersecabit in alio puncto, sic verò duæ rectæ lineæ figuram claudent, contra 14. axiom. lib. 1. elem. Cùm ergo ex introductione alterius rectæ contingentis hyperbolam datam in vnico puncto, diuersæ ab recta KAM, ductæ ab eodem puncto K dato, sequatur duas rectas spatium comprehendere, vel introductam rectam huiusmodi secare & non contingere hyperbolam vero contactu. reliquitur propositio huius corollarij nostri manifesta.

COROLL. NOSTRVM VIII.

In ellipsi: ex puncto dato in eius axe producto, transmitti solùm poterunt duæ rectæ lineæ ipsam contingentes, in vnico puncto singulæ; vna ad vnam partem ipsius axeos, altera ad aliam; quæque erunt æquales inter se.

ILlas duximus in ellipsi ex puncto G producti axeos CB extra ipsam ellipsim, videlicet GA ad partem sinistram axeos prædicti, & GF ad partem dexteram; cùm ageremus in hac propositione de ducenda recta contingente ellipsim, ex puncto dato in producto eius axe. superest vt demonstremus alias rectas ipsam ellipsim contingentes ex eodem puncto G, deduci non posse; & ipsas commemoratas duas esse æquales inter se.

Demonstratio. Esto si fieri possit alia recta contingens ellipsim diuersa ab GA, GF, deducta ab eodem puncto G dato in producto eius axe CB, extra ellipsim ipsam. Hæc introducta

ducta recta contingens, vel continget in puncto E vnico ellipsim inter A & B, vt recta GE; vel vltra punctum A, vt recta GI, contingens in vnico puncto I. Si primum producta vltra E recta GE contingens introducta, semper procedet extra ipsam illipsim, ex natura sua; igitur per axiom. 28. lib. 1. elem. secabit rectam GA in puncto H, & sic duæ rectæ lineæ spatium claudent, contra 14. axiom. lib. 1. element. Si secundum, producta GA in infinitum vltra A, procedet ex natura sua semper extra ellipsim, & per nostrum axiom. 28. lib. 1. elem. secabit in K introductam tangentem GI, & sic contra 14. axiom. citat. duæ rectæ lineæ figuram constituent. hæc absurda condemnant introductas alias tangentes rectas ipsam ellipsim, diuersas ab duabus GA, GF, deductas ab eodem G puncto dato. Quod verò duæ rectæ tangentes GA, GF, sint æquales, probatur: Cùm ageremus de ducenda recta GA, tangente ellipsim, in ista propositione, ex puncto G dato in producto eius axe CB vltra B verticem, & extra ipsam ellipsim, probauimus rectam ADF esse ordinatim ad angulos rectos applicatam ipsi axi: quare per definit. 18. & 10. lib. 1. inter primas, erit bifariàm diuisa in puncto D, ab ipso axe BC. Igitur cùm in triangulis GDA, GDF, sint duo latera GD, DA, æqualia respectiuè duobus lateribus GD, DF, contineantque angulos in D rectos æquales per axiom. 12. lib. 1. elem. erunt per prop. 4. lib. eiusdem bases eorum GA, GF, æquales; atque ita manifestum erit hoc corollarium.

COROLL. NOSTRVM IX.

In ellipsi ex puncto quouis dato extra eam, & eius circumferentiam, & eius axem: duæ solum rectæ lineæ ipsam contingentes duci possunt, singula in vnico tantùm puncto; vna ad vnam partem diametri transeuntis per dictum punctum datum, altera ad aliam; quæ erunt inæquales.

SVppositio. Ellipseos datæ sit centrum N datum, vel repertum, per prop. 45. Axis datus LNB vel repertus per propos. 47. Punctum verò datum G, extra ipsam ellipsim, & eius circumferentiam, & axem LNM: ductæque duæ rectæ lineæ GA, GF, contingentes ellipsim ex puncto G dato, singulæ in vnico puncto, per ea quæ docuimus in isto casu; vna ad vnam partem rectæ GNC deductæ ex puncto G dato, per centrum N ellipseos, quæ erit diameter eius per coroll. prop. 51. lib. 1. diuersa ab axe LNM, altera verò ad aliam partem dictæ diametri GNC. Dico nullas alias rectas lineas contingentes ellipsim vero contactu, educi posse ab dato puncto G: & ipsas GA, GF, duas contingentes, esse inæquales.

Demonstratio. Quæcumque aliæ rectæ tangentes vero contactu ellipsim datam, deductæ ab dato puncto G, diuersæ ab duabus GA, GF, introducantur, secum trahent absurdum ostensum in corollario nostro præcedente 8. videlicet duas rectas spatium claudere, contra 14. axiom. lib. 1. element. vt facile considetanti apparebit ex probaris in citato coroll. 8. igitur nullæ erunt huiusmodi aliæ rectæ lineæ tangentes ellipsim deductæ ab dato puncto G, diuersæ ab duabus GA, GF. Iam verò quia ex dictis in praxi ducendatum duarum tangentium GA, GF, constat rectam ADF esse ordinatim applicatam. diametro GBNC, quæ non est axis ellipseos; ipsa recta ADF, bifariàm diuidetur in D ab diametro GBNC, per defin. 12. ac 10. lib. 1. inter primas. Esto verò si fieri possit, duæ rectæ GA, GF, sint æquales: quandoquidem in triangulis GDA, GDF, duo latera GD, DA, sunt respectiuè æqualia duobus lateribus GD, DF, & introducuntur bases GA, GF, æquales; erunt per prop. 8. lib. 1. element. anguli deinceps ad D, æquales, ideóque recti ambo, per defin. 10. lib. 1. elem. Quod si concipiamus per infinita puncta diametri BNC, ductas parallelas rectas ipsi ADF, per propos. 31. lib. 1. element. has secabit dicta diameter BNC, per 11. propos. Procli, ideoque per coroll. nost. 2. ad prop. 18. lib. 1. vtrimque occurrent circumferentiæ ellipseos; & per coroll. nost. 2. ad prop. 29. lib. 1. elem. secabuntur ad angulos rectos ab dicta diametro BNC: quare per coroll. nost. 2. ad prop. 6. ipsæ & recta ADF, erunt ordinatim applicatæ ad diametrum GBNC: Cùm igitur hæc diameter GBNC, diuidat ad angulos rectos, omnes illas æquidistantes chordas parallelas chordæ ADF, ipsa per defin. 18. lib. 1. inter primas, erit axis ellipseos, contra datum. Quare non erit vera positio duarum rectarum tangentium GA, GF, æqualium. Igitur inæquales erunt, sicuti proposuimus.

COROLL. NOSTRVM X.

Ex puncto extra circulum & eius circumferentiam dato; duæ tantum rectæ lineæ ipsum tangentes educi possunt, singulæ in vnico puncto, vnaque ad vnam partem diametri procedentis ex eodem dicto puncto dato, altera ad aliam eiusdem diametri partem.

ET si hoc in elementis Geometricis id ostenderimus in corollarijs 3. & 2. ad prop. 36. lib. 3. element. nihilominus ex dictis in hisce libris conicorum illud idem ostendemus.

Suppositio. Sit punctum G datum extra circulum eiusque circumferentiam, centrum E repertum per 1. propos. lib. 3. elem. per quod ex puncto G traducta sit recta linea GBE, occurrens in B & C, circumferentiæ circuli punctis, primò quidem in B, nam obuiam circumferentiam infringere debet antequam

quam perueniat ad E centrum intra circuli aream situm, & producta vltra E in infinitum, rursus occurret in C per axiom. 28. lib. 1. elem. Dico posse duci ex puncto G dato, duas rectas lineas GA, GF, quæ circulum contingant, singulæ in vnico puncto, vnaque illarum sit ad vnam partem diametri GBEC; altera ad aliam; & quod sint æquales inter se; & quod nullæ aliæ ex dicto puncto G transmitti possint tangentes datum circulum, diuersæ ab duabus GA, GF.

Apparatus. Producta CG vltra G, sumatur per 3. prop. lib. 1. elem. recta Gb æqualis ipsi BG: & per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur recta CB, in D, sicuti est diuisa Cb in puncto G; tunc erit CD ad DB, sicut est CG ad Gb vel GB. Tum per prop. 11. lib. 1. elemen. ex puncto D excitetur recta linea ADF perpendicularis ipsi CB, occurret producta vtrimque in A & F punctis circumferentiæ circuli, per axiom. 28. lib. 1. elem. & erit bifariàm diuisa in puncto D, per prop. 3. lib. 3. element. & quia per coroll. nost. ad prop. 48. diameter BC est axis etiam in circulo: igitur per coroll. nost. 4. ad propos. 47. erit recta ipsa ADF ordinatim applicata diametro seu axi GBDEC. Dico autem rectas ducendas GA, GF, contingere circulum, & esse æquales, & nullas alias transmitti posse ex puncto G, circulum ipsum contingentes vero contactu.

Demonstratio. Quia ex puncto A, vel puncto F, circumferentiæ circuli, ordinatim est applicata recta linea ADF, vel FDA, diametro eius GBC; estque per apparatum vt CD ad DB, sic CG ad GB: per prop. 34. lib. 1. recta GA, & recta GF, circulum contingent. Quoniam verò in triangulis GDA, GDF, sunt duo latera GD, DA, respectiuè æqualia duobus lateribus GD, DF, continentque angulos rectos, æquales per 12 axiom. lib. 1. element. eorum bases GA, GF, erunt per prop. 4. lib. 1. elem. æquales. Quod si aliæ rectæ lineæ diuersæ ab duabus GA, GF, contingentes ipsum circulum duci ab eodem dicto puncto G, possent, absurda commemorata in coroll. nostro 8. cùm de eodem proposito ageremus in ellipsi, redirent, vt considetanti statim apparebit. Igitur nullæ aliæ ab dictis duabus tangentibus esse possunt. Atque ita corollarium manifestum erit.

COROLL. NOSTRVM XI.

In omni sectione coni, & circulo: Recta linea quæcumque ducta in ea, eamque secans ex vtraque parte, perpendicularis axi eius; bifariàm secabitur ab ipso axe.

Demonstratio in Parabola. Si non ita sit, poterimus illam chordam bifariàm secare per prop. 10. lib. 1. elem. & in Parabola per prop. 11. lib. 1. elem. excitare ad angulos rectos versus verticem eius quod est extremum axeos in ea dati, rectam lineam perpendicularem huic chordæ, quæ occurret lineæ curuæ Paraboles in vno puncto; & erit parallela eius axi qui etiam est diameter Parabolæ, per prop. 28. lib. 1. elem. quare etiam erit recta hæc linea educta perpendicularis, diameter ipsius Paraboles per coroll. nost. 1. ad prop. 46. lib. 1. Cùm igitur hæc recta linea ducta perpendicularis diuersa ab eius axe, ad eius chordam, eam bifariàm secet, erit per coroll. nost. 1. ad prop. 46. libri huius, axis datæ Paraboles: Atque ita duos axes in Parabola habebimus, contra propos. 48. hoc absurdum indicat positionem aduersarij esse falsam, nimirum chordam Paraboles sectam ad angulos rectos ab eius axe, non secari bifariàm ab illo, secabitur igitur bifariàm, vti volumus.

Demonstratio in circulo. Quandoquidem datur chorda secta ad rectos angulos ab eius axe, qui est diameter eius ex natura axeos; erit per prop. 3. lib. 3. elem. secta bifariàm. Quod erat concludendum.

Demonstratio in Hyperbola, ellipsi, circulo, & Parabola, vniuersalis, & diuersa ab ea quam attulimus in coroll. nostro ad prop. 47. Per prop. hanc 49. ad extremum axeos sectionis datæ, vel circuli, quod existit in linea curua sectionis, ponatur recta linea perpendicularis ipsi axi per prop. 11. lib. 1. element. ipsa erit contingens in illo vnico puncto sectionem, vel circuli circumferentiam, per coroll. nost. 11. ad prop. 47. sed & datur chorda perpendicularis eidem axi: ergo erunt per prop. 28. lib. 1. element. parallelæ inter se; Igitur per coroll. nost. 7 ad prop. 48. lib. 1. erit ordinatim applicata ipsi axi hæc chorda: ideòque per defin. 18. 10. ac 12. lib. 1. inter primas, erit bifariàm diuisa ab dato proprio axe sectionis vel circuli. Quod erat demonstrandum.

COROLL. NOSTRVM XII.

In Parabola ordinatim applicare ad quamcumque eius diametrum datam, rectas lineas.

Suppositio. Sit recta AB diameter quæcumque Paraboles datæ; & oporteat ad hanc diametrum rectas lineas ordinatim applicare.

Apparatus. Per prop. præsentem ex vertice A educatur recta linea AC contingens in vnico puncto A, ipsam Parabolam. Tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex indumeris punctis diametri huius AB, sitis intra locum Paraboles, educantur rectæ lineæ parallelæ huic tangenti AC; istæ omnes rectæ parallelæ productæ vtrimque occurrent ex vtraque parte lineæ curuæ Paraboles per prop. 18. lib. 1. Dico autem esse omnes huiusmodi rectas parallelas, ordinatim applicatas diametro datæ AB, in Parabola. Nos exempli gratiâ contenti eri-

mus tribus huiusmodi rectis parallelis GDF, HEI, NOP.

Demonstratio. Si diameter data AB, non sit axis Paraboles; quandoquidem axis Paraboles est etiam diameter per def. 18. lib. 1. inter primas; & omnes diameri Parabolæ sunt parallelæ inter se, per coroll. nost. 2. ad prop. 46. lib. 1. ipsa recta linea AC contingens in vnico puncto A, Parabolam, ideoque producta vtrimque extra ipsam incedat; conueniet in K per prop. 24. lib. 1. cum axe eius LM producto extra Parabolam, vel per prop. 11. Procli. Itaque cùm habeamus intra Parabolam rectas lineas GDF, HEI, & sic de alijs huiusmodi, chordas eius, parallelas contingenti rectæ AC, & occurrenti cum diametro seu axe ipsius Paraboles: recta linea AB, diametro seu axi prædicto æquidistans ostensa, & data diameter ipsius Paraboles, incedens per tactus prædicti A punctum, diuidet bifariàm rectam GDF in D, & rectam HEI, in I, & sic reliquas omnes parallelas tangenti AC, per prop. 46. lib. 1. Igitur per defin. 12. lib. 1. inter primas, erunt ordinatim applicatæ ad diametrum AB. Quod si diameter LM sit axis Paraboles; oportebit excitare ad angulos rectos dato axi rectas chordas, per prop. 11. lib. 1. elem. & per coroll. nost. 4. ad propos. 47. erunt ordinatim applicatæ axi dato LM.

COROLL. NOSTRVM XIII.

In Hyperbola, Ellipsi, & circulo, ad eius diametrum datam, ordinatim applicare rectas lineas.

Per istam propositionem 49. ducatur recta linea contingens sectionem vel circuli circumferentiam in vertice sectionis vel circuli, quod est extremum punctum diametri datæ existens in lineæ curua sectionis vel circuli: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex punctis diametri datæ, agantur rectæ lineæ parallelæ illi tangenti rectæ, productæ ex vtraque parte occurrent duobus in punctis sectioni vel circulo in omnibus sectionibus coni, cõprehendendo etiam Parabolam; nam hæc diameter secans tangentem prædictam, secabit etiam istas parallelas per prop. 11. Procli; quare per coroll. nost. 2. ad proposit. 18. lib. 1. occurrent vti diximus vtrimque sectioni coni, Parabolæ, ellipsi, & circulo; & quia in Hyperbola hæc tangens recta, per prop. 3. occurrit asymptotis eius, etiam prædictæ parallelæ rectæ ipsis occurrent, per 11. prop. Procli, ex quo fit vt obuiam lineam curuam Hyperboles secent duobus in punctis. Igitur per coroll. nost. 2. ad prop. 3. erunt bifariàm sectæ ab illa diametro, & in dictis sectionibus & circulo ordinatim applicatæ ab illa diametro, & in dictis sectionibus & circulo ordinarim applicatæ ad illam diametrum. Atque ita satisfecerimus proposito.

Hæc praxis, & demonstratio, conuenit etiam sectioni coni quæ vocatur Parabola.

COROLL. NOSTRVM XIV.

In omni sectione coni, & circulo: si duas rectas lineas æquidistantes in eis accommodatas, diameter propria bifariam secet; secabit etiam bifariàm rectas omnes lineas parallelas illis prædictis bifariàm sectis in eadem sectione vel circulo accommodatas.

Esto si fieri possit non secet bifariàm vnam non transeuntem per centtum sectionis si illud habeat, ex datis parallelis ipsis bifariàm sectis, poterimus illam secare bifariàm per prop. 10. lib. 1. elem. & per hoc punctum medium, & punctum etiam medinm vnius è bifariàm sectis ab data diametro, rectam lineam immittere, quæ per prop. 28. erit diameter sectionis conicæ vel circuli. Iam verò si sectio sit Parabola, duæ diametri eius, data, & ducta se mutuò intersecabunt intra ipsam, contra coroll. nost. 1. ad prop. 27. lib. 1. si verò sit Hyperbola, contra coroll. nost. 5. ad eandem prop. si verò sit ellipsis aut circulus, cùm debeant diametri ad centrum concurrere, duæ rectæ lineæ spatium concludent, contra 14. axiom. lib. 1. elem. hæc absurda condemnant falsitatis positionem contradicentem asserrioni huius corollarij, quæ ideo vera erit.

COROLL. NOSTRVM XV.

In omni sectione coni & circulo. Qualibet rectarum linearum parallelarum præcedentis corollarij sunt ordinatim applicata diametro prædicta.

Nam illas bifariàm diuidit, & sunt parallelæ vni ex datis; ergo per defin. 10. & 12. lib. 1. inter primas, sunt ordinatim applicatæ dictæ diametro.

COROLL. NOSTRVM XVI.

In ellipsi data vna diametro, coniugatam ei reperire.

Apparatus. Per Prop. 31. lib. 1. elem. per quælibet puncta areæ ellipseos minimè sita in data diametro, ducantur rectæ lineæ æquidistantes datæ diametro, quæ vtrimque occurrent lineæ curuæ ellipseos per axiom. 28. lib. 1. elem. duæque illarum bifariàm secentur per prop. 10. lib. 1. element. recta linea per hæc duo puncta media transmissa, vtrimque occurret lineæ curuæ ellipseos per cit. axiom. 28. eritque diameter eius per propos. 28. Dico autem esse diametrum coniugatam datæ.

Demonstratio. Diameter ducta bifariàm diuidens duas rectas parallelas diametro datæ, diuidet etiam per prop. 11. Procli rectas omnes alias parallelas illis, & diametro datæ iuxta prop. 30. lib. 1. elem. ergo per corollarium nostrum

nostrum 14. secabit etiam bifariàm reliquas omnes alias parallelas datæ diametro: ergo ducta diameter erit per defin. 17. lib. 1. inter primas, coniugata diameter datæ in ellipsi: Fecimus ergo imperatum.

COROLL. NOSTRVM XVII.

In circulo, data vni diametro; coniugatam inuenire.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. ele. agantur chordæ æquidistantes datæ diametro: & harum duæ quælibet bifariàm diuidantur per prop. 10. lib. 1. element. per quarum media puncta recta linea immittatur; quæ erit per proposit. 28. diameter altera circuli. Dico autem hanc esse diametrum coniugatam datæ.

Demonstratio. Hæc ducta diameter diuidens bifariàm duas chordas æquidistantes diametro datæ, ideóque parallelæ inter se; sicuti etiam omnes aliæ huiusmodi ductæ parallelæ sunt istis parallelæ per prop. 30. lib. 1. element. diuidet etiam bifariàm rectas omnes alias parallelas prædictas, per coroll. nost. 14. igitur per defin. 17. lib. 1. inter primas, ducta seu inuenta diameter erit coniugata datæ in circulo.

Aliter. Ductis huiusmodi chordis in circulo æquidistantibus datæ diametro eius, per prop. 31. lib. 1. elem. excitetur per proposit. 11. eiusdem lib. in centro circuli recta linea seu diameter perpendicularis ipsi datæ diametro; hæc diameter ducta erit etiam perpendicularis æquidistantibus chordis datæ diametro, per coroll. nost. 2. ad prop. 29. lib. 1. elem. Dico autem hanc ductam diametrum esse coniugatam datæ.

Demonstratio. Quandoquidem ducta diameter secat per 11. propos. Procli rectas omnes æquidistantes diametro datæ; & ad angulos rectos per apparatum: secabit illas bifariàm per 3. prop. lib. 3. elem. quare per defin. 17. lib. 1. inter primas, hæc ducta diameter erit coniugata datæ, in circulo.

Aliter. Ex centro circuli excitetur per proposit. 11. lib. 1. element. recta alia linea seu diameter perpendicularis datæ diametro circuli quæ ex natura sua incedit per illud centrum. Dico hanc ductam diametrum esse coniugatam datæ.

Demonstratio. Si enim ex infinitis punctis huius diametri ductæ, agantur rectæ chordæ in circulo parallelæ datæ diametro; erunt secta ab ducta diametro per prop. 11. Procli, & ad angulos rectos per prop. 29. lib. 1. element. igitur etiam bifariàm per prop. 3. lib. 3. elem. ergo per def. 17. lib. 1. inter primas, erit ducta diameter coniugata datæ in circulo.

COROLL. NOSTRVM XVIII.

In oppositis sectionibus; data vni eius diametro transuersa, rectas lineas ordinatim applicare.

Per coroll. nost. 13. Ad diametrum transuersam communem oppositis sectionibus ex propos. 14. lib. 1. in vna datarum oppositarum sectionum ordinatim applicentur quotlibet rectæ lineæ quæ iuxta praxim traditam in citato coroll. nostro 13. positæ sunt parallelæ tangenti hyperbolam in extremo lateris transuersi dati. Quod si per centrum dictæ Hyperboles reperiendum per prop. 45. si datum non sit, recta linea ex puncto contactus prædicti recta linea ducatur, & producatur vltra centrum, occurret sectioni oppositæ, per prop. 29. lib. 1. productaque vlterius procedet intra ipsius Hyperboles locum, per coroll. nost. 1. ad prop. 35. lib. 1. Insuper per prop. 31. lib. 1. elem. ex punctis huius diametri transuersæ ingredientis intra locum oppositæ sectionis agantur rectæ lineæ æquidistantes rectæ lineæ contingenti alteram sectionem oppositam, ipsæ vtrimque occurrent sectioni in qua ducuntur: nam per prop. 15. asymptoti communes sunt his oppositis sectionibus, quas prædicta linea tangens secat per prop. 3. ergo ductæ istæ parallelæ omnes tangenti ipsas secabunt asymptotos per 11. Procli prop. & sic vtrimque occurrent obuiæ lineæ Hyperboles. Has verò omnes rectas lineas ductas in hac sectione opposita parallelas tangenti alteram sectionem, bifariàm diuidet data diameter transuersa, per prop. 48. lib. 1. diuidens etiam bifariàm alias parallelas eidem tangenti alteram sectionem & ordinatim applicatas datæ diametro iuxta praxim corollarij nostri 13. per defin. 4. ac 10. lib. 1. inter primas. Ergo cùm diameter transuersa data bifariàm secet rectas parallelas ductas intra locum sectionum oppositarum, & accommodatas in eis; erunt per def. 12. lib. 1. inter primas, ordinatim applicatæ ad datam diametrum transuersam, sicuti propositum fuit.

COROLL. NOSTRVM XIX.

In oppositis sectionibus diametrum transuersam reperire; aliter quàm per corollarium nostrum 5. ad prop. 45.

Per hanc prop. 49. Ducatur recta linea contingens in vnico puncto vnam è datis oppositis sectionibus, hæc recta secabit asymptotos communes datis oppositis sectionibus iuxta prop. 15. idque per propos. 3. Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. in altera sectione è datis oppositis, ex quolibet puncto intra eius locum, agatur recta linea parallela prædictæ tangenti rectæ, quæ per prop. 11. Procli, occurret etiam

prædictis asymptotis, ideoque etiam vtrimque occurret duobus in punctis huius sectionis, eritque eius chorda: quæ si bifariàm diuidatur per prop. 10. lib. 1. elemen. & per punctum eius medium ex dicto puncto contactus, recta linea transmittatur: hæc recta erit per prop. 34. diameter transuersa datarum oppositarum sectionum. Atque ita fecerimus imperatum.

Alia methodo. Dico quælibet puncta lineæ curuæ vnius è sectionibus datis oppositis; recta linea vniantur, hæc erit tota intra istam sectionem, per propos. 10. lib. 1. eritque chorda eius: Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. intra aliam oppositam sectionem agatur recta linea parallela prædictæ chordæ; hęc per coroll. nost. 2. ad prop. 15. vtrimque occurret lineæ curuæ huius sectionis, eritque chorda illius. Denique hæ duæ chordæ parallelæ, bifariàm diuidantur, per prop. 10. lib. 1. element. & puncta earum media vniantur recta linea. Dico hanc rectam esse diametrum transuersam quæsitam. Hoc enim manifestum est ex prop. 36.

COROLL. NOSTRVM XX.

In oppositis sectionibus, diametrum rectam reperire.

PEr coroll. nostrum 19. præcedens reperiatur diameter transuersa datarum oppositarum sectionum, & sumpta eius pars terminata inter lineas curuas sectionum, diuidatur bifariàm per prop. 10. lib. 1. elem. hoc punctum erit centrum datarum sectionum oppositarum per 3. defin. lib. 1. inter secundas. Præterea per coroll. nost. 6. ad propos. 2. ducantur asymptoti duæ vnius datis oppositis sectionibus; hæ asymptoti erunt per prop. 15. etiam communes alteri oppositæ sectioni. Iam verò ex punctis vnius asymptotorum istarum productæ vltra centrum, ducantur per propos. 31. lib. 1. elemen. quocumque numero hinc & inde respectu diametri transuersæ inuentæ, rectæ lineæ ipsi dictæ transuersæ diametro æquidistantes; ipsæ productæ vtrimque intersecabunt asymptotos, & sectiones oppositas singulas in vno tantùm puncto, per coroll. nostrum 2. ad prop. 16. Harum verò parallelarum vna terminata vtrimque in sectionibus oppositis bifariàm diuidatur per prop. 10. lib. 1. elem. Denique ex centro inuento vel dato ipsarum sectionum oppositarum ad hoc punctum medium rectæ lineæ æquidistantis ipsi transuersæ diametro transmittatur: hæc recta linea erit diameter quæ recta appellatur, & coniugata transuersæ prædictæ, per proposit. 37. ideoque per definit. 17. lib. 1. inter primas, bifariàm diuidet rectas omnes alias parallelas ductas.

Alia methodo. Ducatur quæcumque recta linea occurrens lineæ curuæ vnius ex sectionibus oppositis ex vna parte, & ex alia parte, alteri lineæ curuæ alterius ex sectionibus oppositis datis; sed non transeat per centrum quod est commune datis sectionibus oppositis iuxta defin. 3. lib. 1. inter secundas. & per hanc prop. 49. ducantur ex his punctis occursuum rectæ lineæ contingentes suam propriam sectionem: hæ duæ rectæ lineæ contingentes concurrent in vnum punctum per prop. 31. Insuper ducta prædicta recta, quæ vnit puncta contactuum prædictorum, bifariàm diuidatur per prop. 10. lib. 1. Denique recta linea ducta per hoc punctum medium, & punctum prædicti concursus duarum rectarum contingentium, erit per propos. 38. diameter recta quæsita.

COROLL. NOSTRVM XXI.

In oppositis sectionibus; diametrum coniugatam data diametro, reperire.

VEl data diameter oppositarum sectionum erit transuersa, vel recta. Si transuersa sic agemus. Per corollarium nost. 6. ad prop. 2. ducantur asymptoti vnius ex oppositis sectionibus, quæ erunt per prop. 15. communes alteri oppositæ; reperto prius centro per prop. 45. per quod incedere debent, & in eo se mutuò decussare. Præterea ex puncto aliquo diuerso ab centro prædicto, alterutrius ex asymptotis ducatur recta linea parallela datæ diametro transuersæ, per prop. 31. lib. 1. elem. hæc parallela ducta secabit alteram asymptotum, & producta vtrimque occurret vtrisque sectionibus per coroll. nost. 1. ad proposit. 16. Tùm per prop. 10. lib. 1. element. hæc recta quatenus terminatur vtrimque in vtrisque sectionibus, bifariàm diuidatur: Recta linea ex hoc puncto medio per centrum oppositarum sectionum datarum traiecta erit recta diameter quæsita coniugata datæ transuersæ, per propos. 37. Quod si ex punctis extremis huius rectæ lineæ ductæ diametro transuersæ datæ, & occurrentis vtrique sectioni, emittantur per hanc proposit. 49. rectæ lineæ tangentes suam propriam sectionem, hæ concurrent per prop. 31. in vnum punctum; per quod, & punctum medium dictę rectæ coniungentis puncta contactuum, & non transeuntis per centrum oppositarum datarum sectionum transmittatur: hæc recta linea erit per prop. 38. diameter recta & coniugata datæ transuersæ diametro, reperta sine inuentione centri per quod transuersa data diameter incedit.

Si verò fuerit data diameter recta, sic inueniemus transuersam ei coniugatam. Per prop. 45. reperiatur centrum vnius ex oppositis datis sectionibus, quod erit commune alteri, ex dictis in defin. 3. lib. 1. inter secundas: hoc verò centrum erit in data diametro recta, nam per illud iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. incedere debet quælibet diameter sectionum oppositarum. Porrò ex huius rectæ diametri puncto aliquo

aliquo quod non sit centrum inuentum, quodque erit in altero angulorum deinceps ad angulum continentem alterutram sectionem è datis, per coroll. nostrum ad prop. 38. per hanc prop. 49. poterimus ducere duas rectas lineas, quarum vna contingat vnam è datis sectionibus, altera alteram; & puncta contactuum vnire recta linea, quæ non transibit per centrum iuxta coroll. nost. 21. ad prop. 32. Tùm per propos. 31. lib. 1. elemét. per centrum inuentum ducere poterimus rectam lineam parallelam nectenti puncta contactuum prædicta, quæ per lemma 3. diuidet angulos continentes datas oppositas sectiones, eò quòd prædicta recta vniens puncta contactuum secet asymptotos, efficientes angulum deinceps ad quemlibet angulorum continentium sectiones datas: igitur hæc recta linea ducta parallela nectenti puncta contactuum occurret vtrisque sectionibus per coroll. nost. 5. ad prop. 2. Dico autem hanc rectam lineam esse diametrum transuersam coniugata datæ rectæ diametro.

Demonstratio. Per coroll. propos. 31. lib. 1. hæc recta linea per centrum ducta parallela nectenti puncta contactuum, & occurrenti datis oppositis sectionibus erit diameter transuersa: sed & per prop. 39. data diameter recta quia ostensa est transire per punctum concursus duarum rectarum contingentium sectiones oppositas, & centrum, bifariàm secabit rectam lineam vnientem puncta contactuum. Igitur prædicta diameter transuersa parallela bifariàm sectæ lineæ, ab recta diametro data, erit per prop. 37. coniugata datæ diametro rectæ. Et sic ad praxim reduxerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM XXII.

In oppositis sectionibus, diametro earum recta applicare rectas lineas ordinatim.

PEr corollarium præcedens 21. reperiatur diameter transuersa coniugata datæ rectæ diametro; & per propos. 31. lib. 1. element. ex punctis alterutrius sectionum datarum, agantur infinitæ rectæ lineæ, velquocumque numero æquidistantes dictæ transuersæ diametro; ipsæ productæ occurrent alteri sectioni oppositæ, per coroll. nostrum 2. ad prop. 16. tùm per 11. proposit. Procli secabuntur ab data recta diametro secante transuersam positam: sunt autem parallelæ diametro coniugatæ transuersæ positæ; ergo per proposit. 30. lib. 1. element. erunt parallelæ inuicem; & per definit. 17. lib. 1. inter primas, bifariàm secabuntur ab diametro data recta. Quare per defin. 16. lib. 1. inter primas, erunt ordinatim applicatæ diametro datæ rectæ, sicuti propositum fuit.

COROLL. NOSTRVM XXIII.

Si duæ rectæ lineæ contingant sectionem coni, & circuli circumferentiam, ab externo eodem puncto procedentes: recta linea coniungens puncta contactuum, erit ordinatim applicata ad diametrum sectionis, vel circuli, procedentem ab dicto puncto externo, & per medium punctum rectæ prædictæ lineæ vnientis puncta contactuum.

SVppositio. Duæ rectæ lineæ AB, AC, contingant sectionem coni vel circuli circumferentiam in punctis B & C, procedentes ab puncto A externo: sitque recta linea BC, vniens puncta contactuum, bifariàm diuisa in D, ab diametro AD sectionis vel circuli, procedente ab dicto puncto A. Dico rectam hanc BDC esse ordinatim applicatam ad diametrum AD.

Apparatus. Ab puncto B, si non ita sit vti proponitur, poterimus concipere rectam lineam BEF ordinatim applicatam diametro AD, quæ per def. 10. ac 11. lib. 1. inter primas bifariàm secabitur in E ab diametro AD; eiusque extremum aliud punctum F non erit in diametro coniugata datæ ipsi AD, cui debet esse parallela iuxta definit. 17. lib. 1. inter primas. Sed neque recta BDC vniens puncta contactuum poterit transire per centrum circuli vel ellipseos, per coroll. nost. 1. ad prop. 27. Igitur in circulo & ellipsi recta linea CF ducenda & existens tota intra ipsas figuras, per proposit. 10. lib. 1. secabit ipsas inter duas coniugatas diametros; producta ergo conueniet cum diametro AD, per proposit. 25. lib. 1. & eius corollarium nostrum. In Parabola verò & Hyperbola conueniet cum eadem diametro AD, per prop. 22. lib. 1.

Demonstratio. Datur recta BDC bifariàm secta in D, ab diametro AD; & ostendimus ex positione aduersarij rectam aliam BEF, etiam secari bifariàm in E ab eadem diametro AED: Cùm igitur in triangulo FBC, duo latera CB, FB, sint proportionaliter secta in D, & E, hoc est bifariàm; erit recta CF parallela rectæ DE, hoc est diametro datæ DA: Probauimus autem ex positione aduersarij rectam CF concurrere cum diametro DA data. Igitur duo pugnantia habemus, prouenientia ex positione aduersarij negante rectam datam lineam BDC, esse ordinatim applicatam dictæ diametro AD. Igitur erit vti proposuimus.

COROLL. NOSTRVM XXIV.

In Hyperbola vna, præscindendo ab opposita in eodem plano sita cum altera: nulla est diameter recta propriè nullaque diametri coniugata; nullique axes coniugati, licet sit diameter transuersa, & centrum in illa vnica Hyperbola.

IN Hyperbola vnica, præſcindendo ab oppoſita ſua, eſſe diametrum tranſuerſam conſtat ex prop. 12. lib. 1. Centrum verò ex def. 1. lib. 1. inter ſecundas.

Cùm autem recta diameter includat ex ſua natura explicata defin. 15. lib. 1. inter primas, duas Hyperbolas ſeu lineas curuas, inter quas media ſit; & rectas omnes lineas ab vna ad aliam tranſmiſſas cuidam alteri rectæ parallelas, bifariàm diuidat: manifeſtum eſt, ſi vnica tantùm detur linea Hyperbolica curua, præſcindendo ab alia oppoſita, nullam poſſe diametrum rectam in illa vnica Hyperbola fingi aut concipi ab intellectu, deficiente fundamento aſſignato.

Præterea quoniam coniugatarum diametrorum vna eſt tranſuerſa, altera recta in oppoſitis ſectionibus; nullaque eſt recta huiuſmodi diameter in vnica Hyperbola, vti modò probauimus: euidens eſt in vnica ſolùm Hyperbola nullas eſſe diametros coniugatas.

Vltimò quia coniugati axes, ſunt per def. 19. lib. 1. inter primas, diametri coniugatæ, & ex dictis nullæ ſunt in Hyperbola vnica coniugatæ diametri; nulli quoque erunt in vnica Hyperbola coniugati axes. Atque ita propoſitum probatum erit.

COROLL. NOSTRVM XXV.

In Hyperbola, & oppoſitis ſectionibus: centrum à quo procedunt diametri eius, vel illarum, eſt extra eius vel earum locum, & lineam curuam aut lineas curuas.

ANgulus enim continens Hyperbolen, extra ipſam eſt, vt cõtinens extra contentũ; Angulus autem continens Hyperbolen, eſt per def. 5. angulus ipſius Hyperboles; & angulus Hyperboles, eſt per def. 4. factus ab aſymptotis duabus prouenientibus à centro ipſius Hyperboles, nulla ratione occurrentibus lineæ curuæ Hyperboles: igitur centrum à quo proueniunt iſtæ aſymptoti iuxta def. 3. extra ipſã Hyperbolam erit, & extra eius lineam curuam. Et quia per prop. 15. aſymptoti ſunt communes oppoſitis ſectionibus quæ ſunt ſingulæ Hyperbolæ, centrum etiam alterius Hyperboles oppoſitæ, quod idem eſt cum centro alterius iuxta ea quæ diximus in defin. 3. lib. 1. inter ſecundas, erit extra ipſam, & eius lineam curuam: ideoque extra oppoſitarum ſectionum curuas lineas, & locum ſeu aream ſingularum.

COROLL. NOSTRVM XXVI.

In ellipſi, circulo, & oppoſitis ſectionibus; inuenire duas coniugatas diametros.

IN ellipſi, per prop. 45. reperiatur centrum: In oppoſitis ſectionibus per coroll. noſt. 1. ad cit. prop. 45. In circulo per prop. 1. lib. 3. elem. Tùm in eiſdem recta linea ex centro ad aliquod punctum lineæ curuæ aſſignatarum deducatur; quæ producta in ellipſi & circulo vltra centrum, alteri puncto lineæ curuæ ipſarum figurarum occurret; in oppoſitis ſectionibus producta vltra centrum, alteri lineæ curuæ oppoſitæ occurret, per prop. 29. lib. 1. Hæ omnes rectæ lineæ erunt per coroll. prop. 51. lib. 1. diametri propriæ dictarum linearum curuarum. Iam verò in ellipſi, datæ illi diametro prædictæ reperiatur coniugata per coroll. noſt. 16. In circulo per coroll. noſt. 17. In oppoſitis ſectionibus per coroll. noſt. 20. vel 21. factum erit quod proponitur.

COROLL. NOSTRVM XXVII.

In oppoſitis ſectionibus quæ coniugata appellantur; vnicum eſt commune centrum, quod eſt extra ipſas & ſingularum propria loca.

CVm enim per def. 9. ſint quatuor Hyperbolæ, quarum duæ ſint oppoſitæ, & aliæ duæ oppoſitæ; & habeant aſymptotos communes per prop. 17. quæ nullam ex illis attingere poſſunt, prouenientque ex centro duarum oppoſitarum, quod ex corollar. noſtro 25. extra earum locum, & lineas curuas eſt: euidens eſt vnicum centrum eſſe commune dictis coniugatis ſectionibus oppoſitis, ſitumque extra ipſas & ipſarum loca propria.

COROLL. NOSTRVM XXVIII.

In Parabola. Si diameter eius rectam lineam in ea accommodatam ſecet bifariàm; ſecabit etiam omnes alias rectas in ea accommodatas æquidiſtantes bifariàm ſecta; eruntque omnes illæ, & data prima bifariàm ſecta, ordinatim applicatæ ad eandem dictam diametrum.

SVppoſitio. Eſto Parabola DCE, eiuſque diameter CGF, bifariàm diuidens in G puncto, rectam A B in ea accommodatam. Dico hanc diametrum diuidere bifariàm in F, rectam DE parallelam ipſi AB, accommodatam in ipſa Parabola; & ſic alias omnes huiuſmodi rectas lineas æquidiſtantes ipſi AB, accommodatas in eadem ipſa Parabola: tùm illas omnes parallelas ſimul cum data AB, eſſe ordinatim applicatas ad diametrum datam CGF.

Apparatus. Imprimis diameter CGF, producenda infra G, quia ſemper procedit intra locum Paraboles, non occurrendo alteri puncto lineæ curuæ illius diuerſo ab C vertice, per coroll. noſt. 1. ad prop. 26. lib. 1. ſicut ſecat in G, rectam AB, ſic etiam per 11. propoſ. Procli, ſecabit in F, rectam DE parallelam, & reliquas omnes alias parallelas ipſi AB, intra locum ipſius Parabolæ: quæ rectæ omnes

omnes erunt per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inter se. Sed esto, si fieri possit, recta DE non secetur bifariàm in F, ab diametro CGF: poterimus illam diuidere bifariàm in H, per prop. 10. lib. 1. elem. & rectam HG transmittere ac producere vltra G.

Demonstratio. Recta linea HG producta vltra G, occurret per axiom. 28. lib. 1. elem. alicui puncto lineæ curuæ Paraboles, quod erit vertex C, vel aliud K: si eligatur punctum C, vel duæ rectæ lineæ FGC, HGC spatium claudent, contra 14. axiom. lib. 1. element. vel segmentum habebunt commune GC, contra 10. axiom. lib. eiusdem. Si assumatur punctum K; cùm recta linea HGK, diuidat bifariàm duas rectas AB, DE, parallelas accommodatas in data Parabola, illam in G, hanc in F; erit per prop. 28. diameter Parabolæ: Datur autem diameter CGF, eiusdem Parabolæ, & introducta est alia diameter ab positione aduersarij, videlicet HGK, se mutuò secantes in G. Igitur contra coroll. 1. ad prop. 27. lib. 1. duæ diametri Paraboles se mutuò intersecabunt intra locum illius. absurda ista deducta ex positione quod diameter CGF in Parabola secans rectam AB in G bifariàm, non secet etiam bifariàm rectam DE in F, parallelam ipsi AB bifariàm sectæ in G, & reliquas omnes huiusmodi rectas parallelas eidem AB, accommodatas in Parabola; indicant ipsam positionem falsam esse, & assertionem nostram ei contradicentem, veram esse: igitur per defin. 10. & 12. lib. 1. inter primas, erunt ordinatim applicatæ dictæ diametro.

COROLL. NOSTRVM XXIX.

In Hyperbola; si diameter eius rectam vnam lineam in ipsa accommodatam, bifariàm secet; secabit etiam bifariàm rectas omnes alias lineas parallelas bifariàm secta, accommodatas in eadem ipsa Hyperbola; eruntque omnes illæ recta linea ordinatim applicata ad illam diametrum.

SVppositio. In Hyperbola ACB, sit diameter LCGE, procedens ex centro eius L exteriore, iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. & coroll. nostrum 4. ad prop. 27. eiusdem lib. 1. secet verò hæc diameter rectam AB bifariàm in G, accommodatam in ipsa Hyperbola. Sintque quotlibet aliæ rectæ etiam accommodatæ in eadem Hyperbola, qualis est instar omnium recta DE. Dico illam diametrum LCGE, producendam infra G, diuidere bifariàm in F, rectam DE, & reliquas omnes alias huiusmodi rectas parallelas prædictas: tùm esse omnes ordinatim applicatas ipsi diametro datæ.

Apparatus. per prop. 30. lib. 1. elemen. recta DE, & reliquæ omnes parallelæ ipsi AB, erunt inter se parallelæ; easque per prop. 11. Procli secabit diameter data LCGE, sicut secat parallelam AB; idque intra ipsam Hyperbolam, nam per coroll. nost. 1. ad propos. 26. lib. 1. diameter prædicta secat in vnico puncto lineam curuam Hyperboles procedendo semper intra ipsius locum ab illo puncto sectionis, puta C vertice. Secet igitur rectam DE in F puncto: quod si non fuerit medium eius punctum; poterimus illam bifariàm diuidere per prop. 10. lib. 1. elem. in alio puncto H diuerso ac distito ab F; & rectam lineam immittere per puncta H, & G, quæ producta vltra G, terminari debebit in centro L; nam quia diuidit bifariàm in H rectam DE, & aliam rectam AB in G, parallelas; ipsa erit per propos. 28. diameter Hyperboles; ideoque per coroll. proposit. 51. in centro L terminari debebit.

Demonstratio. Recta HGL, ex puncto G ad punctum L, vel congruet cum recta CL; vel non, intersecando lineam obuiam Hyperboles curuam in puncto K: si primum, duæ rectæ FGCL, HGCL, segmentum GCL obtinebunt commune, contra 10. axio. lib. 1. element. si secundum, duæ rectæ lineæ GCL, GKL, claudent figuram, contra 14. axiom. eiusdem lib. Præterea duæ diametri Hyperboles, data FGCL, & introducta ab aduersario HG, se mutuò intersecabunt intra locum Hyperboles, contra coroll. nost. 5. ad propos. 27. lib. 1. Hæc absurda profluentia ex positione contradicente assertioni huius corollarij, condemnant ipsam positionem, & adstruunt assertionem. Denique cùm omnes rectæ lineæ parallelæ ipsi AB, accommodatæ intra Hyperbolam, bifariàm diuidantur ab data diametro; ipsæ per defin. 10. & 12. lib. 1. inter primas, erunt ordinatim applicatæ ipsi datæ diametro.

COROLL. NOSTRVM XXX.

In oppositis sectionibus. Si diameter illarum bifariàm diuidat vnam rectam lineam accommodatam intra alterutram illarum: diuidet etiam bifariàm rectas omnes alias lineas accommodatas intra illas, parallelasque ipsi bifariàm secta; eruntque omnes illa recta linea ordinatim applicata ad illam diametrum.

SVppositio. In oppositis sectionibus IHK, ACB, sit diameter transuersa HLC communis iuxta propos. 14. lib. 1. & centrum L commune ex dictis in def. 3. lib. 1. inter secundas; quæ producta vtrimque secabit in vnico tantùm puncto singulas sectiones, per coroll. nost. 5. ad propos. 26. lib. 1. Hæc verò diameter diuidat bifariàm rectam lineam AB in puncto G, accommodatam intra Hyperbolam ACB, sintverò rectæ lineæ parallelæ ipsi AB, etiam accommodatæ intra datas sectiones oppositas, verbi gratiâ DE intra

hyperbolam ACB; & rectæ IK, MO, in alia oppoſita Hyperbola IHK; & ſic aliæ huiuſmodi quocumque numero intra datas oppoſitas ſectiones ipſas accommodatæ. Dico diametrum HLC, ipſas omnes rectas lineas parallelas prædictas bifariàm diuidere in F, R, N, &c.

Imprimis per corollarium noſtrum 29. præcedens, in Hyperbola ACB, diameter HLC producta infra C, diuidens bifariàm in G, rectam AB, diuidet etiam bifariàm in F, rectam DE; & ſic alias in eadem Hyperbola ACB, accommodatas æquidiſtantes ipſi AB, rectas lineas.

Iam verò probare nos oportet, eandem diametrum HLC productam vltra H, diuidere etiam bifariàm rectas IK, MO, illam in R, hanc in O, & ſic alias, accommodatas in Hyperbola IHK, parallelas datæ AB biſariàm ſectæ in G ab diametro HLC.

Apparatus. Diuidatur per propoſ. 10. lib. 1. element. illarum vna quælibet, videlicet recta IK, biſariàm in puncto R, & puncta R, G, coniungentur recta linea RG.

Demonſtratio. Quia dantur duæ rectæ lineæ AB, IK, æquidiſtantes, & vna eſt in vna ſectione, altera in ſectione oppoſita, rectaque RG linea vnit puncta earum R, G, medias; erit per prop. 36. diameter ipſarum ſectionum oppoſitarum, recta RG: tranſibit igitur per coroll. prop. 51. per centrum L ipſarum, & per axiom. 21. lib. 1. elem. congruent duæ rectæ lineæ LCG, LTG, eadem extrema L, G, obtinentes. Productæ verò rectæ congruent inter ſe, ne duæ rectæ lineæ commune ſegmentum habeant, contra 10. axiom. lib. 1. elem. Quare diameter CLH producta vltra H, diuidet in R biſariàm rectam lineam IK; reliquas verò in eadem ſectione IHK accommodatas parallelas ipſi IK, etiam bifariàm diuidet per coroll. præcedens noſtrum 29. vti rectam MO in N. Et quia omnes huiuſmodi rectæ lineæ bifariàm diuiduntur ab diametro tranſuerſa HLC, parallelæ ipſi AB; erunt etiam per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inuicem; & per definit. 12. libri 1. inter primas, ordinatim applicatæ diametro ipſi HLC.

COROLL. NOSTRVM XXXI.

In ellipſi. Si diameter eius, vnam rectam lineam in ea accommodatam, & non tranſeuntem per centrum eius, ſecuerit bifariàm: ſecabit producta ſi opus ſit, rectas omnes alias lineas in ea accommodatas, & parallelas prædictæ bifariàm ſecta; eruntque omnes huiuſmodi recta linea parallela, ordinatim applicata ad dictam diametrum.

Svppoſitio. Ellipſeos ACBL ſit diameter CFL, incedens per eius centrum ex coroll. propoſ. 51. lib. 1. quod vnicum eſt per coroll. noſt. 2. ad prop. 45. ſecanſque bifariàm in G, rectam lineam AB intra ipſam ellipſim accommodatam, & non tranſeuntem per eius centrum F. Sintque quotlibet numero intra ipſam ellipſim accommodatæ rectæ lineæ æquidiſtantes ipſi AB; quales ſunt rectæ DFE, HKI. Inſtar omnium aſſumemus rectam HKI; quidquid enim dixerimus de iſta, erit applicandum alijs. Hanc ſecabit in K diameter data CFL per prop. 11. Procli. Aſſero autem bifariàm diuidi in puncto K, & eſſe ordinatim applicatam diametro datæ CFL.

Apparatus. Eſto, ſi fieri poſſit recta HKI, non ſit bifariàm diuiſa in puncto K: poterimus illam diuidere in alio puncto M diſtito ab puncto K, per prop. 10. lib. 1. elem. tùm puncta G & M vnire recta linea GM. Iam verò quia duæ rectæ lineæ AB, HI, ſunt parallelæ, earumque media puncta G, M, coniungit recta linea GM, ipſa erit per propoſitio. 28. diameter datæ ellipſeos, quæ neceſſariò per centrum F incedet, per coroll. prop. 51. lib. 1.

Demonſtratio. Quia duarum rectarum GFK, GFM, portiones inter G & F, eadem extrema G, F, obtinent, congruent inter ſe per axiom. 21. lib. 1. elem. duæ ergo rectæ lineæ GFK, GFM, ſegmentum commune obtinebunt, contra 10. axiom. lib. 1. element. hoc abſurdum deriuatum ab poſitione contradicente aſſertioni huius corollarij, euidentem reddit falſitatem poſitionis, & veritatem aſſertionis primæ. Denique quia omnes huiuſmodi rectæ chordæ in ellipſi parallelæ ipſi chordæ eius AB, ſunt inter ſe parallelæ per propoſ. 30. lib. 1. elem. erunt per defin. 12. lib. 1. inter primas ordinatim applicatæ ipſi diametro CFL, quia probatæ ſunt bifariàm diuiſæ ab dicta diametro.

COROLL. NOSTRVM XXXII.

In circulo. Si diameter eius chordam vnam minimè tranſeuntem per centrum eius, bifariàm diuiſerit diuidet producta ſi opus ſit, rectas omnes alias eius chordas æquidiſtantes data bifariàm diuiſa; eruntque ordinatim applicata ad prædictam diametrum.

Imprimis per propoſit. 3. lib. 3. element. diuidens diameter circuli datam chordam non tranſeuntem per eius centrum, diuidet ad rectos angulos; dantur autem chordæ in hoc circulo parallelæ huic, ergo per propoſit. 29. lib. 1. element. & 11. Procli propoſi. illas ſecabit diameter data etiam ad angulos rectos: igitur per propoſit. cit. 3. lib. 3. elem. diuidet illas omnes bifariàm: & per definit. 12. lib. 1. inter primas, erunt ordinatim applicatæ ad prædictam diametrum.

COROL-

COROLL. NOSTRVM XXXIII.

In circulo, rectæ omnes lineæ ordinatim applicatæ uni eius diametro; sunt ad angulos rectos ipsi diametro.

CVm enim per def. 10. lib. 1. inter primas, rectæ omnes illæ lineæ ordinatim applicatæ diametro, sint bifariàm diuisæ in ipso circulo: erunt per prop. 3. lib. 3. elem. ad angulos rectos ipsi diametro.

COROLL. NOSTRVM. XXXIV.

In circulo recta omnes lineæ ordinatim applicatæ ad quamcumque eius diametrum; sunt applicata ordinatim tanquam ad eius vnum axem.

PEr coroll. nostrum 33. præcedens, sunt ad angulos rectos ipsi diametro, & bifariàm diuisæ ab illa per defin. 10. lib. 1. inter primas: ergo cùm ab ipsa diametro diuidantur bifariàm & ad angulos rectos; ipsa diameter erit per defin. 18. lib. 1. inter primas axis vnus in circulo. Dantur autem ordinatim applicatæ; ergo tanquam vni eius axi.

COROLL. NOSTRVM XXXV.

In ellipsi, licet aliqua eius diameter diuisa ab axe, secet bifariàm rectam aliquam eius chordam per centrum transeuntem; non secabit necessariò bifariam rectas omnes chordas in ea ductas æquidistantes ipsi bifariàm diuisa data.

SVppositio, & apparatus. In ellipsi sit data quæuis chorda AD non transiens per centrum eius C; tùm per prop. 31. lib. 1. elem. per centrum C emissa alia chorda FCG parallela ipsi AD; ipsa FCG bifariàm in centro C diuidetur per prop. 30. lib. 1. Diuidendo autem per prop. 10. lib. 1. element. rectam AD bifariàm in L, recta LC transmittatur, producenda vtrimque donec per 28. ax. lib. 1. element. occurrat in N & M, punctis circumferentiæ ellipseos: erit per prop. 28. recta NLCM diameter ellipseos. Iam verò eligatur aliquod punctū O inter C & L, per hoc rectā chorda HOI agatur parallela ipsi AD, vel FG, per prop. 31. lib. 1. elem. erunt istæ chordæ AD, HI, FG, parallelæ inuicem per propos. 30. lib. 1. element. Vltima verò ducta HI bifariàm secabitur in O, ab diametro NLCM, per 11. propos. Procli, & coroll. nostrum 14. Insuper ex centro C ad punctum D extremum chordæ AD, transmittatur recta linea CD, producenda vltra C, donec per axio. 28. lib. 1. elemen. occurrat in E puncto alteri circumferentiæ ellipseos: hæc recta ECD erit diameter ellipseos per coroll. propos. 51. lib. 1. Porrò diameter ista ECD, non transibit per punctum O; alioqui cùm per axiom. 21. lib. 1. elem. portiones duarum diametrorum diuersarum ECD, MCOLN, obtinentes eadem extrema C & O, congruant; duæ istæ diametri quæ sunt rectæ lineæ obtinerent segmentum commune CO: igitur diameter ECD secans per propositio. 11. Procli, chordam HI, ipsam secabit in alio puncto K distincto ac diuerso ab O.

Demonstratio. Ostendimus rectam HI bifariàm esse sectam in O, parallelam chordæ FCG bifariàm sectæ in C centro. Has verò chordas HI, FCG, secat diameter ECKD, illam in K, hanc verò in C; sed istam FCG per centrum C incedentem bifariàm diuidit in C vti ostendimus; illam verò in puncto K non potest diuidere bifariàm, alioqui contra coroll. nost. ad prop. 1. lib. 3. elem. eadem recta linea HI bifariàm bis diuideretur in O, & K: Igitur diameter ECD in ellipsi secans bifariàm chordam eius FCG transeuntem per centrum eius C, non secabit necessariò rectam HI, parallelam chordam ipsi FCG bifariàm sectæ: & sic de reliquis. probauerimus ergo propositum.

COROLL. NOSTRVM XXXVI.

In oppositis sectionibus si recta diameter rectam vnam lineam non transeuntem per centrum earum, & accommodatam inter illas, bifariàm diuidat: diuidet etiam bifariàm rectas omnes alias lineas æquidistantes bifariàm diuisa, accommodatas inter ipsarum lineas curuas; eruntque omnes huiusmodi rectæ lineæ parallelæ, ordinatim applicatæ ad dictam diametrum rectam.

SVppositio. Sint sectiones oppositæ ABC, DEF; earumque diameter recta GH bifariàm secet in H, rectam BH non transeuntem per centrum earum G, accommodatam inter illas. Dico productam diametrum istam rectam GH si opus sit, diuidere bifariàm rectas omnes alias parallelas ipsi BE, & accommodatas inter illas ipsas sectiones oppositas verbi gratiâ instar omnium, diuidere bifariàm in I, rectam AID, parallelam ipsi BHE: tùm dico ipsas rectas BHE, AID, & reliquas huiusmodi, esse ordinatim applicatas ad rectam diametrum GH datam. Quod verò dicemus de hac recta AD, applicandum erit reliquis omnibus huiusmodi rectis parallelis ipsi BE, accommodatisque inter datas sectiones oppositas.

Apparatus. Quandoquidem iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. datur diameter GH recta datarum oppositarum sectionum, procedit ex earum centro G, quod vnicum est ex dictis in defin. 3. lib. 1. inter secundas; & recta BHE datur non incedere per centrum G; poterimus per prop. 31. lib. 1. elem. agere rectam lineam KQL

KGL parallelam ipsi BE, ex centro G, quæ per coroll. nost. 5. ad prop. 16. singulis sectionibus occurret in vno tantùm puncto, eritque diameter ipsarum sectionum per prop. 51. cor. 1. eruntque per prop. 30. lib. 1. elemen. parallelæ rectæ AD, BE, KGL. & quia vnam illarum BE, diameter data recta datur secare in H, secabit etiam alias omnes ipsi parallelas per propos. 11. Procli; & in exemplo, rectam AD, in I, & rectam KL in G. Quoniam autem datur recta BE bifariàm secta in H ab recta GH procedente ab centro G, & data diametro recta sectionum oppositarum, & diameter KGL incedens per centrum G, parallela est ipsi BE bifariàm sectæ: erit per propos. 37. recta KGL diameter transuersa & coniugata datæ rectæ diametro GH.

Demonstratio. Per apparatum est recta KGL diameter transuersa coniugata diametro rectæ GH datæ; & sunt rectæ BHE, AID, & reliquæ omnes positæ accommodatæ inter sectiones oppositas parallelæ diametro transuersæ KGL: ergo per definit. 17. lib. 1. inter primas, erunt bifariàm diuisæ ab recta diametro GHI: igitur per defin. 16. lib. 1. inter primas ipsæ eædem rectæ parallelæ erunt ordinatim applicatæ ad diametrum rectam datam GHI. Quæ erant demonstranda.

COROLL. NOSTRVM XXXVII.

In sectionibus oppositis: licet earum diameter aliqua recta, diuersa ab axe earum recto, secet aliquam rectam lineam per centrum earum transeuntem, bifariàm, accommodatam inter illas: non diuidet necessariò rectas omnes alias lineas inter ipsas sectiones accommodatas, parallelas prædictæ bifariàm sectæ.

SVppositio. Sectionum oppositarum HP, KQ, sit axis HIK, per centrum earum I incedens, iuxta coroll. propos. 51. lib. 1. Sitque earundem sectionum diameter aliqua recta GIF diuersa ab axe earum recto, quæ etiam per idem coroll. cit. centrum I transfigere debet, secans axem transuersum HIK bifariàm in puncto I seu centro, in quo per def. 3. lib. 1. inter secundas bifariàm diuiditur. Dico rectam datam diametrum GIF, diuersam ab axe recto, non diuidere necessariò rectas omnes alias lineas accommodatas inter ipsas sectiones, parallelasque ipsi bifariàm sectæ HIK: exempli gratiâ rectam PFQ, instar omnium, in puncto F, in quo eam secat ipsa data diameter recta GIF, per prop. 21. Procli.

Demonstratio. Ex puncto seu centro I, excitando per 11. prop. lib. 1. elemen. rectam lineam IL ad angulos rectos ipsi diametro seu axi transuerso HIK, erit axis coniugatus seu diameter recta coniugata ipsi transuerso axi HIK, per coroll. nost. ad def. 19. lib. 1. inter primas: diuersa verò erit ab data recta diametro GIF, ex datis: secabit autem hic axis IL rectus rectam PQ in aliquo puncto L diuerso ab F, parallelam ipsi axi HIK transuerso seu coniugato ipsi recto IL, per propsit. 12. Procli; secabit autem axis IL, rectam PQ in L bifariàm per defin. 19. lib. 1. inter primas. Iam verò esto si fieri possit, recta GIF diameter data, secet etiam bifariàm in F eandem rectam PQ: tunc contra coroll. nost. ad propos. 1. lib. 3. elem. eadem recta PQ, bis secaretur bifariàm in L, & F, punctis diuersis ac distitis. Hoc absurdum profluens ex positione contradicente assertioni huius corollarij, accusat falsitatis ipsam positionem, & adstruit veritatem assertionis.

Sed age ostendamus eandem datam rectam diametrum GIF, posse diuidere bifariàm rectas omnes alias lineas accommodatas inter sectiones oppositas, & parallelas alicui rectæ bifariàm diuisæ ab illa, transeunti per centrum.

Apparatus. per coroll. nost. 21. In his sectionibus oppositis, datæ diametro eius rectæ GIF, repetiatur transuersa & coniugata AIB, quæ per coroll. proposit. 51. lib. 1. incedet per centrum I; & conceptis asymptotis communibus iuxta prop. 17. vel ductis per coroll. nost. 6. ad prop. 4. si ex punctis vnius asymptotorum diuersis ab centro I, ducantur infinitæ rectæ lineæ parallelæ ipsi diametro transuersæ AIB, & coniugatæ ipsi datæ rectæ GIF, ipsæ omnes occurrent vtrimque datis sectionibus oppositis per corollar. nost. 5. ad proposit. 16. ideoque erunt accommodatæ inter ipsas sectiones. Has omnes rectas parallelas, & ipsam AIB per centrum transeuntem, dico rectam diametrum datam GIF, secare bifariàm.

Imprimis ipsa AIB bifariàm in centro I diuiditur per propos. 30. lib. 1. ab recta diametro GIF. Alias omnes rectas lineas accommodatas inter sectiones, & parallelas bifariàm sectæ in centro I, rectæ AIB, secabit eadem diameter data recta GIF, per 11. prop. Procli. Vnam instar omnium assumimus rectam CFD; quidquid enim de illa dicemus, applicandum erit reliquis. Quia ipsa est parallela coniugatæ diametro AIB transuersæ, bifariàm in F diuidetur ab recta diametro GIF coniugata ipsi AIB, per defin. 19. lib. 1. inter primas. Poterit igitur recta diameter diuidere bifariàm rectas omnes lineas accommodatas inter sectiones datas oppositas, parallelas vni earum transeunti per centrum bifariàm sectæ ab illa: licet non necessariò sit verum in omnibus, vti ostendimus in priore parte præcedente.

COROL.

COROLL. NOSTRVM. XXXVIII.

In oppositis sectionibus, recta earum qualibet diameter diuidens bifariàm per centrum ipsarum transeuntem rectam lineam & accommodatam inter illas; diuidet etiam bifariàm etiam rectas omnes alias lineas inter sectiones accommodatas parallelasque bifariàm secta in centro; si ista bifariàm secta fuerit diameter transuersa coniugata data recta diametro: si non fuerit coniugata, non diuidet bifariàm prædictas rectas.

PRima pars huius corollarij demonstrata est in secunda parte demonstrationis ad corollarium nostrum præcedens 37. Secunda verò pars probata in prima parte corollarij eiusdem 37.

COROLL. NOSTRVM. XXXIX.

In Ellipsi si vna eius diameter secans bifariàm rectam lineam per eius centrum transeuntem & accommodatam in illa; diuidet etiam bifariàm rectas omnes chordas parallelas illi bifariàm secta; si bifariàm diuisa, fuerit coniugata diameter data secanti: quod si non fuerit coniugata diameter, non diuidet bifariàm chordas illi parallelas.

PRima pars euidens est ex definitione 17. lib. 1. inter primas. Altera pars demonstrabitur, facta suppositione & apparatu sequenti.

Suppositio: In ellipsi sit data diameter ACB incedens per C centrum eius iuxta corollar. prop. 51. lib. 1. diuident bifariàm in centro C per prop. 30. lib. 1. chordam eius DCE transeuntem per centrum ipsum C, & quæ non sit coniugata diameter datæ ACB. sintque chordæ ellipseos infinitæ parallelæ ipsi DCE quas per proposit. 11. Procli secabit data diameter ACB. instar omnium assumimus rectam chordam FG parallelam ipsi DCE, sectam in H ab data diametro ACB. Dico non secari bifariàm in H. & sic de reliquis.

Apparatus. Per coroll. nostrum 56. reperiatur diameter KCI coniugata datæ DCE diametro, quæ etiam per prop. 15. Procli secabit in L puncto rectam FG parallelam ipsi DCE sectam in centro C ab ipsa KCI: & quidem in alio puncto diuerso ab H; nam diuersæ sunt rectæ lineæ KCI, ACB, illa quidem coniugata ipsi ACB, alia verò non coniugata.

Demonstratio. Per defin. 17. lib. inter primas, recta KCI diuidet bifariàm in L rectam FG parallelam diametro DCE coniugatæ ipsi KCI: Quod si data diameter ACB secans bifariàm in C, rectam DCE, secaret etiam bifariàm in H, rectam FG parallelam ipsi DCE; recta linea FG bifariàm bis diuideretur in duobus punctis L & H, distinctis, contra coroll. nost. ad prop. 1. lib. 1. element. Non igitur recta ACB data diameter secans bifariàm in C chordam DCE quæ non est diameter coniugata ipsi ACD; diuidet bifariàm in H, rectam FG chordam parallelam ipsi DCE. & sic de reliquis huiusmodi chordis parallelis ipsi DCE. Quod erat propositum.

COROLL. NOSTRVM XL.

In oppositis sectionibus accommodare duas rectas lineas æquales, vnam in vna, alteram in alia, quæ sint ordinatim applicatæ ad datam diametrum transuersam.

SVppositio. In oppositis sectionibus AEB, CFD, quarum sit data diameter transuersa EGF, eiusque medium punctum G, centrum iuxta def. 3. lib. 1. inter secundas. Oporteat verò productæ isti diametro vtrimque, applicare ordinatim duas rectas lineas AHB, CID, æquales, vnam in vna sectione, alteram in alia opposita.

Apparatus. Sumatur per prop. 3. lib. 1. element. in producta diametro recta EH, æqualis cuicumque rectæ sumptæ FI in altera parte productionis ab puncto seu vertice F. Tùm per coroll. nost. 18. ad hæc puncta H & I, applicentur ordinatim rectæ lineæ AHB, CID, datæ diametro EGF transuersæ, quæ vtrimque occurrent sectionibus proprijs per prop. 19. lib. 1. & sic erunt accommodatæ in proprijs sectionibus. Dico has duas rectas AHB, CID, esse æquales inter se.

Demonstratio. Per prop. 21. lib. 1. Quadratum rectæ AH, ad rectangulum sub EH, HF, erit sicut rectum latus ad transuersum EGF, in sectione AEB; & in altera sectione opposita CFD, erit per eandem prop. quadratum rectæ CI ad rectangulum sub FI, IE, sicut rectum latus ad transuersum EGF; est autem per prop. 14. lib. 1. rectum latus vnius sectionis æquale recto lateri alterius oppositæ; quare per 7. prop. lib. 5. elem. illa recta latera æqualia obtinebunt eandem rationem ad transuersum EGF commune iuxta eandem cit. propos. 14. lib. 1. Quare per 11. prop. lib. 5. elem. quadratum rectæ AH ad rectangulum sub EH, HF, erit vt quadratum rectæ CI ad rectangulum sub FI, IE: rectangulum autem sub EH, HF, æquale est rectangulo sub FI, IE, per 1. prop. lib. 6. elem. (nam æquales bases EH, FI, obtinent ex apparatu, quæ si addantur communi EF rectæ, fient per 2. axio. lib. 1. elem. altitudines æquales HF, IE, dictorum rectangulorum.) Igitur per coroll. nost. 1. ad prop. 14. lib. 5. element. quadratum rectæ AH, erit æquale quadrato rectæ CI; ideoque per 26. prop. Procli, æquales erunt rectæ AH, CI. Sunt autem ex apparatu duæ rectæ lineæ AHB, CID, ordinatim applicatæ diametro datæ transuersæ EGF productæ, ergo

ergo per 10. & 12. def. lib. 1. inter primas, bifariàm diuidentur in H & I, ab dicta diametro transuersa: ostendimus verò ipsarum dimidia, videlicet AH, CI, esse æqualia: totæ igitur AHB, CID, per 7. ax. lib. 1. elem. erunt æquales inter se. Atque ita fecerimus ac demonstrauerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM. XLI.

In ellipsi vel circulo, accommodare duas rectas lineas æquales, ordinatimque applicatas ad eandem eius diametrum.

SVppositio. In ellipsi, vel circulo, cuius diameter AB data sit, oporteat duas rectas lineas æquales accommodare, ordinatim applicatas datæ diametro AB.

Apparatus. Per prop. 3. lib. 1. elem. sumantur ex verticibus duæ rectæ lineæ AG, BH, vna ex vno vertice, altera ex alio, versus centrum, æquales, ita tamen vt earum extrema alia G, H, non conueniant in centro, sed sint intra aream ellipseos: erunt dictæ diametri reliquæ portiones ab dictis extremis ad vertices oppositos proprios, æquales per 3. ax. lib. 1. elem. videlicet GB, HA. Iam verò per coroll. nost. 13. ex punctis G, H, ordinatim applicentur ad AB diametrum datam, rectæ lineæ CGD, EHF, quæ bifariàm in G & H diuidentur per def. 12. ac 10. lib. 1. inter primas. Dico has duas rectas lineas CGD, EHF, ordinatim applicatas datæ diametro AB, esse æquales inter se.

Demonstratio. Per prop. 21. lib. 1. quadratum rectæ CG est ad rectangulum sub AG, GB, sicut rectum latus ad transuersum datum AB; tùm quadratum rectæ EH ad rectangulum sub BH, HA, sicut idem rectum latus ad transuersum idem AB: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit quadratum rectæ CG ad rectangulum sub AG, GB, sicut quadratum rectæ EH ad rectangulum sub BH, HA; ista verò duo rectangula sunt æqualia per propos. 1. lib. 6. elem. propter bases AG, BH, æquales, & altitudines æquales GB, HA, ex apparatu: ergo per coroll. nost. 1. ad prop. 14. lib. 5. element. quadrata rectarum CG, EH, erunt æqualia: ideoque per 16. propos. Procli, ipsæ rectæ CG, EH, æquales; quæ cùm sint semisses ostensæ in apparatu, totarum CGD, EHF; ipsæ CD, EF, erunt per 7. axio. lib. 1. elem. æquales. Fecimus ergo & demonstrauimus imperatum.

COROLL. NOSTRVM XLII.

Inter oppositas sectiones ordinatim accommodare duas rectas lineas æquales inter se, ad earum diametrum rectam.

SVppositio. Sint datæ sectiones oppositæ FAH, GBI; & diameter ECD recta illarum, quæ transibit per centrum C illarum, iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. ad quam sint applicandæ duæ rectæ lineæ verbi gratiâ FEG, HDI, ordinatim, & æquales inter se.

Apparatus. Per coroll. nost. 21. data diametro recta ECD, oppositarum sectionum, reperiatur transuersa ACB & coniugata ipsi ECD. Tum per coroll. nost. 40. ad hanc transuersam ACB productam applicentur ordinatim duæ rectæ lineæ FKH, GLI, æquales, vna in vna sectione, altera in alia, accommodatæ in ipsis sectionibus proprijs; quæ erunt parallelæ inter se, per definit. 13. 15. 16. 17. lib. 1. inter primas. Denique ducantur rectæ FG, HI, quæ erunt accommodatæ inter datas oppositas sectiones. Has dico esse ordinatim applicatas diametro datæ rectæ ECD, & æquales esse.

Demonstratio. Imprimis quia per apparatum, duæ rectæ lineæ FKH, GLI, sunt ordinatim applicatæ diametro ACB transuersæ productæ, secabuntur ab illa in K & L, bifariàm per defin. 13. & 16. lib. 1. inter primas. quia verò sunt ex apparatu dictæ illæ lineæ FH, GI, æquales & parallelæ, erunt per propos. 33. lib. 1. elem. rectæ lineæ FGIH, earum extrema nectentes ad vnam partem, æquales & parallelæ. Sed & sunt earumdem FH, GI, æqualium, & parallelarum semisses FK, GL, æquales & parallelæ, ergo per cit. propos. 33. lib. 1. elem. rectæ lineæ FG, KCL æquales & parallelæ: igitur quia probauimus duas rectas KCL, HI, esse eidem rectæ FG parallelas, erunt inter se parallelæ per prop. 30. lib. 1. element. Data autem diameter recta ECD, secat vnam ex his tribus parallelis inuicem ostensis FG, HCL, HI, videlicet transuersam diametrum KACBL, in centro C; ergo per 11. propos. Procli secabit etiam in E & D, punctis proprijs alias duas FG, HI, parallelas. Denique quia recta ECD per apparatum est diameter coniugata ipsi transuersæ KACBL, cui sunt parallelæ ostensæ rectæ FG, HI, sectæ in E & D, ab ipsa diametro prædicta transuersa; bifariàm secabuntur ab ipsa diametro transuersa in E & D, per definit. 17. lib. 1. inter primas: igitur per defin. 15. & 16. ipsæ rectæ FG, HI, accommodatæ inter datas sectiones oppositas, & ostensæ æquales, erunt ordinatim applicatæ ad diametrum rectam earum datam ECD. Sicut fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM XLIII.

Si in diametro transuersa oppositarum sectionum producta vtrimque, sumantur duæ æquales portiones vtrimque, vna ex vna parte intra vnam sectionum, altera ex alia parte intra alteram oppositarum sectionum, ex verticibus earum: rectæ lineæ ordinatim applicatæ ab his extremis ad hanc diametrum transuersam, erunt æquales inter se; & totæ accommodatæ intra suas proprias sectiones, erunt æquales inter se.

Hoc

HOc ipſum propoſitum fuit in apparatu & demonſtratione ad corollarium noſt. 40. declaratum.

COROLL. NOSTRVM XLIV.

In ſectionibus oppoſitis, ſi duæ rectæ lineæ parallelæ fuerint ordinatim accommodatæ, vna in vna ſectione, altera in alia, fuerintque æquales: abſcindent ex diametro tranſuerſa producta vtrimque, ad quam ordinatim applicatæ ſunt, portiones æquales poſitas inter vertices ſectionum datarum oppoſitarum & ipſas; comparando portiones ſitas inter illas & vertices proprios ſectionum intra quas exiſtunt, tùm portiones inter illas & vertices ſectionum intra quas non exiſtunt.

SVppoſitio. In ſectionibus oppoſitis EAF, GBH, ſint duæ rectæ lineæ parallrlæ, ECF in vna ſectione, GDH in alia, & æquales inter ſe; & ordinatim applieatæ ad diametrum CABD tranſuerſam dictarum ſectionum productam. Dieo quod abſcindant ab ipſa tranſuerſa diametro portiones CA, DB, æquales, ſitas inter ipſas & vertices proprios ſectionum intra quas ſunt ipſæ ECF, GDH; tùm portiones CB, DA, ſitas inter ipſas & vertices ſectionum intra quas non exiſtunt.

Demonſtratio. Quandoquidem per propoſ. 14. lib. 1. ſectionum oppoſitarum latus tranſuerſum AB eſt idem, & latera recta ſunt æqualia; & dantur æqualrs rectæ ECF, GDH, ordinatim applicatæ dictæ diametro tranſuerſæ, & aecommodatæ in ipſis ſectionibus, bifariàm diuidentur per defin. 15. & 16. lib. 1. inter primas, in C & D; erunt per 7. axio. lib. 1. elem. ſemiſſes illarum, EC, GD, æquales; ideoque per 16. prop. Procli earum quadrata æqualia. His poſitis, per propoſ. 21. lib. 1. erit quadratum rectæ EC ad rectangulum ſub CA, CB, ſicut tranſuerſum latus AB ad rectum in ſectione EAF: ſimili modo erit quadratum rectæ GD ad rectangulum ſub DB, DA, ſicut idem tranſuerſum latus ad rectum æquale alteri recto, in ſectione GBA: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit quadratum rectæ EC ad rectangulum ſub CA, CB, ſicut quadratum rectæ GD ad rectangulum ſub DB, DA; oſtendimus autem quadrata rectarum EC, GD, eſſe æqualia: ergo per 14. propoſ. lib. 5. element. rectangulum ſub CA, CB, erit æquale rectangulo ſub DB, DA. Igitur per lemma 32. rectæ CA, DB, erunt æquales; tùm rectæ CB, DA, æquales. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. NOSTRVM XLV.

In oppoſitis ſectionibus, ſi diameter tranſuerſa producta vtrimque, ſecet bifariàm rectas omnes lineas accommodatas in eis; æquidiſtantes alteri earum diametro rectæ: hæc recta diameter diuidet etiam bifariàm rectas omnes parallelas lineas prædictæ diametro tranſuerſæ, accommodatas inter ipſas ſectiones; eruntque hæ duæ diametri coniugatæ datarum oppoſitarum ſectionum.

SVppoſitio. In ſectionibus oppoſitis, tranſuerſa diameter ARB, producta vtrimque ſecet bifariàm in K, C, D, N, rectas lineas IKL, ECF, GDH, MNO, & ſic de alijs accommodatas intra ſectiones datas, & parallelas diametro earum PRS rectæ. Dico hanc rectam PRS diametrum diuidere etiam bifariàm rectas omnes lineas accommodatas inter ipſas datas ſectiones oppoſitas, æquidiſtantes tranſuerſæ AB diametro: & eſſe dictas diametros ARB, PRS, coniugatas datarum ſectionum oppoſitarum.

Apparatus. Imprimis ex coroll. propoſ. 51. lib. 1. diametri datæ ARB, PRS, tranſeuntes per centrum R ſectionum datarum in eo ſe interſecabunt. Tùm ex verticibus A, B, ſumantur per 3. prop. lib. 1. elem. æquales partes AC, BD, de producta diametro tranſuerſa AB: & per prop. 31. lib. 1. elem. per puncta C & D, agantur rectæ lineæ parallelæ ipſi PRS diametro datæ rectæ, has ſecabit per 11. prop. Procli diameter tranſuerſa data, ſicut ſecat rectam diametrum PRS, & quidem in punctis C & D, bifariàm, eruntque accommodatæ intra ipſas ſectiones, & bifariàm diuiſæ in C & D, & ordinatim applicatæ diametro tranſuerſæ datæ, per noſtrum coroll. 30. nam per prop. 30. lib. 1. elem. erunt parallelæ alijs parallelis datis IKL, MNO, ipſi PRS. Porrò ducantur rectæ EG, FH, nectentes extrema puncta ſita reſpectu diametri AB tranſuerſæ, ad eaſdem partes.

Demonſtratio. Quandoquidem ex apparatu ſunt rectæ ECF, GDH, parallelæ, & rectæ AC, DB, æquales; erunt per coroll. noſt. 43. ipſæ rectæ ECF, GDH, æquales: cùm igitur ſint rectæ ECF, GDH, æquales & parallelæ, rectæ lineæ EG, FH, erunt æquales & parallelæ per prop. 33. lib. 1. elem. ſed etiam conſtat ex apparatu, rectas EC, GD, eſſe æquales & parallelas, nam ſunt æqualium ſemiſſes; quare rectæ EG, CD, FH, erunt æquales & parallelæ per cit. prop. 33. lib. 1. elem. & per 30. propoſ. lib. eiuſdem, erunt parallelæ; & æquales inter ſe, per 1. ax. lib. 1. elem. Porrò per propoſ. 30. lib. 1. recta RA eſt æqualis rectæ RB, ergo ſi illis addantur propriæ æquales poſitæ in apparatu, AC, BD, fient æquales per 2. ax. lib. 1. elem. RC, RD, vnde bifariàm erit diuiſa in R, tota recta CRD: ſed ſunt etiam ex apparatu EC, PR, GD, parallelæ, tùm etiam CF, RS, DH, parallelæ: ergo parallelogramma erunt GC, DF, tùm etiam PC, PD, tùm etiam RF, RH: quare per prop. 34. lib. 1. elem. latera PE, RC, SF, erunt æqualia; tùm æqualia latera GP, DR, HS; ergo cùm æqualibus oſtenſis RC, RD, ſint oſtenſæ æquales

PE, SF, GP, HS; erunt per 1. ax. lib. 1. elem. æquales PE, PG, tùm SF, SH; igitur diuisæ erunt bifariàm in P & S, totales rectæ lineæ EPG, FSH, accommodatæ inter sectiones datas oppositas, & parallelæ ostensæ datæ diametro ARB transuersæ; & quidem diuisæ bifariàm in P & S, ab data diametro recta PRS. Cùm igitur recta PRS diameter datarum oppositarum sectionum diuidat bifariàm rectas EG, FH, accommodatas inter illas & non transeuntes per centrum earum R, cùm sint ostensæ parallelæ diametro AB incedenti per dictum R centrum; diuident per nost. coroll. 36. etiam bifariàm rectas omnes alias lineas accommodatas inter dictas sectiones, parallelas illis, vel consequenter iuxta prop. 30. lib. 1. elem. diametro transuersæ datæ AB, cui sunt ostensæ parallelæ. Denique quia probauimus diametrum rectam PRS, diuidere bifariàm rectas omnes parallelas diametro transuersæ AB, accommodatas inter sectiones datas; & diametrum transuersam AB, diuidere bifariàm rectas omnes lineas accommodatas intra sectiones, parallelasque ipsi diametro PRS rectæ: erunt per definit. 17. lib. 1. inter primas, dictæ diametri AB, PRS, coniugatæ datarum sectionum oppositarum.

COROLL. NOSTRVM XLVI.

In Ellipsi, circulo, si in vna diametro sumantur ab verticibus portiones æquales, versus centrum, vna ex vna parte; altera ex alia, modò ipsarum termini non sint centrum: rectæ lineæ ordinatim applicatæ ad hanc diametrum ab his extremis, & accommodata in sectione; erunt inter se æquales.

Svppositio. Ab verticibus A, B, ex diametro AB, sumptæ sint portiones AG, BH, æquales, versus centrum, modò earum termini non conueniant eum centro: Sintque in punctis G & H, ordinatim applicatæ ad diametrum AB, & accommodatæ in sectione, rectæ lineæ CGD, EHF. Dico has duas rectas, esse æquales inter se.

Demonstratio petenda erit ab demonstratione 41. corollarij nostri ad hanc prop. 49.

COROLL. NOSTRVM XLVII.

In Ellipsi vel circulo, si duæ rectæ, ordinatim applicatæ ad aliquam eius diametrum, & accommodata in sectione, fuerint æquales; abscindent ex illa diametro portiones æquales ab verticibus inter illas & vertices viciniores ipsis, & portiones æquales inter illas & vertices remotiores.

Svppositio. Consulendo figuram corollarij nostri præcedentis 46. In ellipsi vel circulo, sint ad diametrum AB ordinatim applicatæ duæ rectæ lineæ CGD, EHF, æquales, & accommodatæ in sectione. Dico portiones diametri, AG, BH, inter ipsas rectas, & vertices viciniores ipsis, esse æquales inter se; tum portiones diametri, inter ipsas & remotiores vertices, hoc est GB, HA, esse æquales inter se.

Demonstratio. Dantur ordinatim applicatæ rectæ lineæ CGD, EHF, diametro AB; ergo per defin. 10. & 12. lib. 1. inter primas, bifariàm in G & H, diuidentur ab diametro AB, cui applicatæ sunt ordinatim: dantur æquales inter se, ergo earum semisses CG, EH, erunt per 7. axiom. lib. 1. elem. æquales inter se; & earum quadrata per 16. prop. Procli erunt æqualia inter se. Est autem per prop. 21. lib. 1. quadratum rectæ EH ad quadratum rectæ CG, sicut rectangulum sub BH, HA, ad rectangulum sub AG, GB: quadratum verò rectæ EH est ostensum æquale quadrato rectæ CG; ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 1. elem. rectangulum sub BH, HA, æquale erit rectangulo sub CG, GB: igitur per lemma 31. diametri portiones GA, HB, erunt æquales, & eiusdem portiones GB, HA, æquales. Quod erat concludendum, sicut fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM XLVIII.

In Ellipsi vel circulo, si vna diameter eius bifariàm diuiserit rectas omnes lineas in ea accommodatas, & æquidistantes alteri eius diametro: hæc altera diameter diuidet etiam bifariàm rectas omnes lineas accommodatas in ipsa figura, parallelasque priori diametro; eruntque hæ duæ diametri coniugatæ.

Svppositio. In ellipsi vel circulo, Diameter AB diuidat bifariàm rectas omnes chordas parallelasque alteri eius diametro KL. Dico quod hæc diameter KL diuidat etiam bifariàm rectas omnes chordas parallelas diametro prædictæ AB: & quod hæ duæ diametri sint coniugatæ.

Apparatus. In diametro AB per 3. proposit. lib. 1. elem. sumantur è verticibus A, B, rectæ æquales AD, BE, quarum extrema D & E, non conueniant in centro C; & per prop. 31. lib. 1. ex punctis D & E, agantur rectæ lineæ chordæ FDG, HEI, parallelæ diametro alteri, KCL; ipsæ erunt per 30. prop. lib. 1. elem. parallelæ inuicem, & ex datis bifariàm diuisæ in D & E ab diametro ACB; & per Corollarium nostrum 46. æquales inter se. Iungantur autem harum extrema F, H, ad easdem partes diametri AB sita, recta linea FH; tùm alia extrema G, I, alia recta GI: hæ duæ rectæ FH, GI, erunt per 10. prop. lib. 1. totæ intra sectionem; quare obuiam diametrum KL secabunt in M, & N; eruntque per prop. 33. lib. 1. elem. æquales & parallelæ. Et quia sunt etiam rectarum æqualium FG, HI, semisses FD, HE, tùm DG, EI, æquales per

7. ax.

7. axiom. lib. 1. elem. erunt per cit. prop. 33. lib. 1. element. rectæ lineæ FH, DE, tùm GI, DE, æquales & parallelæ: igitur habebimus duas rectas FH, GI, accommodatas in sectione parallelas diametro AB, sectas ab altera diametro KL in M & N. Dico autem diametrum KL secare bifariàm chordas FH, GI, in M, & N, & reliquas omnes alias parallelas chordas diametro AB; & esse has duas diametros AB, KL, coniugatas.

Demonstratio. Per defin. 15. lib. 1. element. in circulo duæ semidiametri CA, CB, sunt æquales; & per prop. 30. lib. 1. duæ rectæ CA, CB, ex centro C, ellipseos sunt æquales; ex quibus si demantur rectæ AD, BE positæ æquales in apparatu, relinquentur per 3. ax. lib. 1. elem. rectæ CD, CE, æquales. Porrò cum per apparatum resultent parallelogramma FM, HM, GN, IN; eorumque latera FM, HM, GN, IN, sint per prop. 34. lib. 1. elem. æqualia prædictis æqualibus CD, CE ostensis; erunt per 1. ax. lib. 1. elem. æqualia FM, HM, GN, IN: ideoque tota recta FH, diuisa bifariàm in M ab diametro KL; & tota recta GI diuisa bifariàm in N. Cumque duæ rectæ FH, GI, sint ostensæ parallelæ diametro AB; ipsas altera diameter KL diuidet bifariàm in M & N: sed & per coroll. nost. 14. eadem diameter KL bifariàm secet rectas omnes alias chordas parallelas istis FH, GI, ideoque per 30. prop. lib. 1. element. parallelas priori diametro AB assumptæ. Igitur quandoquidem datur diameter AB bifariàm diuidere omnes chordas parallelas alteri diametro KL; & ostenderimus diametrum KL diuidere etiam bifariàm chordas omnes æquidistantes priori diametro AB: erunt per def. 17. lib. 1. inter primas, diametri AB, KL, coniugatæ in ellipsi vel circulo, sicut fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM XLIX.

In Ellipsi, vel circulo, si fuerint aliquot chordæ ordinatim applicatæ ad vnam diametrum quamcumque datam, inter quas sit vna diameter, vel vna per centrum incedens: hæc diameter, vel recta incedens per centrum ordinatim applicata diametro data, erit coniugata diameter data.

Demonstratio. Quandoquidem dantur chordæ ordinatim applicatæ ad vnam datam diametrum ellipseos vel circuli, & inter eas altera diameter; hæ omnes chordæ erunt per defin. 10. & 12. lib. 1. bifariàm diuisæ ab data diametro, & parallelæ inuicem. Quare cùm hæc data diameter diuidat bifariàm rectas omnes chordas parallelas alteri diametro; hæc altera diameter per coroll. nost. 48. præcedens diuidet etiam bifariàm rectas omnes chordas parallelas priori datæ diametro. Igitur per def. 17. hæ duæ diametri erunt in ellipsi vel circulo coniugatæ, sicuti fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM L.

In oppositis sectionibus, si diameter transuersa diuiserit bifariàm chordas intra ipsas accommodatas, æquidistantes alicui diametro rectæ ipsarum sectionum oppositarum: hæc recta diameter erit coniugata prædictæ transuersæ.

Demonstratio. Quoniam datur transuersa diameter sectionum oppositarum diuidere bifariàm chordas in illis sitas æquidistantes diametro earum rectæ: hæc recta diameter per coroll. nost. 45. erit coniugata ipsi prædictæ transuersæ.

COROLL. NOSTRVM LI.

In sectionibus oppositis, si diameter vna recta diuidat bifariàm rectas lineas accommodatas inter ipsas sectiones oppositas, parallelasque transuersæ earum alicui diametro: hæc transuersa producta vtrimque, diuidet etiam bifariàm rectas omnes parallelas illi rectæ diametro, accommodatas intra ipsas sectiones oppositas; eruntque illæ duæ diametri, recta & transuersa, coniugatæ.

Suppositio. In sectionibus oppositis FDG, HEI, quarum centrum C; diameter ACB recta diuidat bifariàm rectas omnes lineas accommodatas inter ipsas sectiones, parallelasque diametro transuersæ DCE. Dico quod hæc transuersa diameter DCE producta vtrimque, diuidet etiam bifariàm rectas omnes lineas intra ipsas sectiones accommodatas, parallelasque diametro ipsi rectæ ACB.

Apparatus. Ex puncto aliquo F, sectionis FDG, diuerso ab eius D vertice transmittatur per C centrum recta linea FC, quæ producta vltra C, occurret in I puncto alterius sectionis oppositæ, per prop. 29. lib. 1. & bifariàm secabitur in centro C, tota recta FCI, per prop. 30. lib. 1. Iam verò per prop. 31. lib. 1. elem. ex punctis F, & I, agantur rectæ lineæ FH, IG, parallelæ diametro transuersæ DCE; ipsæ per coroll. nost. 2. ad prop. 16. lib. 1. occurrent in H, & G, punctis sectionum oppositarum; eruntque accommodatæ inter sectiones oppositas, & ex datis bifariàm diuisæ singulæ in punctis A & B, ab recta diametro ACB; eruntque per propos. 30. lib. 1. elem. parallelæ inuicem: quare per prop. 29. lib. 1. elem. anguli CFA, CIB, erunt æquales; tùm etiam per prop. 15. lib. 1. element. anguli contrapositi ACF, BCI, æquales erunt: cùm igitur in triangulis ACF, BCI, sint respectiuè duo anguli prædicti æquales duobus prædictis angulis, sintque latera CF, CI, æqualia ostensa; erunt per prop. 26. lib. 1. elem. latera eorum CA, CB, æqualia, ideoque tota ACB diuisa bifariàm in centro C; & reliqua latera æqualia AF, BI; igitur per axioma 6. lib. 1. elem.

horum postremorum æqualium, duplicia videlicet FH, GI, erunt æqualia, hoc est rectæ FH, GI æquales: probatæ autem parallelæ inuicem, ergo si duxerimus rectas lineas FG, HI, erunt æquales & parallelæ per propos. 33. lib. 1. elem. quæ per prop. 10. lib. totæ erunt intra sectiones & in eis accommodatæ. Quoniam autem sunt ostensæ æquales FA, GB, rectæ, & parallelæ; quæ eas nectent FG, ACB, erunt æquales & parallelæ per propos. 33. lib. 1. elem. sicuti etiam rectæ ACB, HI, nectentes æquales & parallelas ostensas HA, IB. Parallelogramma igitur erunt AK, CG, AL, LB; & per prop. 34. lib. 1. elem. rectæ FK, KG, HL, IL, erunt æquales ipsis AC, BC, æqualibus ostensis; vnde per 1. axiom. lib. 1. elem. prædictæ rectæ lineæ FK, KG, HL, IL, æquales ideoque semisses æqualium ostensarum FG, HI, & parallelarum, quas per 11. prop. Procli secabit diameter transuersa DCE producta vtrimque in K & L, quia ipsis parallelam ACB ostensam secat in C centro.

Demonstratio. Diameter transuersa DCE producta vtrimque diuidit bifariàm rectas lineas FKG, HLI, accommodatas intra sectiones, & parallelas datæ diametro rectæ ACB, vti ostendimus in apparatu, ergo per coroll. nost. 30. diuidet etiam bifariàm rectas omnes alias chordas parallelas cuilibet dictarum FKG, HLI, sitas intra datas sectiones oppositas; ideoque etiam æquidistantes datæ diametro ACB rectæ, per prop 30. lib. 1. elemen. Datur autem diameter recta ACB, diuidere bifariàm rectas omnes lineas accommodatas inter datas sectiones oppositas, & æquidistantes diametro transuersæ DCE: ergo per defin. 17. lib. 1. inter primas, duæ prædictæ diametri ACB, DCE, recta & transuersa, erunt inuicem coniugatæ: & si recta ACB secet bifariam rectas omnes parallelas diametro transuersæ DCE, accommodatas inter sectiones oppositas; etiam hæc transuersa DCE diuidet bifariàm rectas omnes chordas in sectionibus ductas parallelas ipsi diametro rectæ ACB. Quæ erant demonstranda.

COROLL. NOSTRVM LII.

In Ellipsi vel circulo. Si recta tangens sit parallela axi; diameter ducta per punctum tactus & centrum erit axis coniugatus.

SIt axis AB, & recta DCE tangens parallela ipsi axi AB: & recta CFG ducta per C contactum & F centrum. Dico esse rectam CFG axem coniugatum dato AB.

Concipiantur infinitæ aliæ chordæ parallelæ tangenti DCE, qualis est DIK, ipsæ erunt per 30. prop. lib. 1. elem. parallelæ axi AB; & per coroll. nost. 2. ad prop. 3. ordinatim applicatæ diametro CFG. quare per coroll. nost. 49. recta CFG erit diameter coniugata datæ AB, quæ cùm sit axis, alter CFG erit ei coniugatus.

COROLL. NOSTRVM LIII.

In omni sectione coni & circulo; si detur recta linea ordinatim applicata diametro: recta omnes linea parallela illi ordinatim applicata, & accommodata in data sectione eadem, vel circulo; erunt ordinatim applicatæ ad eandem diametrum prædictam.

DAta enim recta linea ordinatim applicata diametro, respectum habet ad aliam cui parallela est, iuxta defin. 10. & 12. lib. 1. inter primas: ergo etiam rectæ omnes aliæ lineæ æquidistantes datæ rectæ ordinatim applicatæ, erunt per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ illi alteri: quare per eit. defin. 12. erunt omnes ordinatim applicatæ ad eandem diametrum.

PROPOSITIO L.

Data sectione coni: lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes sectionis angulum faciat dato angulo acuto æqualem.

In Parabola.

SVppositio. Sit Parabolæ axis AB datus vel inuentus per prop. 46. oporteatque lineam rectam CD ducere contingentem in C puncto vnico Parabolam; ita vt angulus CDB cum ipso axe producto vltra verticem A, ad partes ipsius Parabolæ, æqualem dato angulo acuto EFG.

Apparatus. Ex puncto E, rectæ EF, per prop. 12. lib. 1. element. demittatur recta linea EG perpendicularis ad alteram FG efficientem cum recta EF, datum angulum EFG: & per prop. 10. lib. 1. elem. recta FG bifariàm in H diuidatur; & transmittatur recta EH. Insuper ad A punctum verticis datæ parabolæ, seu extremum axeos eius AB dati situm in linea curua Hyperboles, fiat per prop. 23. lib. 1. element. angulus BAC æqualis angulo GHE; certum autem est in triangulo EGH, existente recto angulo in G, angulum GHE esse acutum, per coroll. 1. prop. 17. lib. 1. igitur factus angulus BAC æqualis acuto angulo GHE, acutus erit: ergo per coroll. nost. 13. ad prop. 47. recta linea CA secabit lineam curuam Paraboles in duobus punctis A & C. Iam verò per prop. 12. lib. 1. elemen. ex puncto C demittatur recta linea CB perpendicularis ad axem AB, hæc erit per coroll. nost. 4. ad propos. 47. ordinatim applicata axi AB. Denique producto axe BA vltra Parabolam

Iam sumatur per 3. propos. lib. 1. elem. recta linea AD æqualis ipsi AB; & puncta C & D vniantur recta linea CD. Dico hanc rectam lineam contingere Parabolam in vnico puncto C, & efficere angulum CDB cum axe AB producto, ad partes ipsius Paraboles, æqualem dato angulo acuto EFG rectilineo.

Demonstratio. Quia recta C B ordinatim applicata est per apparatum axi qui diameter A B, & sumpta est in hoc axe producto portio A D ab vertice A extra Parabolam, æqualis portioni A B ab eodem vertice A ad rectam C B ordinatim applicatam; & puncta C & D coniuncta sunt media recta C D; hæc per propositio. 33. lib. 1 continget Parabolam in vnico puncto C. Cumque in triangulis E G H, C B A, sint anguli in G & B recti, ideoque æquales per 12. axiom. lib. 1. element. & anguli G H E, B A C facti æquales; erunt per 3. axiom. nost. ad propositio. 32. lib. 1. element. reliqui tertij anguli æquales; vnde triangula illa erunt æquiangula, quare per 4. prop. lib. 6. elem. erit vt HG ad GE, sic AB ad BC; est autem per propositio. 15. lib. 5. element. vt FG ad DB, sic GH ad AB, dupla nimirum ad duplam, vt subdupla ad subduplam, ex apparatu; ergo per propositio. 16. libri 5. element. erit vicissim vt FG ad GH, sic DB ad AB; ostendimus autem esse GH ad GE, vt AB ad BC; ergo per proposit. 22. lib. 5. element. ex æquo erit vt FG ad GE, sic DB ad BC: igitur quoniam in triangulis FGE, DBC, circa rectos G, B, angulos æquales proportionalia sunt latera; erunt per 6. proposit. lib. 6. element. anguli in F & D æquales inter se, suppositi homologis lateribus GE, BC. Atque ad praxim reduxerimus propositum, & discursu facto demonstrauerimus.

In Hyperbola.

Suppositio. Sit axis BXA, centrumque eius X: oporteatque rectam lineam C D ducere contingentem ipsam in vnico eius puncto C, efficientem cum axe BXA, angulum CDE, ad partes ipsius Hyperbolæ, æqualem dato angulo acuto KHG, maiore quàm sit semissis anguli continentis Hyperbolam.

Apparatus. Per coroll. nostrum 6. ad prop. 2. ducatur XF vna ex asymptotis datæ Hyperboles: & per prop. 23. lib. 1. elem. ad punctum H, rectæ KH, fiat angulus KHL æqualis angulo AXF, hoc est semissi anguli continentis Hyperbolen datam, qui continebitur in angulo maiore, K H G. Præterea ex aliquo puncto G, rectæ HG, demittatur per propositio. 12. lib. 1. element. recta GK perpendicularis ad rectam HK, secans obuiam HL in puncto L. Tùm ex puncto A verticis Hyperboles, excitetur recta linea AF perpendicularis ipsi axi BXA, quæ per coroll. nost. 11. ad prop. 47. continget Hyperbolam in A; ideoque per prop. 3. conueniet in F cum asymptoto XF. Iam verò quia in triangulis FXA, LHK, duo anguli FXA, LHK, facti sunt æquales, duoque alij in A & K sunt recti æquales per 12. ax. lib. 1. elem. reliqui eorum anguli erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. æquales; quare dicta triangula erunt æquiangula; & per prop. 4. lib. 6. elemen. erit vt XA ad AF, sic HK ad KL; habet autem per prop. 8. lib. 5. elemen. HK ad KL maiorem rationem, quàm ad KG: ergo per prop. 13. lib. 5. elem. XA ad AF, maiorem habebit rationem quàm HK ad KG. Et quia per prop. 22. lib. 6. elem. similia polygona, habent rationem suorum laterum homologorum; si concipiamus quadrata facta super rectis XA, AF, HK, KG; cùm sit maior ratio probata rectæ XA ad AF, quàm HK ad KG: quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF, maiorem rationem habebit, quàm quadratum rectæ HK ad quadratum rectæ KG. ostendimus autem in demonstratione propositionis primæ, ita esse quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF, vt transuersum BA latus ad rectum; igitur per proposit. 13. lib. 5. element. transuersum BA latus, id est axis Hyperboles, maiorem rationem habebit ad rectum eius latus, quàm quadratum rectæ H K ad quadratum rectæ KG. Datis autem tribus quadratis, primo rectæ XA, secundo rectæ AF, quarto rectæ KG, reperiatur per 17. lemma, quadratum tertium proportionale rectæ OP; (sunt autem quadrata omnia similia) ergo per prop. 22. lib. 6. element. quatuor istæ rectæ lineæ erunt proportionales XA, AF, OP, KG: eritque vt OP ad KG, sic XA ad AF: habet verò ex probatis, XA ad AF maiorem rationem quàm HK ad KG; ergo per 13. propos. lib. 5. elem. OP ad KG maiorem rationem obtinebit, quàm HK ad KG: quare per 10. prop. lib. 5. element. recta OP maior erit quàm recta HK. Porrò per lemma 21. lib. 1. dato quadrato rectæ OP, & recta KH minore quàm OP, reperiatur alia recta linea quæ cum data KH efficiat rectangulum æquale quadrato rectæ OP: iuxta illud lemma erit vt KH ad OP, ita OP ad aliam repertam tertiam proportionalem: nam per propos. 17. lib. 6. elem. rectangulum sub prima KH & tertia reperta, erit æquale quadrato rectæ OP mediæ proportionalis: tamen quia est prima KH minor quàm secunda OP; erit per coroll. nost. 4. ad prop. 19. lib. 6. elem. secunda OP minor quàm tertia reperta, & prima KH minor etiam quàm ipsa tertia reperta: ergo si per 3. prop. lib. 1. elem. de producta recta KH vltra H, sumatur recta KM æqualis ipsi tertiæ repertæ proportionali lineæ rectæ; erit per 1. axiom. lib. 1. element. recta KM maior quàm recta KH; quadratumque rectæ KM erit maius quadrato rectæ KH, per

lemma 49. lib. 1. & rectangulum sub MK, KH, æquale quadrato rectæ OP, ex ipsa constructione. Quare per prop. 7. lib. 5. elem. erit rectangulum sub KM, KH ad quadratum rectæ KG, vt quadratum rectæ OP ad quadratum rectæ KG; fuit autem quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF, sicut quadratum rectæ OP ad quadratum rectæ KG: ergo per prop. 11. lib. 5. element. erit quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF, vt rectangulum sub KM, KH, ad quadratum rectæ KG. Porrò ducatur recta MG: cumque per 1. prop. lib. 2. elem. quadratum rectæ MK, sit æquale rectangulo sub MK, KH, & simul rectangulo sub MK, HM: erit per 8. axiom. lib. 1. elem. quadratum rectæ MK maius rectangulo sub MK, KH; habebitque per prop. 8. lib. 5. elemen. maiorem rationem quadratum rectæ MK ad quadratum rectæ KG, quàm rectangulum sub MK, KH, ad idem quadratum rectæ KG: hoc est ex antecedentibus, & prop. 13. lib. 5. elem. quàm quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF. Quod si per propos. 12. lib. 6. elem. datis tribus rectis hoc ordine MK, KG, XA, reperiatur quarta proportionalis AQ; erit per prop. 22. lib. 6. elem. quadratum rectæ MK ad quadratum rectæ KG, vt quadratum rectæ XA ad quadratum quartæ lineæ rectæ proportionalis inuentæ: ostendimus autem quadratum rectæ MK ad quadratum rectæ KG, maiorem habere rationem, quàm quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF; ergo per prop. 13. lib. 5. elem. quadratum rectæ XA ad quadratum prædictæ rectæ quartæ proportionalis maiorem habebit rationem, quàm quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF: ergo per prop. 10. lib. 5. elem. quadratum illius quartæ lineæ proportionalis minus est quadrato rectæ AF. Quare per prop. 3. lib. 1. elem. poterimus ex maiore recta AF detrahere rectam AQ æqualem dictæ quartæ lineæ proportionali minori, & ducere rectam XQ. Cumque in triangulis XAQ, MKG, anguli sint A & K sint recti æquales ostensi, sitque MK ad KG, sic XA ad AQ; erunt per prop. 6. lib. 6. elem. æquales anguli AXQ, KMG: sed angulus FXA maior est angulo QXA; ergo per 1. axiom. lib. 1. element. angulus FXA. maior erit angulo KMG. Cùm igitur recta XC, angulum AXF diuidat, producta vltra Q, conueniet in C cum linea curua Hyperboles, per coroll. nost. 5. ad prop. 2. nam diuisus angulus AXF est pars anguli continentis Hyperbolem, ideòque recta XC diuidet ipsum angulum continentem Hyperbolen. Porrò ex hoc puncto C, per prop. 49. recta linea ducatur CD contingens Hyperbolen, ipsa per coroll. propos. 31. lib. 1. occurret axi BXA in puncto D sito inter centrum X & verticem A. Insuper iuxta prop. 12. lib. 1. elem. ex eodem puncto C demittatur recta linea CE perpendicularis ipsi axi BXA producto intra Hyperbolam, quæ erit ordinatim applicata ipsi axi, nam per coroll. nost. 7. ad prop. 13. vtrimque occurret lineæ curuæ Hyperboles si producatur vltra axem, ideoque erit accommodata intra Hyperbolen, & per coroll. nost. 4. ad prop. 47. erit ordinatim applicata ipsi axi, vti asseruimus. Quod si consideremus resultans triangulum CXE rectangulum, & comparemus cum triangulo rectangulo GMK; quia habent rectos angulos æquales in E & K, & ostendimus æquales esse angulos QXA GMK, erunt eorum anguli, CXE idem cum angulo QXA, & GMK. æquales; Igitur per nostrum coroll. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui tertij anguli æquales; ideoque æquiangula dicta triangula; & per prop. 4. lib. 6. elem. erit vt XE ad EC; sic MK ad KG; & per prop. 22. lib. 6. elem. vt quadratum rectæ XE ad quadratum rectæ EC, sic quadratum rectæ MK ad quadratum rectæ KG: est autem per propos. 37. lib. 1. vt transuersum Hyperboles latus ad rectum, sic rectangulum sub EX, ED, ad quadratum rectæ ED; estque antea ostensum, vt quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF, sic rectangulum sub KM, KH, ad quadratum rectæ KG; tùm vt quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AF, vt transuersum Hyperboles latus ad rectum: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub KM, KH, ad quadratum rectæ KG, vt transuersum Hyperboles latus ad rectum; sed etiam paulò antes ostendimus ita esse rectangulum sub XE, ED, ad quadratum rectæ CE, vt transuersum Hyperboles latus ad rectum: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub XE, ED, ad quadratum rectæ EC, sicut rectangulum sub MK, KH, ad quadratum rectæ KG; inuertendo igitur iuxta coroll. prop. 4. lib. 5. elem. erit quadratum rectæ CE, ad rectangulum sub XE, ED, sicut quadratum rectæ KG, ad rectangulum sub MK, KH. Quare cùm probauerimus antea esse quadratum rectæ XE ad quadratum rectæ EC, sicut quadratum rectæ MK ad quadratum rectæ KG; & nunc ostenderimus esse quadratum rectæ CE ad rectangulum sub XE, ED, sicut quadratum rectę KG ad rectangulum sub MK, KH: erit per prop. 22. lib. 5. ele. ex æquo, vt quadratum rectæ XE ad rectangulum sub XE, ED, sic quadratum rectæ MK, ad rectangulum sub MK, KH. Et quia quadratũ rectæ XE, & rectangulum sub XE, ED, eandem habent altitudinem XE; erit per prop. 1. lib. 6. elem. quadratum rectæ XE, ad rectangulum sub XE, ED, vt basis XE ad basim ED: simili modo quia quadratum rectæ MK, & rectangulum sub MK, KH, eandem habent altitudinem MK; erit quadratum rectæ MK ad rectangulum sub MK, KH, vt basis MK ad basim KH. Quare cùm probauerimus esse quadratum rectæ XE, ad rectangulum sub XE, ED, sicut quadratum rectæ MK ad rectangu-

ctangulum sub MK, KH: erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt XE ad ED, sic MK ad KH: oftendimus autem in superioribus esse XE ad EC, sicut MK ad KG; vnde per coroll. propos. 4. lib. 5. elem. inuertendo erit vt EC ad XE, sic KG ad MK; & nunc probauimus esse XE ad ED, vt MK ad KH: igitur per prop. 22. lib. 5. elem. ex æquo erit CE ad ED, sicut KG ad KH. Dico autem rectam lineam CD probatam in hoc apparatu contingere Hyperbolam datam in vnico puncto C, & secantem diametrum seu axem BXA in puncto D, efficere angulum CDE æqualem dato angulo GHK acuto rectilineo.

Demonstratio. Cùm in triangulis GKH, CED, sint anguli in E & K recti æquales; & probauerimus esse CE ad ED, sicut GK ad KH: erunt per prop. 6. lib. 6. elem. anguli CDE, GHK, æquales inter se, suppositi lateribus homologis CE, GK. Atque fecerimus in Hyperbola imperatum.

In Ellipsi.

Suppositio. Datus sit acutus angulus rectilineus FGH; oporteatque rectam lineam CD ducere contingentem in vnico puncto C datam ellipsim, efficientem cum axe AB illius producto vltra verticem A, angulum CDB ad partes ipsius ellipseos, æqualem dato angulo FGH.

Apparatus. Imprimis per coroll. nost. 5. ad prop. 13. lib. 1. ex dato axe AB, ellipseos, reperiatur eius rectum latus. Præterea ex quolibet puncto, puta F, rectæ FG, demittatur per prop. 12. lib. 1. elem. recta linea FH perpendicularis ipsi rectæ GH. Deinde per lemma 18. datis duabus rectis, prima recto latere ellipseos, secunda transuerso AB, & quadrato rectæ FH, reperiatur rectangulum, ad quod quadratum rectæ FH habeat rationem eandem, quam habet rectum latus ad transuersum AB. Tùm per lemma 11. lib. 2. dato rectangulo isto inuento. & recta HG. reperiatur alia recta; ita vt rectangulum sub data recta HG, & inuenta, sit æquale dato rectangulo: & de producta recta GH vltra H, sumatur per 3. prop. lib. 1. elem. recta HK æqualis modò inuentæ rectæ: eritque rectangulum sub GH, HK, æquale rectangulo prædicto, per 1. prop. lib. 6. elemen. cùm habeant eandem basim, & æqualem altitudinem: sed & per 7. prop lib. 5. elem. & 11. erit vt rectum latus ad transuersum AB, sic quadratum rectæ FH ad rectangulum sub GH, HK. Iungantur puncta F, K, recta FK. Præterea per prop. 23. lib. 1. elem. ad centrum X, quod est punctum medium axeos AB iuxta defin. 1. lib. 2. inter primas, fiat angulus AXC, æqualis angulo HKF, fecetque recta XC circumferentiam ellipseos in puncto C: & per prop. præcedent. 49. ex puncto C ducatur recta linea CD, contingens in vnico puncto C circumferentiam ellipseos; hæc per propos. 23. lib. 1. conueniet cum duobus axibus coniugatis ellipseos, extra sectionem; & quidem cum axe AB producto vltra A, in puncto D: si enim ex centro X excitetur recta linea LXI vtrimque perpendicularis seu ad angulos rectos ipsi axi AB transuerso, erit eius axis coniugatus per coroll. nost. ad defin. 18. lib. 1. inter primas: cumque in triangulo FHK sit angulus rectus, erit per coroll. 1. prop. 17. lib. 1. elem. acutus angulus FKH; ideoque etiam ei æqualis factus AXC, acutus erit: quare erit pars recti anguli AXL: vnde XC circumferentiam ellipseos secabit in C puncto inter duos axes coniugatos AB, LI: quare vti diximus per prop. 23. lib. 1. recta CD contingens ellipsim in hoc puncto C, occurret in D axi BA producto vltra A. Dico autem hanc rectam CD contingentem in C ellipsim, efficere cum eius axe AB producto vltra A, angulum CDB ad partes ipsius ellipseos, æqualem dato angulo acuto FGH.

Demonstratio. Si per prop. 12. lib. 1. elem. ex puncto C demittatur ad AB axem recta linea CE perpendicularis, erit per coroll. nost. ad defin. 18. lib. 1. inter primas ordinatim applicata ipsi axi, & resultabit triangulum CEX rectangulum cuius duo anguli in E & X, erunt respectiuè æquales angulis in H & K, trianguli rectanguli FHK; quare per coroll. nost. 3. ad propos. 32. lib. 1. element. reliqui tertij eorum anguli æquales erunt; ideoque ipsa triangula rectangula æquiangula: & per prop. 4. lib. 6. element. erit vt XE ad EC, sic KH ad HF; & per prop. 22. lib. 6. elemen. erit vt quadratum rectæ XE ad quadratum rectæ EC, sic quadratum rectæ KH ad quadratum rectæ HF. Verùm per prop. 37. lib 1. & inuertendo iuxta coroll. propos. 4. lib. 5. elem. est quadratum rectæ EC ad rectangulum sub DE, EX. vt rectum latus ad transuersum ellipseos datæ; & per apparatum constat ita esse quadratum rectæ HF ad rectangulum sub GH, HK, sicut rectum latus ad transuersum eiusdem ellipseos: ergo per propos. 11 lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ EC ad rectangulum sub DE, EX, sic quadratum rectæ HF ad rectangulum sub GH, HK: igitur assumendo antecedentia, & postrema consequentia, erit per prop. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate, vt quadratum rectæ XE ad rectangulum sub DE, EX, ita quadratum rectæ KH ad rectangulum sub GH, HK. Et quia quadratum rectæ XE, & rectangulum sub XE, ED, eandem habent altitudinem rectæ XE, inter se erunt vt bases XE, ED, per 1. prop. lib. 6. elemen. similiter quia quadratum rectæ KH & rectangulum sub GH, HK, eandem habent altitudinem HK, inter se erunt vt bases KH, GH: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt recta XE ad rectam ED, sic recta KH ad rectam HG; ergo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. inuertendo erit vt ED ad XE, sic HG ad

KH; ostendimus autem esse X E ad E C, sicut HK ad HF: ergo per propositio. 22. lib. 5. elem. ex æquo erit vt ED ad EC, sic GH ad HF: quæ latera proportionalia, cùm sint circa rectos angulos æquales in E & H, in triangulis DEC, GHF; erit per propos. 6. lib. 6. element. angulus CDE æqualis angulo FGH. Atque ita fecerimus imperatum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Dato circulo: Lineam contingentem ipsum ducere, quæ cum axe eius seu diametro producta vltra ipsum, ad partes eius, angulum efficiat æqualem dato angulo rectilineo acuto æqualem.

Fiat idem apparatus, vt in ellipsi; & demonstratio allata pro ellipsi applicetur circulo; factum erit ac demonstratum propositum. Nam propos. 37. lib. 1. communis est ellipsi & circulo: cui propositioni tota vis demonstrationis præcipua innititur.

PROPOSITIO LI.

Data sectione Coni. Lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta, faciat angulum dato angulo acuto æqualem.

Antequam propositum ad praxim reducamus: moneo lectorem id in ellipsi factum non esse ac demonstratum ab Apollonio sine ope sequentis propositionis 52. quâ demonstratâ illud exequitur & rectè factum probat. Nemini igitur mirum sit proponere Geometras posse aliquid, & interponere aliam propositionem quâ demonstretur; quandoquidem in hoc exemplo Geometrarum præstantissimum videmus id efficisse. Tamen in Parabola, & Hyperbola, propositum exequitur.

In Parabola.

Suppositio. Oporteat sectam lineam ducere contingentem Parabolam in puncto; quæ cum ipsa diametro quæ non sit axis, efficiat angulum æqualem dato acuto angulo H rectilineo.

Apparatus. Per propos. 46. reperiatur axis AB datæ Paraboles, qui cum sit vna ex eius diametris. erit parallelus datæ diametro, per coroll. nost. 3. ad propos. 27. lib. 1. vel coroll. nost. 2. ad proposit. 46. lib. eiusdem. Tùm per proposit. præcedentem. 50. ducatur recta linea GCD contingens in puncto C, ipsam Parabolam, & efficiens cum axe illius AB, angulum CDA, æqualem dato angulo acuto H. Tùm per prop. 31. lib. 1. element. per punctum C contactus agatur recta linea ECF parallela axi AB, hæc recta intra Parabolam incedet per coroll. nost. 2. ad proposit. 26. lib. 1. eritque eius diameter per coroll. nost. 1. ad proposit. 46. eiusdem lib. 1. & in vnico tantùm puncto C, eius lineam curuam secabit per coroll. nost. 1. ad ipsam prop. 26. lib. 1. Cùm autem recta GCD contingens ducta secet in D axem AB, secabit etiam per propos. 11. Procli diametrum ECF in puncto C quod est punctum contactus ductæ rectæ GCD: eruntque per propos. 29. lib. 1. elem. duo anguli CDB, GCF, æquales. Dico autem rectam GCD contingere Parabolam in puncto C, & efficere angulum GCF æqualem dato angulo acuto rectilineo A, cum diametro CF Paraboles.

Demonstratio. Per apparatum est angulus CDA vel CDB æqualis angulo dato acuto H; & angulus GCF æqualis angulo CDB; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. angulus GCF æqualis erit angulo dato acuto H. Est autem per apparatum recta CGD contingens Parabolam in C puncto vnico; & recta CF diameter Paraboles. Igitur in Parabola duxerimus rectam lineam GC contingentem ipsam in C, & efficientem cum diametro eius CF, angulum GCF æqualem dato angulo H acuto rectilineo.

COROLL. NOSTRVM. I.

In Parabola, nulla recta linea duci potest tangens illam vero contacta in extremo seu vertice sui axeos, ita vt efficiat angulum cum axe, acuto dato cuilibet rectilineo angulo æqualem.

Esto enim Paraboles axis AB, & recta linea EAF contingens Parabolam in A vertice & extremo axeos; hæc recta erit per coroll. nost. 12. ad propos. 47. lib. huius, perpendicularis axi AB, vnde resultabit angulus rectus EAB.

Iam verò si fieri possit alia recta linea sit contingens Parabolam ipsam, efficiensque cum axe AB per punctum A contactus, angulum acuto dato æqualem: tunc contra propositio. 32. libri 1. sequetur rectam lineam istam introductam cadere inter tangentem EA, & curuam rectam lineam Paraboles; vel angulum IAB mixtilineum non esse quolibet acuto rectilineo maiorem, contra nost. corollar. 13. ad propos. 47. Hæc absurda confirmant hoc coroll.

In Hyperbola.

Suppositio. Sit datus angulus I acutus rectilineus: & oporteat rectam lineam ducere contingentem lineam curuam Hyperboles in vno solùm puncto, quæ cum diametro eius aliqua diuersa ab axe eius, efficiat angulum æqualem dato angulo I, in ipso puncto contactus.

Ap-

Apparatus. Per prop. 45. quæratur E centrum Hyperboles; & per prop. 47. inquiratur eius axis transuersus AEB; & per coroll. nostrum 6. ad prop. 2. vna eius asymptotos ET; & per prop. 11. lib. 1. elem. eligatur perpendicularis CG aliqua recta ad ipsum axem AB productum intra hyperbolam, quæ secabit eius curuam lineam in aliquo puncto ex vna parte, nam per axiom. 13. lib. 1. elemen. debet occurrere dictæ asymptoto extra locum Hyperboles; eiusque portio inter axem & curuam lineam erit per coroll. nost. ad def. 18. lib. 1. inter primas; ordinatim applicata axi prædicto. Igitur per coroll. nost. 2. ad prop. 51. lib. 1. reperiatur latus rectum Hyperboles datæ, ex prædicta linea ordinatim applicata & axe eius AEB. Præterea assumatur quæuis recta linea QS, quæ per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur in V, secundum rationem transuersi AEB lateris ad rectum eius, ita vt sit QS ad SV, sicut transuersum latus AEB ad rectum. Insuper per prop. 10. lib. 1. elem. secetur bifariàm in R recta QV. Ad hæc per prop. 33. lib. 3. elem. super aliqua recta FH describatur circuli segmentum maius, quod capiat angulum HKF æqualem dato angulo acuto I: tùm per propos. 1. lib. 3. elem. sumatur N centrum dicti circuli; ex quo per prop. 12. lib. 1. elem. demittatur recta linea NO perpendicularis ad rectam HF, quam secabit bifariàm in O per prop. 3. lib. 3. elem. & per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur recta NO in P, ita vt sit NP ad PO, sicut RV ad VS: & ex puncto P ducatur per prop 31. lib. 1. elem. recta PK æquidistans ipsi FH, occurrensque in K circumferentiæ circuli descripti: ducanturque rectæ KH, KF; erit angulus HKF æqualis facto HKF, per prop. 21. lib. 3. elem. ideoque per 1. ax. lib. 1. elem. angulus iste postremus HKF, erit æqualis dato angulo I acuto. Productâ verò rectâ lineâ FH vltra H, demittatur ex puncto K, recta linea KL perpendicularis ipsi FH, iuxta propos. 12. lib. 1. elem. Porrò ducatur ex N centro circuli recta NX semidiameter eius, parallela ipsi FH per prop. 31. lib. 1. elem. ad partes K; hæc recta NX, & PK, erunt per propos. 30. lib. 1. elem. parallelæ, quia positæ eidem rectæ FHL æquidistantes; efficientque angulos rectos in N & P, per prop. 29. lib. 1. elem. ob angulum in O rectum positum. Et quia recta NX est semidiameter circuli, & recta PK ipsi parallela, ipsa PK non erit educta è centro N, ideoque non erit semidiameter dicti circuli: Quod si concipiantur illæ duæ rectæ NX PK, productæ vsque ad aliud circumferentiæ circuli punctum, ipsæ singulæ bifariàm diuidentur bifariàm ab perpendiculari NPO, per 3. prop. lib. 3. elem. quare per prop. 15. lib. eiusdem 3. maior erit illa quæ per centrum N incedit; ideoque per prop. 15. lib. 5. elem. semissis NX cùm sit dimidium maioris, erit maior quàm PK semissis minoris ostensæ. Iam verò quia duæ rectæ KL, NO, sunt ad angulos rectos ipsi rectæ LHOF, erunt per prop. 28. lib. 1. elem. parallelæ: recta autem LK secat rectam PK, in K; ergo si producatur LK vltra K, secabit per propos. 11. Procli. alteram NX; non quidem in puncto X, & neque etiam in puncto vlteriore extra circuli circumferentiam: alioqui cùm sint ostensæ rectæ NX, PK, parallelæ, tùm etiam parallelæ NPO, LK; parallelogrammum resultans KN, cùm debeat habere opposita latera KP, XN, per prop. 34. lib. 1. elem. æqualia; esset recta KP minor ostensa quàm XN, æqualis ipsi XN, vel maior quàm XN; quod planè absonum est: igitur recta LK producta vltra K, non poterit secare rectam NX in X, vel vltra X, extra circuli circumferentiam: secabit ergo in puncto Y intra circulum ipsum, secabitque ipsum circulum producta vltra punctum Y, per axiom. 28. lib. 1. elem; quodque etiam potest probari per lemma 19. Producta igitur recta linea LK vltra K in infinitum, secabit circulum in duobus punctis K, & M. Quoniam verò sunt rectæ PK, NX, parallelæ, & angulus in K est rectus; etiam angulus in Y erit rectus, per prop. 29. lib. 1. elem. quare per prop. 3. lib. 3. elemen. recta KM secabitur bifariàm in Y ab recta NX. Et quia sunt parallelogramma rectangula KN, LP, ex ipsa constructione; erunt per prop 34. lib. 1. elem. æquales rectæ KY, PN; tùm etiam æquales rectæ PO, KL: & per nost. coroll. ad prop. 7. lib. 5. elem. erit vt NP ad PO, sic YK ad KL. Et quia initiò posuimus NP ad PO, vt RV ad VS; erit per prop. 11. lib. 5. element. RV ad VS, sicut YK ad KL, & iuxta prop. 15. lib. 5. element. antecedentium dupla, erunt ad ipsa consequentia, in eadem prædicta ratione; hoc est erit QV ad VS, vt MK ad KL: componendo igitur iuxta prop 18. lib. 5. elem. erit vt QV, VS, ad VS, sic MKL ad KL. Assumendo autem altitudinem communem LK, erit per 1. prop. lib. 6. elem. vt MKL ad LK, sic rectangulum sub MKL, LK ad quadratum rectæ LK: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt QV, VS, ad VS, sic rectangulum sub ML, LK ad quadratum rectæ LK. Quod si concipiamus ex puncto L extra circulum sito, rectam aliquam lineam ductam per prop. 17. lib. 3. element. contingentem circulum ipsum; tam rectangulum sub LF, LH, quàm rectangulum sub LM, LK, erit per prop. 36. lib. eiusdem 3. element. æquale quadrato dictæ lineæ tangentis; ideoque per 1. axiom. lib. 1. elem. dicta duo rectangula erunt æqualia: ergo per prop. 7. lib. 5. elem. ista duo rectangula habebunt eandem rationem ad quadratum rectæ LK: sed ostendimus esse rectangulum sub LM, LK, ad quadratum rectæ LK, vt QS ad VS; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK, vt QS ad VS: fecimus autem initiò vt QS ad VS, ita transuersum latus AEB, datæ Hyperbo-

les,

les, ad eius rectum latus; ergo prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK, sic transuersum AEB latus ad eius rectum. Insuper per prop. 11. lib. 1. elem. ducatur ex puncto A, vertice Hyperboles, recta linea AT perpendicularis axi transuerso AEB; hæc per coroll. nost. 11. ad prop. 47. continget Hyperbolen in puncto seu vertice A; & per 3. proposit. occurret in T asymptoto ET. Igitur ex demonstratis in prima prop. est vt quadratum rectæ EA ad quadratum rectæ AT, sic AEB transuersum latus ad rectum; & ostendimus esse rectangulum sub LF & LH, ad quadratum rectæ LK, sic transuersum AEB latus ad rectum; erit per prop. 11. lib. 5. element. vt quadratum rectæ EA ad quadratum rectæ AT, sic rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK. Quia verò quadratum rectæ LF maius est rectangulo sub LF, LH, per 20. lemma; ideo per proposit. 8. lib. 5. elem. quadratum rectæ LF, maiorem habebit rationem ad quadratum rectæ LK, quàm rectangulum sub LF, LH. Cùm igitur quadratum rectæ EA, sit ad quadratum rectæ AT, vt rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK; & rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK, habeat minorem rationem, quàm quadratum rectæ LF ad quadratum rectæ LK; habebit per corollar. nost. 1. ad prop. 13. lib. 5. elem. quadratum rectæ EA, ad quadratum rectæ AT, minorem rationem, quàm quadratum rectæ LF ad quadratum rectæ LK: id est, quod in idem recidit, quadratum rectæ LF ad quadratum rectæ LK, habebit maiorem rationem, quàm quadratum rectæ EA, ad quadratum rectæ AT: hoc est, quadratum rectæ LF longè magis superabit quadratum rectæ LK, quàm superet quadratum rectæ EA, quadratum rectæ AT: igitur per lemma 21. habebit recta LF maiorem rationem ad rectam LK, quàm recta EA ad rectam AT. Quia verò in triangulis FLK, EAT, sunt anguli in A & L recti æquales per 12. axiom. lib. 1. elemen. & recta FL maiorem habet rationem ad rectam LK, quàm recta EA, ad rectam AT; erit per 22. lemma, angulus LFK minor quàm angulus AET. Igitur per prop. 23. lib. 1. element. faciendo ad punctum E, axeos AEB, angulum AEC æqualem angulo LFK, minor erit angulus AEC factus, quàm angulus AET, per 1. axiom. lib. 1. element. ideoque continebitur in angulo maiore AET. Porrò per 2. proposit. quia recta EC, diuidit angulum continentem Hyperbolam, factum ab asymptotis, quarum vna est ET; recta EC occurret Hyperbolæ in puncto C. Tùm ex hoc puncto C, per prop. 49. educatur recta linea CD contingens ipsam Hyperbolen in vnico C puncto, secabit axem AEB, in puncto D, inter centrum E, & verticem A ipsius Hyperboles. Deinde ex puncto C demittatur per prop. 12. lib. 1. element. recta CG perpendicularis ipsi axi AEB producto intra locum Hyperboles; ipsa CG erit parallela per proposi. 28. lib. 1. elem. dictæ rectæ lineæ TA tangenti, & perpendiculari ipsimet axi AEB, in vertice A; ideoque ordinatim applicata ad ipsum axem, per coroll. nost. 2. ad prop. 3. Porrò recta EC erit diameter Hyperboles, iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. est verò recta CD contingens Hyperbolen ipsam. Dico autem istam rectam CD contingentem Hyperbolam datam, efficere cum diametro eius EC ducta per C punctum prædicti contactus, angulum ECD æqualem dato angulo acuto I.

Demonstratio. Quia recta CD contingit Hyperbolen in C, & recta CG est ordinatim applicata ad axem BEAG: erit per proposi. 37. lib. 1. vt transuersum Hyperboles latus BEA ad suum rectum latus, sic rectangulum sub EG, GD, ad quadratum rectæ CG. Ergo quia ostendimus in apparatu esse rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK, sicut transuersum AEB latus ad suum proprium rectum latus; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK, sic rectangulum sub EG, GD, ad quadratum rectæ CG. Cùm autem in triangulis KFL, CEG, anguli in L & G sint recti & æquales, & anguli CEG, KFL, facti in apparatu æquales; erunt per coroll. nostrum 3. ad proposit. 32. lib. 1. element. eorum reliqui tertij anguli æquales; ideoque æquiangula; vnde per propositio. 4. lib. 6. element. obtinebunt latera proportionalia circum æquales angulos: quare per definit. 1. lib. 6. element. erunt similia. Quia verò in his triangulis ab verticibus K & C, duximus ad bases LF, EG, rectas LH, CD; & ostendimus esse rectangulum sub LF, LH, ad quadratum rectæ LK, sicut rectangulum sub EG, GD, ad quadratum rectæ CG; erunt per lemma 23. triangula KHL, CDG, similia; & per nostrum coroll. 1. ad illud lemma, erunt reliqua triangula similia KFH, CED: igitur in his duobus postremis similibus erit per cit. defin. 1. lib. 6. element. anguli FKH, ECD, æquales, oppositi homologis lateribus HF, ED: factus autem est angulus FKH æqualis dato I angulo acuto; ergo per 1. axiom. lib. 1. element. angulus ECD erit æqualis angulo dato I acuto rectilineo. Atque ita adimpleuerimus præceptum, & rectè esse adimpletum demonstrauerimus in Hyperbola.

COROLL. NOSTRVM II.

In circulo impossibile est ducere rectam lineam contingentem ipsum, quæ cum diametro eius ducta per punctum contactus, efficiat angulum æqualem dato acuto rectilineo.

Nam

NAm prop. 18. lib. 3. elem. diameter circuli per contactum rectæ lineæ tangentis circulum ducta, cùm efficiat angulum rectum cum ea: manifestum est non posse duci rectam lineam contingentem ipsum, quæ cum diametro eius ducta per punctum contactus prædicti, efficiat angulum acutum æqualem dato acuto rectilineo, per propositio. 16. lib. cit. element.

COROLL. NOSTRVM III.

Proponi potest aliquid in vniuersum in vna propositione; & illud exequi vel demonstrare, partim in illa propositione, partim in alia sequenti, interponendo aliam propositionem necessariam ad eundem finem, imitando Apollonium.

HOc factitare solent Geometræ, interponendo lemma vel diuersa lemmata quibus probetur propositum; & hoc in præsentia vsurpauit Apollonius, qui propositum vniuersale ad Parabolam, Hyperbolam, & ellipsim demonstrauit partim in hac propositione, circa Parabolam & Hyperbolam; partimque interposita sequenti propositione 52. illud idem probabit in ellipsi prop. 53. quæ propositio interposita loco lemmatis apponi poterat; nihilominus eam voluit appellare propositionem.

COROLL. NOSTRVM IV.

Hac propositio 51. vniuersalis non esset; si inter conicas sectiones lineas curuas habentes, intelligeret comprehensum circulum. Quod si excludatur, vniuersalis est.

HÆc propositio, & corollarium nostrum 1. confirmant quod in consideratione nostra 2. ad secundas definitiones lib. 1. adnotauimus, Apollonium minimè intelligere nomine sectionis coni lineam curuam obtinentis, circulum: si enim illo nomine sectionis intelligeret etiam circulum, hæc propositio in vniuersum falsa esset, vt patet ex nostro 1. coroll. quare excluditur iuxta mentem Apollonij circulus ab nomine sectionis conicæ. Et propterea in antecedentibus & consequentibus si aliquid in vniuersum demonstrandum proponit commune circulo & Parabolæ & Hyperbolæ & ellipsi, vel aliquibus illarum sectionum; semper addit circulum vel circuli circumferentiam. Et sic euidens est corollarium hoc nostrum & id quod diximus in citata consideratione nostra.

COROLL. NOSTRVM V.

In Hyperbola & Ellipsi, non potest duci recta linea TAZ, tangens ipsas sectiones in extremo A axeos AB, & efficiens cum ipso axe angulum æqualem dato acuto angulo I, rectilineo.

DEmonstratio eadem est quæ allata fuit in coroll. nostro ad Parabolam, in hac propositione.

PROPOSITIO LII.

Si ellipsim recta linea contingat: angulus quem facit cum diametro per tactum ducta, non est minor angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

SVppositio. Sit ellipsis ACBD, cuius centrum E sit inuentum per propos. 45. & axes coniugati AB, CD, inuenti per propos. 47. & linea recta GFL ipsam contingat in vnico puncto F, inter dictos axes coniugatos; & semidiameter EF ducta ex dicto puncto F contactus ad centrum E. Postremò rectæ lineæ AC, BC, sint inclinatæ ad mediam sectionem, iuxta definit. 11. & angulus ACB ad mediam sectionem, iuxta defin. 12. Productæque rectæ lineæ GFL, BC, illa vltra F, hæc vltra C, concurrent in L; nam per propos. 25. lib. 1. cùm recta GFL contingat sectionem in F puncto inter axes coniugatos GB, CD, concurret cum ipsis extra sectionem, in G & I: quare producta recta BC vltra C, quandoquidem secat axem CD in C, supra illam incedet per axiom. 11. lib. 1. elem. ideoque per axiom. 18. lib. eiusdem occurret in L, rectæ GFL. Erit verò angulus LCA, vel LCH, secante semidiametro EF obuiam chordam AC in H, deinceps ad angulum ACB ad mediam sectionem factum ab rectis lineis AC, BC ad mediam sectionem inclinatis. Eritque angulus LFE factus ab contingente recta linea GFL, ellipsim datam in puncto F, & ab eius semidiametro EF transeunte per tactum prædictum F. Dico autem hunc angulum LFE, non esse minorem angulo LCA vel LCH, qui deinceps est ad angulum prædictum ACB, factum ab lineis rectis AC, CB, ad mediam sectionem inclinatis.

Imprimis, vel recta seu semidiameter FHE ab puncto contactus F, ad centrum E ducta, est parallela rectæ BCL ad mediam sectionem inclinata; vel non est ei parallela.

Demonstratio in casu quo semidiameter FHE sit parallela rectæ BCL. Per propos. 30. lib. 1. recta AE est æqualis ipsi BE; & recta HE parallela ipsi BC, in triangulo CAB, igitur per 2. prop. lib. 6. elem. diuidetur bifariàm in H, recta AC; nam per cit. prop. diuiduntur proportionaliter latera AB, AC, ab recta HE; ostendimus autem latus AB diuisum esse bifariàm in E, ergo etiam latus AC diuidetur bifariàm in H. Cùm igitur semidiameter FE,

rectam

rectam AC non transeuntem per centrum E ellipseos, bifariàm diuidat in H, & recta LFG in extremo F diametri EF, detur contingere ellipsim; ipsa LFG contingens erit per prop. 6. erit æquidistans rectæ AC bifariàm sectæ in H. Igitur parallelogrammũ resultabit LFHC; & per prop. 34. lib. 1. elem. angulus LFH vel LFE, æqualis erit angulo LCH vel LCA: non igitur in hoc casu angulus LFE minor erit LCA vel LCH. Quod erat demonstrandum.

Apparatus in casu quo diameter vel semidiameter FE non sit æquidistans rectæ LCB. Imprimis quia supponuntur duæ rectæ FE, LB, non parallelæ, non poterunt anguli FEA, LBE, esse æquales; alioqui si essent æquales, essent prædictæ rectæ lineæ æquidistantes per prop. 28. lib. 1. elem. Ducatur autem recta FK perpendicularis ad axem AB, per prop. 12. lib. 1. elem. hæc erit ordinatim applicata ad illum axem, per coroll. nost. ad defin. 18. lib. 1. inter primas; & habebimus triangulum rectangulum FKE, quod non erit simile triangulo rectangulo CEB; ob angulos ostensos inæquales LBE vel CBE, & FEA vel FEK: similia enim triangula debent esse æquiangula, iuxta defin. 1. lib. 6. elem. Sed neque erit vt BE ad EC, sic EK ad KF; alioqui cùm anguli in E & K sint recti æquales, essent ipsa triangula per prop. 6. lib. 6. elem. similia, contra ea quæ demonstrata sunt. Cumque non sit BE ad EC, sicut EK ad KF; non erit quadratum BE ad quadratum EC, sicut quadratum EK ad quadratum KF; alioqui si ita esset, quatuor ipsæ dictæ rectæ essent proportionales, per propos. 22. lib. 6. elem. contra ea quæ ostensa sunt. Est autem per prop. 21. lib. 1. quadratum rectæ BE ad quadratum rectæ EC; hoc est rectangulum sub BE, EA, propter æqualitatem rectarum ipsarum BE, EA, iuxta prop. 30. lib. 1. ad quadratum rectæ EC, per prop. 7. lib. 5. elem. sicut transuersum latus ellipseos ad eius rectum latus; & per prop. 37. lib. 1. est vt transuersum latus ad idem rectum, sic rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ FK: igitur per propos. 11. lib. 5. elem. non erit rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ FK, sicut quadratum rectæ EK ad quadratum rectæ KF. Ponamus autem primam ex his postremis quantitatibus habere maiorem rationem, vel minorem, quàm tertia ad quartam: per prop. 27. lib. 5. elem. vel coroll. nost. ad illam; vicissim prima ad tertiam habebit maiorem vel minorem rationem, quàm secunda ad quartam; hoc est in hoc casu, non erit rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ EK, sicut quadratum rectæ FK ad quadratum rectæ FK: quadratum autem rectæ FK habet rationem æqualitatis ad quadratum rectæ FK, hoc est idem ad seipsum habet rationem æqualitatis; ergo rectangulum sub GK, KE, non erit æquale quadrato rectæ EK. Cùm autem quadratũ rectæ EK, & rectangulum sub GK, KE, obtineant eandem altitudinem KE; per prop. 1. lib. 6. elem. bases eorum GK, KE, erunt inæquales, sicuti ipsa, rectangulum sub GK, KE, & quadratum rectæ KE, ostensa sunt inæqualia. Iam verò si concipiatur circulus factus centro E ellipseos, interuallo EC minore quàm EA, (nam EC est semissis minoris axeos, & EA semissis maioris axeos,) secabit in punctis Q, rãm maiorem rectam EA, quàm ei æqualem EB, quæ puncta Q erunt inter E & A, & inter E & B; rectusque erit angulus QCQ in semicirculo QCQ, iuxta prop. 31. lib. 3. elem. si ducerentur rectæ QC, QC; totus ergo angulus BCA, continens rectum QCQ, obtusus erit, quem efficiunt rectæ AC, BC, ad mediam sectionem inclinatæ. Iam verò super recta aliqua linea MN, per prop. 33. lib. 3. element. describatur circuli segmentum MYN capiens angulum æqualem obtuso ACB, quod circuli facti segmentum erit per prop. 31. lib. eiusdem 3. element. minus semicirculo. Porrò per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur recta MN in X, ita vt sit NX ad XM, sicut GK ad KE; punctum X non erit medium rectæ MN, sicuti rectæ GE non est medium punctum K ex antedictis. Et per prop. 11. lib. 1. element. ad punctum X rectæ MN, excitetur recta linea vtrimque perpendicularis YXI, ad ipsam MN, secans circulum factum in Y & I, rectæque lineæ ducantur MY, NY. Præterea recta MN, bifariàm in T diuidatur per prop. 10. lib. 1. elem. & ex puncto T excitetur ad illam recta linea OTP perpendicularis vtrimque per cit. prop. 11. lib. 1. element. secetque hæc perpendicularis circulum in O & P; hæc recta linea OTP, iuxta coroll. prop. 1. lib. 3. elem. transibit per centrum circuli, quod sit punctum R inuentum per prop. 1. cit. Insuper ex centro R emittatur per prop. 12. lib. 1. elem. recta linea RS perpendicularis ipsi YXI, agantúrque rectæ MO, NO. Imprimis resultabit rectangulum parallelogrammum XTRS, ob parallela latera opposita per propos. 29. lib. 1. elem. propter angulos in X, T, S, rectos; ideoque per propos. 34. lib. 1. elem. latera TR, XS, opposita erunt æqualia. Insuper cùm per prop. 33. lib. 3. elem. factum sit segmentum MYN, capiens angulum æqualem angulo ACB, & in hoc segmento sit angulus MON, erit per prop. 21. lib. 3. elem. æqualis angulo MYN, & per 1. axiom. lib. 1. elem. æqualis angulo ACB. Quoniam autem in triangulis CEA, CEB, latera CE, EA, sunt æqualia lateribus CE, EB, angulos comprehendunt æquales rectos; erunt per prop. 4. lib. 1. elem. bases eorum æquales CA, CB; & anguli ACE, BCE, æquales: simili modo ostendentur anguli MOT, NOT, in triangulis MTO, NTO; & bases eorum MO, NO, æquales: quare anguli obtusi ACB, MON, ostensi æquales, erunt bifariàm diuisi, ille ab recta CE, hic ab recta OT; vnde per axio. 7. lib.

lib. 1. ele. semisses dictorum totorũ æqualium obtusorum angulorum, erunt æquales, videlicet anguli ECB, TON. Igitur in triangulis TON, ECB. cùm sint alij duo anguli in T & E recti æquales; erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui eorum anguli æquales; quare ipsa triangula erunt æquiangula; & per prop. 4. lib. 6. elem erit vt NT ad TO, sic BE ad EC; & iuxta prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ NT ad quadratum rectæ TO, sic quadratum rectæ BE ad quadratum rectæ EC. Cumque recta RO sit maior quàm eius pars TR, & TR sit ostensa æqualis ipsi XS; erit per 1. ax. lib. 1. elem. recta RO maior quam recta XS: sed & per prop. 15. lib. 3. elem recta OP est maior quàm recta YI; & singulæ per prop. 3. lib. 3. elem sunt bifariàm sectæ ab perpendiculari RS, in punctis R, S; semissis OR maior erit quàm semissis YS: ergo per prop. 8. lib. 5. elem. recta OR habebit maiorem rationem ad RT, quàm recta SY ad SX æqualem ipsi RT ostensam: ergo vicissim iuxta prop 27. lib. 5. elemen. recta OR ad rectam SY. maiorem rationem habebit, quàm recta RT ad rectam SX: igitur per propos. 33. lib. eiusdem 5. elem. erit maior proportio rectæ OT ad rectam YX, quàm rectæ OR ad rectam YS, & per prop. 27. lib. eiusdem 5. vicissim erit OT in maiori ratione ad OR quàm YX ad YS: ergo per prop. 26. libri eiusdem, inuertendo erit RO ad OT in minori ratione, quàm YS ad YX. Quod si iuxta prop. 12. lib. 6. elem. fecerimus vt RO ad OT, sic YS ad aliam rectam puta Z; erit hæc recta per lem. 24. maior quàm YX. est verò per prop 15. & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt PO ad RO, sic YI ad SY: igitur redigendo ad hunc ordinem prædictas postremas comparationes, erit inuertendo per coroll. prop. 4 lib. 5. elem. vt OT ad RO, sic Z ad YS; & vt RO ad PO. sic SY ad YI: ergo per prop. 22. lib. eiusdem 5. erit ex æqualitate, vt OT ad PO, sic Z ad YI; & per coroll. prop. 4. lib. eiusdem inuertendo, vt PO ad OT, sic YI ad Z: sed per prop. 8. lib. 5. elem. recta YI ad Z habet minorem rationem quàm ad YX, (vtpote eadem ad maiorem habens minorem rationem, quàm ad minorem;) ergo per coroll. nost 1. ad prop. 13. lib. 5. elem. PO ad OT, minorem habebit rationem, quàm YI ad YX: igitur diuidendo, iuxta corollar. nost. ad prop. 29. lib. 5. elem. erit PT ad TO, minorem habens rationem quàm IY ad XY. & quia recta TN est perpendicularis ad OP diametrum circuli, erit per lemma 47. lib. 1. media proportionalis inter OT TP; quare per coroll. prop. 20. lib. 6. elem. erit PT ad TO, ita quadratum rectæ TN ad quadratum rectæ TO; ostendimus autem anteà, ita esse quadratum rectæ TN ad quadratum rectæ TO, vt quadratum rectæ BE ad quadratum rectæ EC; hoc est vt rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ EC; hoc est etiam vti probauimus in antecedentibus, vt transuersum AEB latus ad rectum: est autem per prop. 21. lib. 1. & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt transuersum latus ad rectum, sic rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt PT ad TO, sic rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF. Igitur cùm sit rectangulum sub GK, KE, vt PT ad TO; & ostenderimus PT ad TO, minorem habere rationem quàm IY ad XY; per nost. coroll. 1. ad prop. 13. lib. 5. elem. rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF. minorem habebit rationem, quàm IY ad XY: est autem per lemma præpositum prop. 32. lib. 10. elem. rectangulum sub IX, XY, ad quadratum XY, sicut IY ad XY; & modò probauimus IY ad XY, maiorem habere rationem, quàm rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF; ergo per cit. propos. 13. lib. 5. elem. rectangulum sub IX, XY, ad quadratum rectæ XY. maiorem habebit rationem, quàm rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF. est autem per prop. 35. lib. 3. elem. rectangulum sub NX, XM, æquale rectangulo sub IX, XY; ergo per prop. 7. lib. 5. elem. habebunt eandem rationem ad quadratum rectæ XY: ostendimus verò rectangulum sub IX, XY, ad quadratum rectæ KF, maiorem proportionem obtinere, quàm rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF; ergo per prop. 13. lib. 5. elem rectangulum sub NX, XM, ad quadratum rectæ XY, maiorem rationem habebit, quàm rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF; vel quod idem est, rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF, minorem rationem habebit, quàm rectangulum sub NX, XM, ad quadratum rectæ XY. Quod si per lemma 25. fiat vt rectangulum sub GK, KE, ad quadratum rectæ KF, sic rectangulum sub NX, XM, ad aliud quadratum, verbi gratiâ rectæ XV; erit iuxta lemma 24. rectæ XV quadratum maius quàm quadratum rectæ XY; ideoque per prop. 16. Procli, recta XV maior quàm recta XY. Igitur producendo rectam XY vltra Y, poterimus per 3. prop. lib. 1 elem. sumere rectam XV æqualem ipsi XV, maiorque erit quàm recta XY.

Demonstratio. Quandoquidē in triangulis GFE, NVM, est per apparatum GK ad KE, sic NX ad XM; suntque rectæ KF, XV, ad rectos angulos ipsis proprijs rectis GKE, NXM; estque rectangulum sub GK, KE, ad quadratũ rectæ KF, sicut rectangulũ sub NX, XM, ad quadratum rectæ XV, per apparatũ: erunt per lem. 26. triangula GFE, NVM, similia; ideoque anguli GFE, NVM, æquales. Est verò per prop. 21. lib. 1. elem. angulus NYM maior quàm angulus NVM; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. angulus NYM maior erit quàm angulus GFE. sed & angulus ACB fuit ostensus æqualis in apparatu, angulo NYM; ergo etiam per cit. ax. angulus ACB maior erit angulo AFE. sunt

autem per prop. 13. lib. 1. elem. anguli duo deinceps ad F æquales duobus rectis; tùm etiam alij duo anguli deinceps ad C, æquales duobus rectis; qui duo recti sunt æquales duobus rectis, per 2. & 12. ax. lib. 1. elem. ergo si ab illis æqualibus, demantur inæquales anguli, maior ACB, minor AFE; relinquentur anguli inæquales, maior quidem LFE, minor LCA: ille factus ab tangente LFG in puncto F, ellipseos, & diametro FE transeunte per dictum punctum contactus: hic verò LCA deinceps ad angulum ACB factum ab duabus rectis AC, BC, ad mediam sectionem inclinatis. Atque ita in casu quo diameter FE non fuerit parallela vni rectæ, puta BC ad mediam sectionem inclinatæ, verum erit quod tangens recta linea ellipsim efficiat cum diametro eius transeunte per punctum contactus, angulum non minorem angulo deinceps ad eum qui fit ab rectis ad mediam sectionem inclinatis. Porrò tota propositio in vtroque casu abundè demonstrata erit.

PROPOSITIO LIII.

Data ellipsi, contingentem rectam lineam ducere, quæ cum diametro per tactum ducta, faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Oportet autem acutum angulum datum, non esse minorem angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

Restabat in prop. 51. propositum demonstrare in ellipsi: Distulit autem Apollonius illud demonstrare, interponendo propositionem 52. qua ostendit angulum factum in ellipsi acutum ab tangente recta linea ipsam ellipsim, & diametro eius ducta per punctum contactus, non esse minorem altero angulo acuto qui est deinceps ad angulum obtusum factum ab rectis lineis ad mediam sectionem inclinatis: propter restrictionem additam in hac propositione. Atque ita in ellipsi non poterit huiusmodi recta linea contingens ipsam duci, quæ faciat cum diametro eius ducta per tactum, angulum quemcumque æqualem dato cuilibet acuto rectilineo; sed oportet vt angulus datus acutus non sit minor angulo deinceps ei, qui fit ab lineis ad mediam sectionem inclinatis. Solutio igitur prop. 51. circa ellipsim, erit in hac propositione 53.

Suppositio. Data sit ellipsis ACBD, cuius axis maior sit AB, minor CD, se mutuò bifariàm secantes in centro E, per prop. 30. lib. 1. ad angulos rectos per defi. 19. lib. 1. inter primas. Sintque inclinatæ rectæ lineæ AC, BC, ad mediam sectionem, iuxta defin. 11. Producta verò sit recta BC vltra C ad G, angulusque datus acutus Y, non sit minor angulo ACG qui est deinceps ad angulum ACB effectum ab prædictis rectis AC, BC, ad mediam sectionem inclinatis, sed vel æqualis illi, vel maior illo. Oporteatq; rectam lineam, exempli gratiâ HKG ducere contingentem datam ellipsim in vnico puncto K; ita vt angulus GKE factus ab dicta tangente HKG, & diametro KE educta ab puncto K, prædicti contactus ad E centrum, sit æqualis dato acuto angulo Y.

Apparatus in casu quo angulus datus acutus Y, sit æqualis angulo ACG qui deinceps est ad angulum ACB factum ab rectis lineis AC, BC, ad mediam sectionem inclinatis. Ex centro E per prop. 31. lib. 1. ele. transmittatur semidiameter EK parallela ipsi rectæ BC: & per prop. 49. ex pũcto K ducatur recta linea GKH contingens in puncto K, circumferentiam ellipseos datæ; quæ per prop. 25. lib. 1. secabit extra sectionem, axes coniugatos AB, CD, illum in puncto H, hunc in puncto I; & per prop. 11. Procli secabit parallelam rectam BC, ipsi EK, productam vltra C, in puncto G: & semidiameter EK secabit obuiam rectam AC in puncto F. Dico autem rectam HKG contingentem ellipsim datam in puncto K, efficere angulum EKG cum dicta diametro vel semidiametro KE, æqualẽ angulo ACG; ideoque per 1. ax. lib. 1. ele. æqualem angulo dato Y acuto, qui ponitur in hoc casu æqualis angulo ACG.

Demonstratio. Quandoquidem in triangulo CBA, ducta est recta EF parallela ipsi basi BC; diuisa erunt proportionaliter latera illius AB, AC, in E & F, per 2. prop. lib. 6. ele. ideoq; erit vt AE ad EB, sic AF ad FC; prima autem AE est æqualis secundæ EB, per prop. 30. lib. 1. ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. ele. tertia AF erit æqualis quartæ FC: quare recta AC diuisa erit bifariàm in F. & quia hæc recta AC bifariàm in F diuisa, non incedit per centrum E, ellipseos; per prop. 6. recta HKG contingens ipsam ellipsim in K puncto extremo semidiametri EFK bifariàm secantis in F prædictam rectam AC, erit æquidistans ipsi rectæ AC. Igitur in parallelogrammo GKFC resultante, angulus GKF vel GKE, erit æqualis angulo FCG, vel ACG, per prop. 34. lib. 1. ele. quare idẽ angulus GKE æqualis erit angulo dato Y acuto rectilineo, per 1. ax. lib. 1. ele. quandoquidem angulus ACG cui est æqualis angulus GKE, datus est in hoc casu æqualis angulo Y acuto. Atq; ita in hoc casu satisfecerimus proposito.

Apparatus in casu quo angulus datus Y sit maior dato angulo ACG. Imprimis quia datur angulus acutus Y, alter ei deinceps X, erit obtusus per coroll. nost. 3. ad prop. 13. lib. 1. elem. & quia in hoc casu datur angulus Y maior quã angulus ACG; suntq; duo anguli ACG, ACB, deinceps ad C, duobus rectis æquales, per prop. 13. lib. 1. elem. sicuti sunt duo anguli Y, X; cumque illi duo simul sumpti, sint istis duobus

simul

simul sumptis æquales per ax. 12. lib. eiusdem; si ab illis æqualibus demantur inæquales anguli, Y maior, ACG minor; relinquentur anguli inæquales, X minor, ACB maior. His positis per prop. 34. lib. 3. elem ab aliquo circulo auferatur segmentum MNP, quod capiat angulum æqualem angulo X: & recta MP per prop. 10. lib. 1. elem. bifariàm in O diuidatur; & per prop. 15. lib. eiusdem, ex puncto O excitetur recta linea NOR vtrimque perpendicularis ipsi rectæ MP, & quæ secet circumferentiam circuli in N & R. In hac recta NR, erit per coroll. prop. 1. lib. 3. elem. centrum V ipsius circuli. Porrò ducantur rectæ NM, NP. Quia verò diameter RVN, circuli, est perpendicularis chordæ eius MOP, secabit arcum MNP, bifariàm in N, per coroll. 1. ad prop. 1. lib. 2. Hypsiclis, ideóque per prop. 29. lib. 3. ele. coroll. nost. rectæ MN, NP, erunt æquales: ac propterea triangulum MNP, erit isosceles; cuius angulus MNP sectus erit bifariàm in duos angulos MNO, PNO, æquales ab perpendiculari recta NO transeunte per centrum V, iuxta coroll. nost. 1. ad prop. 32. lib. 1. elem. Et quia fecimus segmentum circuli MNP, capiens angulum æqualem angulo X, erit angulus MNP æqualis angulo X, per coroll. nost. ad prop. 27. lib. 3. elem. & quoniam ostendimus angulum X esse minorem angulo ACB; erit per 5. ax. lib. 1. element. angulus MNP etiam minor angulo ACB. Iam verò quia in triangulis AEC, BEC, duo latera AE, EC, sunt respectiuè æqualia duobus lateribus BE, EC, angulósque rectos in E comprehendunt æquales; per prop. 4. lib. 1. elem. rectæ AC, BC, erunt æquales, & anguli ACE, BCE, æquales; vnde totus angulus ACB diuisus erit bifariàm: Cumq; sint ostensi anguli ACB, MNP, inæquales, minorq; MNP, & maior ACB; erunt per prop. 55. lib. 1. elem. semisses eorum eodem modo inæquales, videlicet MNO minor, ACE maior: ostensi verò sunt anguli in E & O. recti æquales; igitur per lem. 27. recta linea AE maiorem rationem habet ad EC, quàm MO ad ON; ideoq; per lem. 21. quadratum rectæ AE ad quadratum rectæ EC, maiorem rationem habebit, quàm quadratum rectæ MO ad quadratum rectæ ON: Quadratum autē rectæ AE, æquale per 1. prop. lib. 6. elem. rectangulo sub AE, EB, ob æqualem altitudinem AE, & æquales bases AE, EB, ostensas; & per prop. 35. lib. 3. ele. quadratum rectæ MO æquale est rectangulo sub NO, OR; & per prop. 1. lib. 6 elem. etiam rectangulo sub MO, OP, ob æquales altitudines, & bases. Igitur quia per prop. 21. lib. 1. & coroll. prop. 4. libri 5. elem. est rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ EC, sicut transuersum latus AEB in ellipsi, ad rectum; & probauimus rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ EC, maiorem rationem habere, quàm quadratum rectæ MO, ad quadratum rectæ ON; per prop. 13. lib. 5. element. latus transuersum AEB in ellipsi ad rectum latus, maiorem rationem habebit, quàm quadratum rectæ OM ad quadratum rectæ ON; vel quàm rectangulum sub ON, OR, ad idem quadratum rectæ ON; (cùm sint æqualia ostensa, quadratum rectæ OM, & rectangulum sub ON, OR; vel quàm linea RO, ad rectam ON, cùm sint per 1. prop. lib. 6. elem. quadratum rectæ ON, & rectangulum sub RO, ON, eandem habentia altitudinem NO, inter se, vt bases RO, ON.) Iam verò sumpta quauis recta linea OS, diuidatur per 10. prop. lib. 6. elem. in a, in ratione lateris transuersi AEB ad rectum: & per prop. 10. lib. 1. elem. ipsa tota o s secetur bifariàm in p. Quia ergo est recta o a ad a s, sicut transuersum AEB latus ad rectū; & ostendimus transuersum latus ad rectum, maiorem habere rationem quàm recta RO ad ON; habebit per prop. 13. lib. 5. elem. recta oa ad a s, maiorem proportionem, quàm recta RO ad ON: ergo iuxta prop. 28. lib. 5. elem. componendo, recta o s ad s a, maiorem habebit rationem, quàm recta RN ad NO. & quia per prop. 55. lib. 5. elem. est vt ps ad so, sic VN ad RN; erit vicissim per prop. 16. lib. 5. ele. vt ps ad os, sic VN ad RN: verùm vti ostendimus, maior est ratio os ad sa, quàm RN ad NO; ergo per coroll. nost. 1. ad prop. 31. lib. 5. ele. ps ad sa, maiorem rationem obtinebit, quàm VN ad NO; & per prop. 29. lib. eiusdem 5. diuidendo, erit pa ad as, maiorem habens rationem, quàm VO ad ON. Quod si per prop. 12. lib. 6. ele. datis tribus rectis hoc ordine p a, a s, VO; reperiatur quarta proportionalis OI; hæc OI reperta erit minor quàm ON, per lem. 29. ergo per prop. 3. lib. 1. elem. poterimus ex maiore ON detrahere OI minorē: & per prop. 31. lib. eiusdē 1. ele. ex puncto I ducere rectam lineam IX parallelam ipsi MP; & aliam XST parallelam ipsi NR, secantem in S obuiam rectam MP; tùm aliam VQ parallelam ipsi MP. resultabuntque ex hac constructione parallelogramma OX, VX, VS; quæ ob angulos rectos in O antea positos, ipsa erunt per lemma 55. lib. 1. rectangula. Cùm igitur VQ sit ad angulos rectos ipsi rectæ TX, ex centro V, circuli, ducta; bifariàm in Q secabit rectam TX, per prop. 3. lib. 3. elem. Iam verò quandoquidem est p a ad as, sicut VO ad OI, vel QS ad SX, (cùm sint per prop. 34. lib. 1. elem. VO, QS, æquales; & OI, SX, æquales:) componendo, erit iuxta prop. 18. lib. 5. elem. vt ps ad sa, sic QS ad SX; & per lemma 28. erit vt o s ad s a, sic TX ad XS; & diuidendo, iuxta proposit. 17. lib. 5. elem. vt oa ad as, sic TS ad SX: ostendimus autem anteà esse oa ad as, vt transuersum AEB latus ad rectum; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt idem transuersum latus ad rectum, sic TS ad SX. Denique transmittantur rectæ lineæ MX, XP. Iam verò redeamus ad ellipsim ad cuius E centrum, seu punctum E medium axeos eius maioris AEB,

 fiat

COMMENTARIVS
IN
DEFINITIONES
LIBRI TERTII
CONICORVM
APOLLONII PERGÆI,
A NOBIS ADDITAS.

I.

Comparare bis quarta parti figura æquale rectangulum excedens figura quadrata ad axem Hyperboles, vel oppositarum sectionum. Est inuenire rectam lineam adijciendam in directum axi Hyperboles, vel oppositarum sectionum, ita vt latus quadrati æqualis quarta parti figura, sit media proportionalis inter compositam rectam ex axe & inuenta recta, & inter ipsam inuentam: & ex producto axe vltra sua extrema quæ sunt vertices Hyperbola, vel oppositarum sectionum, vtrimque detrahere ab dictis verticibus, portiones æquales dicta inuenta linea recta seu tertia proportionali, vnam ex vna parte, alteram ex alia.



QVID sit figura propria Hyperbolæ, vel oppositis sectionibus, accipe ab defi. 1. lib. 1. quæ vniuersalis cùm sit ad omnes figuras sectionum conicarum & circuli; conuenit etiam figuræ Hyperboles & oppositarum sectionum. Quomodo verò accipiendum sit quadratum æquale parti figuræ, consule ea quæ diximus ad defi. 2. lib. cir. 2. Denique quomodo executioni sit mandanda, docebimus lemmate 21. ad hunc librum.

II.

Puncta comparationum in Hyperbola, vel oppositis sectionibus sunt extrema puncta portionum sumptarum æqualium in axe transuerso producto vtrimque, ab eius extremis; facta comparatione rectanguli ad ipsum axem, æqualis quarta parti figura, excedentis figura quadrata.

QVa ratione sumantur seu inueniantur hæc duo puncta comparationum in axe transuerso Hyperboles vel oppositarum sectionum; indicabimus lemmate 24. ad hunc librum.

Aduerte hæc duo puncta comparationum vocari ab nonnullis neotericis Geometris, polos comparationum, ad similitudinem punctorum comparationum in axe maiore ellipseos, quæ magis propriè & accommodarè ab eisdem neotericis vocantur poli, cum aliquo fundamento mechanicę praxeos circa ellipseos declinationem in plano; sicuti explicabimus definitione quarta sequente.

III.

Comparare bis quarta parti figura æquale rectangulum deficiens figura quadrata, ad axem maiorem ellipseos.

EST diuidere axem maiorem ellipseos in duas partes inæquales; ita vt minor pars sit tertia proportionalis, & maior portio prima, & latus quadrati æqualis quartæ parti figuræ in ellipsi sit media proportionalis: rectangulum autem sub dictis inæqualibus partibus axeos maioris, deficiat figura quadrata, applicatum dicto axi. Et ab ipso axe, ab eius extremis detrahere versus centrum ellipseos vtrimque æquales partes dictæ tertiæ pro-

LEMMA III.

Si minori quantitati addatur differentia qua differt à maiore: Summa minoris illius, & differentiæ; æqualis est maiori quantitati. Est nostrum.

SVppositio. Minor C quantitas differat à maiore A, differentia B. Dico quod C & B simul, æquales esse ipsi A maiori.

Demonstratio. Cùm enim differentia inter duas quantitates sit residua pars maioris, quando ablata est ab illa, minor aliqua; & ista ablata & residua, sint partes integrantes adæquatè maiorem: certum est istas duas partes simul sumptas, hoc est summam minoris ablatæ & residuæ, esse per axiom. 19. lib. 1. elem. æqualem toti, videlicet maiori ipsi quantitati. Igitur si B differentia inter C minorem & A maiorem, addatur ipsi C minori; erit BC summa æqualis maiori ipsi A. Quod erat explicandum.

LEMMA IV.

Si ab æqualibus quantitatibus, communis demitatur: residua vnius, erit differentia alterius totius, & communis ablatæ. Est nostrum.

SVppositio. A & B sint æqualia, & C commune ademptum, residuumque D. Assero D residuum ipsius A post detractum C, esse etiam differentiam inter ablatum C, & alterum totum B.

Demonstratio. Per 3. axiom. lib. 1. element. Si ab æqualibus A & B, commune C tollatur, relinquentur æqualia D & D; C autem & D simul sumpta sunt per præcedens lemma 3. æqualia ipsi B. Quod si ex summa totali ipsorum C & D, auferatur C; relinquetur D, differentia ipsius adempti C, & duorum simul sumptorum C & D; hoc est totius B, & C adempti. Sicuti fuit propositum.

LEMMA V.

In triangulo ABC, sit basis bifariàm diuisa in G; & ducta recta AG; & duæ rectæ BF. CE se mutuò secent in D in puncto rectæ AG erit recta EF parallela ipsi BC. Est Pappi lemma 1. ad hunc libr.

APparatus. Per prop. 31. lib. 1. elem. per punctum A ducatur recta linea HAK æquidistans ipsi BC; hanc rectam HAK, secabit in H producta recta CE vltra E; & in K, producta recta BF vltra F, iuxta propos. 11. Procli.

Demonstratio. In triangulis BGD, KAD, erunt anguli contrapositi D æquales per propos. 15. lib. 1. elemen. & anguli G & A, per propos. 29. lib. eiusdem; quare eorum reliqui tertij anguli erunt æquales per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. ideoque ipsa triangula æquiangula. Simili modo probabuntur æquiangula triangula CGD, HAD. Igitur per prop. 4. lib. 6. ele., erit vt BG ad GD, sic KA ad AD; & vt GD ad GC, sic DA ad AH; ergo per proposit. 22. lib. 5. elem. ex æquo erit vt BG ad GC, sic KA ad AH; prima vero BG & secunda GC sunt æquales ex datis, ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. element. tertia KA & quarta AH, erunt æquales. Sed & per lemma 50. lib. 1. triangula BEC, AEH, sunt similia; tùm etiam triangula BFC, AFK: ergo per defin. 1. lib. 6. elem. erit vt CB ad BE, sic HA ad AE; & vicissim per proposit. 16. lib. 5. elem. vt CB ad HA, sic BE ad AE: similiter erit vt CB ad CF, sic AK ad KF, & vicissim vt CB ad AK, sic CF ad AF. Est autem per 7. prop. lib. eiusdem 5. CB ad HA, vt CB ad AK; ergo per propositio. 11. lib. eiusdem 5. erit vt BE ad EA, sic CF ad AF: ergo per 2. propositio. lib. 6. element. recta EF est æquidistans ipsi rectæ BC. Quod erat demonstrandum.

LEMMA VI.

Si duæ quantitates æquales AB, CD, fuerint; & diuisæ in partes inæquales in punctis E, F Dico quòd differt AE ab CF, eo EB differre ab FD. est Eutocij ad propos. 48 lib. 2. Apoll.

APparatus. Per prop. 3. lib. 1. elem. sumatur AG æqualis ipsi CF, si quantitates datæ, fuerint rectæ lineæ.

Demonstratio EG est differentia inter AG & AE, vel inter CF & AE; nam positæ sunt æquales AG, AF: sed sunt etiam totales AB, CD, datæ æquales. Igitur si ab his totalibus AB, CD, æqualibus, tollantur æquales AG, CF; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elemen. æquales GB, FD. Quod si comparetur EB cum GB, vel FD, erit EG differentia inter illas. Ergo EG erit differentia inter rectam AE & CF, tùm inter rectam EB & FD, sicuti fuit propositum.

LEMMA VII.

Si ab inæqualium quantitatum maiore dematur differentia maioris ab minore: relinquentur æquales quantitates. Est nostrum.

SVppositio. Sit A maior quàm B, differentia C. Dico si auferatur C ab A, relinqui D æqualem ipsi B.

Demonstratio. Quandoquidem C est differentia inter A maiorem, & B minorem: si dematur hæc differentia C, ab A maiore, relinquetur D exempli gratiâ, quæ erit differentia inter C & A: sed C & B simul sumptæ sunt æquales ipsi A, per lemma 3. ergo si ab C, B, simul sumptis, hoc est ab A, dematur

recta DC secta est bifariàm in F, eique in directum adiecta recta CA: erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub DA, AC, simul cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ AF; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. rectangulum sub AE, EB, simul cum quadrato rectæ EF, erit æquale rectangulo sub DA, AC; & simul quadrato rectæ CF: quadratum autem rectæ CF æquale est per cit. proposit 5. lib. 2. elem. rectangulo sub CE, ED, simul cum quadrato rectæ EF, (nam recta CD diuisa est bifariàm in F, & non bifariàm in E.) Ergo si ab supradictis æqualibus ostensis, auferamus commune quadratum rectæ EF, remanebit per 3. axiom. lib. 1. element. rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulis simul sumptis, vno sub CE, ED, altero sub DA, AC, sicuti propositum fuit.

LEMMA XII.

Sint lineæ AB, DC, inter se æquales, & sumptum quoduis punctum E, ante A, in recta BA producta vltra A. Dico rectangulum sub CE, EB, superare rectangulum sub CA, AB, rectangulo sub DE, EA. Est lemma 4. Pappi ad hunc lib. 3.

Apparatus. Per propositio. 10. lib. 1. element. Recta BC bifariàm in F secetur: secta etiam erit bifariàm in eodem puncto F, recta AD; si enim æqualibus FB, FC, addantur æquales datæ BA, CD, fient æquales FA, FD, per 2. axio. lib. 1. elem.

Demonstratio. Quandoquidem recta AD bifariàm in F secta est, eique addita in rectum recta AE; erit per 6 prop. lib. 2. elem. rectangulum sub DE, EA, simul cum quadrato rectæ AF, æquale quadrato rectæ FE: rectangulum autem sub CE, EB, simul cum quadrato rectæ BF; æquale est quadrato rectæ FE, per eandem 6. prop. lib. 2. elemen. (nam recta CB secta est in F bifariàm, eique in directum addita recta BE:) igitur per 1. axiom. lib. 1. element. rectangulum sub DE, EA, simul cum quadrato rectæ AF, æquale erit rectangulo sub CE, EB, simul cum quadrato rectæ BF. Sed etiam quia recta linea CB bifariàm secta est in F, eique addita recta BA in directum, erit per cit. prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub CA, AB, simul cum quadrato rectæ BF, æquale quadrato rectæ AF. Igitur si ex æqualibus prædictis, videlicet ex vna parte, rectangulo sub CE, EB, simul cum quadrato rectæ BF, & ex alia parte rectangulo sub DE, EA, simul cum quadrato rectæ BF, & rectangulo sub CA, AB; demamus commune quadratum rectæ BF; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. æqualia, ex vna parte, rectangulum sub CE, EB; & ex alia parte, rectangulum sub DE, EA, simul cum rectangulo sub CA, AB. Quare rectangulum sub CE, EB, superat rectangulum sub CA, AB, rectangulo sub DE, EA. quod erat demonstrandum: ab duorum enim postremorum simul sumptorum summa si tollatur rectangulum sub CA, AB, remanebit pro differentia rectangulum sub DE, EA, seu excessus quo summa illa prædicta duorum excedit rectangulum sub CA, AB: ergo per lemma 4. rectangulum sub DE, EA, erit etiam differentia vel excessus quo aliud æquale totale, videlicet rectangulum sub CE, EB, superat rectangulum sub CA, AB.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Eisdem datis, Rectangulum sub CE, EB, æquale erit rectangulo sub CA, AB, simul cum rectangulo sub DE, EA.

Hoc enim in demonstrationis discursu ostendimus.

LEMMA XIII.

Sit recta linea AB, in qua sumantur duo puncta C, D; sitque rectangulum sub DA, AC, æquale rectangulo sub CB, BD. Assero lineam AC esse æqualem ipsi BD. ff Commandini ad prop. 16. lib. 2. conic. Apoll.

Demonstratio. Quia datur rectangulum sub DA, AC, æquale rectangulo sub CB, BD; erit per 14. proposit. lib. 6. elem. vt DA ad DB; sic BC ad CA; ergo componendo iuxta prop. 18. lib. 5. elem. erit AB ad BD, sicut BA ad AC; prima autem AB & tertia BA, sunt æquales; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secunda BD & quarta AC, erunt æquales. Hoc lemma non differt nisi modo proponendi ab lemmate 32. ad lib. 2.

LEMMA XIV.

Sint lineæ AB, CD, æquales, & punctum E inter A & B: Rectangulum sub CE, EB, minus erit quàm rectangulo sub CA, AB. rectangulo sub DE, EA. Est lemma 5 Pappi ad hunc lib. 3.

Apparatus. Diuidatur in F, recta BC bifariàm; ideoque æqualibus FB, FC, si addantur æquales BA, CD, fient æquales FA, FD, per 2. axiom. lib. 1. elem. vnde tota AD bifariàm erit secta in F.

Demonstratio. Quia recta CB est in F bifariàm secta, eique in directum addita BA; erit per 6. prop. lib. 2. elem. rectangulum sub CA, AB, simul cum quadrato rectæ BF, æquale quadrato rectæ AF. Et quia tota AB secta est bifariàm in F, & non bifariàm in E; erit per 5. prop. lib. eiusdem 2. elem. rectangulum sub DE, EA, simul cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ AF. Quoniam verò recta CB bifariàm est diuisa in F, eique in rectum addita recta EB; erit per 6. prop. lib 2. cit. rectangulum sub CE, EB, simul cum quadrato rectæ





ctis X, G, O, rectæ LN, agantur per prop. 31. lib. 1. element. rectæ lineæ æquidistantes lateri AL; quæ terminentur in latere AB; secabunt intermediam diametrum AN, in punctis K, F, D; & ex his punctis transmittantur aliæ rectæ lineæ parallelæ ipsi LN, secentque latera opposita LA, BN. Resultabunt per nost. lem. 2. ad lib. 2. elem. quadrata AF, GH, rectarum LG, GN; tùm alia quadrata KF, FD, rectarum XG, GO; tùm alia diuersa rectangula.

Demonstratio. Imprimis quia ex datis rectæ LX, NO, sunt æquales; & recta XO bifariàm in G diuisa est; erunt per 2. ax. lib. 1. element. rectæ LG, NG, æquales; ideoque per 16. prop. Procli quadrata earum æqualia; videlicet quadrata AF, GH, æqualia. Et quia etiam rectæ GX, GO, sunt æquales, erunt quadrata earum KF, FD æqualia. Sed ex constructione euidens est, quadratum AF superare quadratum KF, gnomone QRS; tùm etiam quadratum GH, superare quadratum FD, gnomone TVY. Ergo si probauerimus hos gnomones seorsim sumptos esse æquales rectangulo sub LX, XN, demonstratum erit propositum. Per prop. 36. lib. 1. elem. rectangula KP, PM, sunt æqualia, quia sunt inter easdem parallelas, & super æquales bases, ipsis nimirum GX, GO, æqualibus, idque iuxta prop. 34. lib. 1. elem. est verò per prop. 43. lib. eiusdem 1. elem. rectangulum IE æquale rectangulo KP; igitur per 1. axio. eiusdem lib. 1. elem. rectangulum IE æquale erit rectangulo PM: bis postremis æqualibus si addatur commune rectangulum PI, resultabunt per 2. axio. lib. 1. elem. æqualia, gnomon QRS, & rectangulum AM. Similiter per prop. 36. lib. 1. elem. rectangula GD, GC, sunt æqualia, inter easdem parallelas, & super æquales bases GX, GO; estque per 43. prop. lib. eiusdem, rectangulum GD, æquale rectangulo DH; ergo per 1. axio. cit. rectangulum CG, erit æquale rectangulo DH; his æqualibus postremis addatur commune rectangulum GZ, fiet per 2. axio. lib. eiusdem, gnomon TVY æqualis rectangulo XZ. est autem per cit. lem. 2. ad lib. 2. elem. rectangulum AM æquale rectangulo XZ vel NC, quod est sub LX, XN, ob quadrata AK, DN, LC, MB, æqualia, æqualium rectarum ex dictis in lemmate cit. 2. Igitur singuli gnomones TVY, QRS, erunt æquales rectangulo sub LX, XN. ergo simul quadrata AF, GH, rectarum LG, GN, superabunt quadrata KF, FD, rectarum XG, GO, simul sumpta, gnomonibus simul sumptis TVY, QRS; hoc est duplo rectanguli sub LX, XN; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Iisdem datis. Quadrata simul sumpta rectarum LG, GN, sunt æqualia quadratis simul sumptis rectarum XG, GO, simul cum duplo rectanguli sub LX, XN.

Istud nostrum corollarium euidentiam habet ex lemmate 3.

LEMMA XVIII.

Sit linea AB, æqualis ipsi CD, & sumptum sit punctum inter C & B, diuersum ab medio F puncto rectæ BC. Dico quadrata rectarum AE, ED, simul sumpta, esse æqualia quadratis rectarum BE, EC, bis sumptis, vnà cum rectangulo sub AC, CD, bis sumpto. Est Pappi lemma 8. ad hunc librum 3.

Apparatus. Si æqualibus FB, FC, addantur æquales AB, CD, fient per axiom. 2. lib. 1. element. æquales AF, DF; atque ita tota recta AD erit bifariàm diuisa in puncto F.

Demonstratio. Quandoquidem recta AD bifariàm diuisa est in F, & non bifariàm in C; erit per prop. 5. lib. 2. elem rectangulum sub AC, CD, simul cum quadrato rectæ CF; æquale quadrato rectæ DF: his æqualibus si addantur ipsa sibi ipsis, fiet per 2. axio. lib. 1 element. rectangulum bis sumptum sub AC, CD, simul cum quadrato bis sumpto rectæ CF, æquale quadrato bis sumpto rectæ DF: ergo si his æqualibus postremis addatur commune quadratum rectæ EF, bis sumptum; fiet per 2. axiom. cit. rectangulum bis sub AC, CD, simul cum quadratis bis sumptis rectarum CF, EF; æquale quadratis bis sumptis rectarum DF, EF: sed per 9. prop. lib. 2. element. quadratis bis sumptis rectarum CF, EF, sunt æqualia quadrata rectarum AE, ED; & quadratis bis sumptis rectarum CF, EF, sunt æqualia quadrata rectarum BE, EC, per eandem cit. prop. 9. ergo per 1. axio. lib. 1. elem. quadrata rectarum AE, ED, æqualia sunt quadratis rectarum BE, EC, simul cum rectangulo bis sub AC, CD. Quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Iisdem positis. Quadrata rectarum AE, ED, simul sumpta, superant quadrata simul sumpta rectarum BE, EC, rectangulo bis sumpto sub AC, CD.

Cum enim per hoc lemma, quadrata simul sumpta rectarum AE, ED, æqualia sint quadratis simul sumptis rectarum BE, EC, simul cum rectangulo bis sub AC, CD: si hoc rectangulum bis sumptum sub AC, CD, tolla-



boles, quod per defin. 1 inter secundas citatas, bifariàm diuidit ipsum axem AB erit per 11 defin. lib. 2. Apoll. rectangulum ABNX sub axe AB & sub BN recto eius latere, figura io Hyperbola. Quod si per 10. prop. lib. 1. elem. recta BN bifariàm in puncto F diuidatur, iterumque eius semissis BF contermina puncto B, in puncto L secetur, erit BL quarta pars rectæ BN: quare rectangulum ABLK factum sub AB, BL, cùm obtineat candem altitudinem AB cum rectangulo ABNX, sitque illius rectanguli basis BL quarta pars baseos BN alterius huius rectanguli, erit per 1. prop. lib. 6. elem. rectangulum sub AB & BL quarta pars rectanguli sub AB, BN, seu prædictæ figuræ in hyperbola. Iam verò oportcat bis comparare ad axem AB Hyperbolæ HHBG, vel oppositarum sectionum, rectangulum ABLK æquale quartæ parti prædictæ figuræ ABNX, excedensque figura quadrata.

Apparatus. Producatur axis AB vtrimque, & per 3. prop. lib. 1. elem. de productione facta intra locum Hyperboles, ex vertice B sito in ipsa linea Hyperbolæ curua, sumatur portio BT æqualis rectæ BL; & tota recta AT bifariàm in puncto H diuidatur per 10. prop. lib. 1. elem. tùm centro H, interuallo HT vel HA, circumferentia AYT circuli decircinetur, quæ latus BN rectum secabit in puncto R, producendum si opus sit vltra N: tunc verò recta BR erit diametro AHT circuli AYT perpendicularis in puncto B ex intermedijs dictæ diametri AHT; nam in suppositione posuimus rectam BN orthogoniam rectæ AB in puncto eius B: igitur per lemma 47. ad lib. 1. Apoll. rectangulum sub AB, BT, erit æquale quadrato super recta BR. Posuimus autem rectam BT æqualem rectæ BL; ergo per lemma 49. ad lib. 1. Apollon. rectangulum sub AB, BT, erit æquale rectangulo sub AB, BL; & ostendimus rectangulum sub AB, BL, esse quartam partem figuræ sub AB, BN, ergo per 1. axio. lib. 1. elem. rectangulum sub AB, BT, erit æquale quartæ parti figuræ sub AB, BN: Insuper ostendimus rectangulum sub AB, BT esse æquale quadrato super recta BR, ergo per 1. axiom. lib. 1. elemen quadratum super recta BR erit etiam quarta pars figuræ sub AB, BN, vel æquale quartæ parti figuræ eiusdem prædictæ in Hyperbola. Præterea centro O, interuallo OA vel OB, æqualibus ostensis in suppositione, fiat circumferentia AZB alterius circuli, qui minor erit quàm circulus AYT per defin. 38. lib. 1. elem. ob minorem diametrum AOB, respectu alterius AHT maioris: & quia duo isti circuli centra obtinent O, H, propria, in eadem recta linea AOHBT, eorumque diametri AB, AT, commune punctum A extremum obtinent, continetque circuli maioris AYT semidiameter HOA, semidiametrum OA circuli minoris AZB; circumferentiæ istorum circulorum habebunt commune punctum A quod est extremum commune semidiametris assignatis illorum; nullumque aliud punctum diuersum ab prædicto A sibi vendicare possunt in hoc casu: sit enim si fieri possit aliud punctum V commune dictis circumferentijs circulorum diuersum ab A; imprimis non potest esse B vel T, alia extrema diametrorum datarum, nam semidiametri OB, HT, vel OT, HT, essent æquales ex natura circuli, contra ostensa. Sit igitur V punctum ex quo ad centra diuersa O, H, rectæ lineæ VO, VH, transmittantur, & ducatur alia recta VA; resultabunt duo triangula isosceles VOA, VHA, ob æqualitatem laterum VO, AO ex natura circuli in primo triangulo VOA assignato; tùm etiam ob æqualitatem laterum VH, AH in altero triangulo VHA assignato: igitur per prop. 5. lib. 1. elem. anguli OVA, OAV, ad basim VA erunt æquales in triangulo isosceli VOA; tùm etiam ad basim eandem VA erunt æquales anguli HVA, HAV in altero triangulo isosceli VHA: sunt autem duo anguli OVA, HVA inæquales, primusque minor secundo, quia ille continetur in hoc; & tamen sunt ostensi æquales alteri angulo tertio OAV vel HAV; hæc autem pugnantia sequuntur ex positione quod in hoc casu circumferentiæ duorum circulorum AYT, AZB, obtineant aliud punctum commune diuersum ab A: illa ergo positio erit impossibilis. Cùm igitur circumferentiæ prædictæ circulorum vnicum solùm punctum habeant commune, in eo se mutuò non secabunt, per coroll. nost. ad prop. 10. lib. 3. elemen. sed neque potest dici quod congruant dictæ circumferentiæ circulorum, nam per ax. 9. lib. 1. elem. essent æquales illi circuli, ideoque iuxta defin. 1. lib. 3. elem. diametros AB, AT, obtinerent æquales, contra concessa: relinquitur ergo vt dictæ circumferentiæ circulorum se mutuò contingant in dicto puncto A communi. Quoniam autem circumferentia AZB circuli minoris incedit per B extremum suæ diametri AOB, quod existit in puncto vno ex intermedijs alterius diametri AHT circuli maioris AYT, ac proinde est intra dicti circuli maioris aream; tota circumferentia AZB circuli minoris existet intra aream circuli maioris AYT, dempto puncto communi A contactus: si enim non existeret modo prædicto dicta circumferentia circuli minoris, intra aream circuli maioris assignati, sed partim esset intra, partim extra; necessariò adueniendo deforis ad punctum B internum, infringeret circumferentiam circuli maioris, & sic contra demonstrata paulò antè, duæ circumferentiæ prædictæ circulorum, aliud punctum commune diuersum ab A sibi vendicarent. tota ergo circumferentia prædicta circuli minoris AZB existet intra circuli maioris



gura
op-
nac

m,
fi-

ta
ai-
b.
us
c
i

fit recta AO, sunt autem per axiom. 7. lib. 1. elem. æqualium AB, EF, dimidia AO, EO, æqualia: Punctum autem G diuisionis prædictæ rectæ EF, non coincidet cum puncto eius O medio; nam rectangulum sub EO, OF, segmentis rectæ EF, esset æquale quadrato super recta OK; est autem rectangulum illud sub æqualibus segmentis quadratum ex dictis in lemmate 1. nostro ad lib. 2. elem. igitur quadratum super EO vel AO æqualibus, erit æquale quadrato super recta OK; ergo iuxta coroll nost. 4. ad prop. 46. lib. 1. elem. latus EO vel AO, erit æquale lateri OK, contra demonstrata & concessa: absurdum hoc consequens ad positionem quod in hoc casu punctum diuisionis rectæ EF coincidat cum puncto O medio illius, ita vt rectangulum sub segmentis sit æquale quadrato super recta OK, manifestam facit illius falsitatem: punctum ergo diuisionis prædictæ erit G diuersum ab medio puncto O Verùm quia rectangulum sub EG, GF, inæqualibus segmentis factis totius EF, vnum latus habebis maius alio; sitque latus GF maius, & minus EG, manifestum est quod punctum G erit inter O medium punctum totius EF, & eius extremum E; quare recta EG erit minor quàm semissis EO totius EF; & recta GF eris maior quàm prædicta semissis vel ei æqualis OF: sed & idem rectangulum sub EG, GF, erit applicatum ad rectam EF, deficiens figura quadrata super recta EG, eritque ex dictis æquale quadrato super recta OK, vel æquale quartæ parti figuræ in ellipsi assignatæ. Quin etiam erunt per 17. prop. lib. 6. elemen. tres rectæ lineæ proportionales, prima GF, media OK, tertia EG; primaque segmentum maius, tertia segmensum minus, totius rectæ EF prædictæ diuisæ, & media lasus quadrati quod est ostensum quarta pars figuræ prædictæ in ellipsi. Insuper per 3. propositio. lib. 1. elem. poterimus de axe AB æquali ipsi EF, demere ab verticibus axeos A, B, versus medium eius punctum O, rectas AC, BD, singulas æquales ipsis EG; tunc relinquentur per 3. axiom. lib. 1. element. rectæ æquales inter se CB, DA, tùm etiam æquales ipsi rectæ GF: quare per lemma 49. ad lib. 1. Apollon. rectangula sub EG, GF, sub AC, CB, sub BD, DA, erunt æqualia inter se; & quia probauimus rectangulum sub EG, GF, esse æquale quadrato super recta OK, seu quartæ parti figuræ in ellipsi connotatæ, erunt singula duo alia rectangula, vnum sub AC, CB, alterum sub BD, DA, æqualia dicto quadrato super recta OK, seu quartæ parti figuræ in ellipsi prædictæ; & singula illa rectangula duo postsema erunt ad axem AB applicata, ac deficientia figuris quadratis; primaque super recta AC, secunda super recta BD; eruntque iuxta proposit. 17. lib. 6. element. tres rectæ lineæ proportionales, prima CB, media OK, tertia AC; tùm etiam aliæ tres rectæ proportionales, prima DA, media OK, tertia BD; & ex dictis singulæ tertiæ AC, BD, erunt minora segmenta totius rectæ AB.

Demonstratio. Diuisimus rectam lineam EF æqualem ipsi AB maiori axi ellipseos, in duas partes inæquales, EG minorem, GF maiorem, ita vt minor EG sit tertia recta proportionalis, & maior GF sit prima, & latus OK quadrati æqualis quartæ parti figuræ sub AB axe maiore, & sub AH latere eius recto in ellipsi, sit media proportionalis: tùm rectangulum sub EG, GF, dictis inæqualibus partibus totius rectæ EF æqualis ipsi AB, sit applicatum ad ipsam EF, deficiatque figura quadrata super segmento prædicto minore EG. Denique de axe AB maiore ellipseos ex eius verticibus A, B, detraximus versus medium eius punctum O, rectas lineas AC, BD, æquales singulas dictæ rectæ EG proportionali tertiæ, minorique segmento prædictæ rectæ EF æqualis ipsi AB; vnaque partium desractarum verbi gratiâ AC est ad vnam partem versus O medium punctum, & altera BD ad aliam partem versus idem O punctum medium. Igitur per defin. 3. ad lib. 3. Apollon. In ellipsi comparauimus bis ad axem eius maiorem AB, rectangulum æquale quartæ parsi figuræ, hoc est quadrato super recta OK, deficiensque figura quadrata. Quomodo fuit propositum & exequendum.

LEMMA XXIII.

In circulo, comparare ad eius axem rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficiens figura quadrata. Est nostrum.

SVppositio. Sit ad axem AB, dati circuli; cuius centrum O, comparandum rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficiens figura quadrata.

Apparatus, & demonstratio. Sumatur semidiameter AO, axeos AB; hæc erit per coroll. nost. ad prop. 20. lib. 6. elem. latus quadrati æqualis quartæ parti figuræ in circulo, cuius figura est quadratum ipsius axeos AB. Tùm ex punctis A & B, supra axem ponatur hoc latus quadrati æqualis quartæ parti figuræ; eius extrema conuenient in O centro, eò quòd sit æquale semidiametris AO, BO. Fuit autem per 1. lem. ad lib. 2. elemen. rectangulum AD, sub AB & AC æquali ipsi lateri prædicto quod est æquale semidiametro AO; & ex centro O erigatur recta linea OE parallela ipsi AC, per prop. 31. lib. 1. elem. secans in E latus CD parallelogrammi AD: resultabunt duo parallelogramma AE, BE, quæ obtinent angulos rectos in A & D; quare per lemma 13. lib. 1. ipsa erunt rectangula. Es quia in rectangulo AE, latera opposita sunt æqualia per prop. 34. lib. 1. elem. suntque ex constructione duo latera AC, AO, æqualia inter se, reliqua etiam CE, EO, erunt æqualia, & per 1. ax. lib. eiusdem 1. ele.

BA, AC, æquale est his simul sumptis, sub DA, AC, sub BD, AC, vel sub EA, AC: ergo per idem ax. 1. lib. 1. elem. rectangula sub DA, AC, sub EA, AC, & quadratum rectæ EA, simul sumpta, sunt æqualia rectangulis sub DA, AC, sub DA, DC, simul sumptis. Quod si ab his postremis æqualibus auferatur commune rectangulum sub DA, AC; remanebunt æqualia per 3. ax. lib. 1. elem. ex vna parte rectangulum sub EA, AC, simul cum quadrato rectæ EA, & ex alia parte rectangula sub DA, DC: at per prop. 3. lib. 2. elem. rectangulum sub EA, AC, simul cum quadrato rectæ EA, est æquale rectangulum sub CE, EA; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum sub CE, EA, æquale erit rectangulo DA, AC: igitur per 3. lemma, recta CD erit æqualis rectæ EA. est autem posita recta EA in apparatu, æqualis ipsi rectæ BD: ergo per 1. ax. lib. 1. elem. recta CD erit æqualis rectæ BD, sicuti fuit propositum.

LEMMA XXX.

In duas rectas æquidistantes AB, CD, per idem punctum E situm in loco inter illas, recta tres lineæ ducantur AED, BEC, FEG. Dico vt rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub AF, FB; ita esse rectangulum sub CE, ED, ad rectangulum sub CG, GD. Est lemma 14. Pappi ad hunc librum.

Demonstratio. Per lemma 30. ad lib. 1. est vt AE ad EB, sic DE ad EC; & per coroll. prop. 4. lib. 5. elemen. inuertendo vt EB ad AE, sic EC ad DE: igitur per lemma 10. ad lib. 1. erit quadratum rectæ EB, ad rectangulum sub AE, EB, sic quadratum rectæ EC, ad rectangulum sub DE, EC; & inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ EB, sic rectangulum sub DE, EC, ad quadratum rectæ EC: Cumque sit per cit. lem. 30. ad lib. 1. vt EB ad BF, sic EC ad CG; erit per propos. 22. lib. 6. elemen. vt quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BF, sic quadratum rectæ EC ad quadratum rectæ CG: ergo iuxta propos. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate erit, vt rectangulum sub AE, EB, ad quadratum rectæ BF, sic rectangulum sub DE, EC, ad quadratum rectæ CG: sed vt quadratum rectæ BF ad rectangulum sub BF, FA, sic quadratum rectæ CG ad rectangulum sub CG, GD; (nam sumendo in primis duabus quantitatibus pro altitudine communi rectam BF, erit per 1. propos. lib. 6. elem. vt recta BF ad rectam FA, sic quadratum rectæ BF ad rectangulum sub BF, FA; & in secundis quantitatibus sumendo pro altitudine communi rectam CG, erit per eandem 1. prop. lib. 6. elem. vt recta CG ad rectam GD, sic quadratum rectæ CG ad rectangulum sub CG, GD: quare cùm sit per lem. 30. ad lib. 1. FB ad BE, vt GC ad CE; & vt BE ad EA, sic CE ad ED; & vt EA ad AF, sic ED ad DG: erit per propos. 22. lib. 5. elem. ex æquo FB ad AF, sicut GC ad DG: igitur per prop. 11. lib. 5. element. erit vti diximus quadratum rectæ BF ad rectangulum sub BF, FA, sicut quadratum rectæ CG ad rectangulum sub CG, GD.) ergo comparando antecedentia cum postremis hisce, erit ex æqualitate iuxta prop. 22. lib. 5. element. rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub AF, FB, sicut rectangulum sub CE, ED, ad rectangulum sub CG, GD. Quod erat demonstrandum.

LEMMA XXXI.

Si in triangulo verbi gratiâ ABC, ex aliquo puncto ex intermedijs cuiuscumque lateris, puta puncto D, lateris AC, ducatur recta linea parallela alteri lateri, exempli gratiâ DE parallela ipsi CB: secabit aliud latus tertium AB in aliquo puncto E ex intermedijs. Est nostrum.

Si enim per prop. 16. lib. 6. elem. latus AB diuidatur in E, sicuti diuisum est latus AC in D; recta linea DE erit parallela ipsi lateri BC: ergo recta linea ex D puncto lateris AC ex intermedijs ducta parallela lateri BC, secabit latus AB in puncto E ex intermedijs. Quod si velit aduersarius rectam huiusmodi parallelam lateri BC, occurrere vel in A puncto lateris AB, vel extra triangulum: hæc parallela introducta, & probata DE, cùm sint eidem lateri BC parallelæ, erunt inter se parallelæ, per prop. 30. lib. 1. elem. procedunt verò ex eodem puncto D; ergo duæ rectæ parallelæ in eodem plano ductæ concurrent contra naturam parallelarum. Hoc absurdum condemnat positionem contradicentem assertioni huius lemmatis, & ipsam assertionem adstruit.

resultans parallelogrammum ADBF.

Demonstratio in Parabola. Per propos. 42. lib. 1. Parallelogrammum ADBF, æquale est triangulo CAF: ergo si ex his æqualibus commune auferatur quadrilaterum AEBF, relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. triangula AED, BEC, æqualia. Quod erat concludendum in Parabola.

COROLL. NOSTRVM I.

In Parabola, si fuerit recta linea contingens ipsam in vnico puncto, & per hoc punctum contactus ducta diameter Parabolæ; tum ab quibuslibet alijs punctis linea curua Parabolæ ducta recta lineæ intra locum Parabolæ, parallelæ prædictæ contingenti: secabit eas bifariàm ipsa dicta diameter; & vnaquaque earum erit ordinatim applicata ad ipsam diametrum.

IN apparatu illud ostendimus in recta AF ducta parallela tangenti DEB, quæ secatur bifariàm in F, ab diametro CBF transeunte per B punctum contactus, & ordinatim applicata est ipsi CBF diametro; & sic de reliquis huiusmodi rectis lineis æquidistantibus eidem tangenti DEB. Sed etiam illud notum est, ex coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. quod sint ordinatim applicatæ diametro CBF; quare per 10. & 12. defin. lib. 1. inter primas, erunt bifariàm sectæ ab illa.

In Hyperbola, Ellipsi, & circuli circumferentia sit suppositio, & apparatus. Contingant in punctis A, & B, duæ rectæ lineæ AC, BD, lineam curuam AB, conuenientes in puncto E extra eius locum. Sitque G centrum inuentum in circulo per prop. 1. lib. 3. elem. In Hyperbola verò & ellipsi per prop. 45. lib. 2. per quod diametri incedunt iuxta coroll. proposit. 51. lib. 1. Ducantur verò diametri ex puncto G seu centro, per puncta prædicta A & B contactuum; hæ duæ diametri in Hyperbola productæ vltra puncta contactuum A & B, procedent intra locum eius per coroll. nost. 1. ad prop. 31. lib. 1. & per coroll. nost. 1. ad prop. 26. lib. 1. solummodò secabunt lineam curuam Hyperboles in illis punctis vnicis contactuum, vna in A, altera in B: In ellipsi verò & circulo, productæ illæ diametri GA, GB, vltra A & B, extra eorum areas procedere debent. Porrò istæ rectæ AC, BD, contingentes sub centro G in Hyperbola procedent in infinitum productæ, per coroll. prop. 31. lib. 1. quare ipsa AC contingens occurret in C sub centro G, diametro GB; & altera BD contingens occurret diametro GA in puncto D, sub centro G, per cit. coroll. propos. 31. lib. 1. Insuper per prop. 10. lib. 1. elem. si diuidatur recta AB nectens puncta contactuum, bifariàm in H, recta linea EH transmittenda erit altera diameter, per prop. 29. lib. 2. quare producta vltra H in ellipsi & circulo, pertinget ad G centrum, per quod diametri omnes incedere debent per coroll. prop. 51. lib. 1. At verò in hyperbola producta vltra punctum E, perueniet ad centrum G, iuxta idem coroll. cit. Iam verò per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto A ducatur intra locum datarum sectionum & circuli, recta linea AF, parallela tangenti BD, hæc per prop. 11. Procli occurret in F diametro CBG, & erit ordinatim applicata diametro GBF, per coroll. nost. 7. ad propos. 48. lib. 1. eritque bifariàm diuisa in F, per prop. 46. lib. 1. occurrens in I, alteri puncto sectionum, & circuli. Quia verò diameter DAG, secat rectam AF in A, secabit etiam in D, alteram parallelam BD, per 11. prop. Procli. Similiter si per prop. 31. lib. 1. element. ex puncto B contactus educeretur recta linea parallela contingenti rectæ AC, ipsa ordinatim esset applicata diametro DAG, per cit. nost. 7. lem. ad proposit. 48. lib. 1. quare cùm diameter CBG secet hanc parallelam in B, secabit etiam per propos. 11. Procli, alteram parallelam videlicet tangentem AC in puncto C. Atque ita in vniuersum tam in Hyperbola, quàm in ellipsi, quàm in circulo probauerimus rectam tangentem AC occurrere in C diametro GB; & tangentem BD occurrere in D diametro AGD; licet in Hyperbola illud alia ratione ostenderimus. Porrò consideranda erunt triangula resultantia AED, BEC, circa punctum concursus E duarum tangentium rectarum AC, BD, quod vocat verticem Author. & Dico hæc duo triangula esse æqualia.

Demonstratio. Quia recta AF est ordinatim applicata diametro GB, & recta AE contingit in A, Hyperbolen, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam, conuenitque cum diametro GB in C: erit per propos. 37. lib. 1. rectangulum sub FG, GC, æquale quadrato rectæ BG. Quare per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt FG ad GB, sic GB ad GC: igitur positis his tribus rectis proportionalibus FB, GB, GC; erit per coroll. prop. 20. lib. 6. elem. vt FG ad GC, sic quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ GB; sed per lemma 1. vt quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ GB, sic triangulum AGF ad triangulum DGB; & per prop. 1. lib. 6. elem. est vt FG ad GC, sic triangulum AGF ad triangulum AGC: igitur per propositio. 11. libri 5. elementor. erit vt triangulum AGF ad triangulum AGC, sic triangulum AGF ad triangulum DGB. Quare per propsitio. 9. lib. 5. elem. triangula AGC, DGB, erunt æqualia. Quod si in Hyperbola ab illis æqualibus triangulis, dematur commune quadrilaterum DGCE, relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. triangula proposita æqualia AED, BEC. In ellipsi verò si dematur commune quadrilaterum AEBG, relinquentur per cit. ax. 3. eadem ipsa proposita triangula AED, BEC. In circulo denique si prædictis triangulis AGC, DGB æqualibus, addatur commune

quadrilaterum AEBG, fient per 2. axio. lib. 5. elem. duo prædicta eadem triangula proposita æqualia AED, BEC. Atque ita demonstrauerimus propositionem.

Alia demonstratio in circulo ex solis elementorum principijs. Quia rectæ lineæ EAC, EBD, ex eodem E externo puncto profluentes, vel ad illud terminatæ, circulum contingunt; erunt per coroll. 2. ad propos. 36. lib. 3. elem. duæ rectæ EA, EB, æquales; & per proposit. 18. lib. eiusdem 3. elem. anguli in A & B, recti, effecti ab diametris GA, GB, & tangentibus EAC, EBD: Igitur triangula DAE, CBE, cum habeant angulum in E communem, duosque angulos rectos æquales prędictos, reliquos tertios angulos habebunt æquales per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. ele. eruntque propterea æquiangula: quare per prop. 4. lib. 6. elem. erit vt AE ad ED, sic BE ad EC; sunt autem ostensa latera AE primum, & tertium BE, æqualia; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secundum ED, & quartum EC, erunt æqualia: cùm ergo prædicta triangula habeant duo latera BE, EC, æqualia respectiuè duobus lateribus AE, ED, comprehendantque angulum communem in E; ipsa triangula AED, BEC, erunt æqualia.

COROLL. NOSTRVM II.

In Parabola, eisdem datis ac demonstratis: erit triangulum BAD, rectilineum, æquale triangulo rectilineo ABC.

CVm enim sint ostensa triangula AED, BEC, æqualia; addendo ipsis commune triangulum AEB, rectilineum; fient per ax. 2. lib. 1. elem. duo proposita triangula rectilinea æqualia BAD, ABC.

COROLL. NOSTRVM III.

In Parabola, Eisdem datis ac demonstratis: erit triangulum BAD mixtilineum, æquale triangulo mixtilineo ABC.

SI enim æqualibus triangulis ostensis AED, BEC, addatur triangulum mixtilineum AEB commune; fient per 2. axiom. lib. 1. element. duo prædicta triangula BAD, ABC, mixtilinea æqualia. Vel si ab æqualibus triangulis ostensis rectilineis BAD, ABC, in secundo coroll. tollatur communis figura mixtilinea BA, ex recta BA, & curua BA; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elementorum triangula proposita mixtilinea BAD, ABC, æqualia.

COROLL. NOSTRVM IV.

Eisdem positis, ac demonstratis in Parabola: erit triangulum BAF rectilineum æquale triangulo BCA, æquale; basesque illorum BC, BF, æquales.

PEr prop. 34. lib. 1. elem. in parallelogrammo ADBF, diameter AB efficiet duo triangula rectilinea BAD, ABF, æqualia; & ostendimus in coroll. 2. triangulum ABC rectilineum esse æquale triangulo rectilineo BAD; ergo per 1. axiom. lib. 1. element. duo triangula rectilinea proposita BAF, BAC, erunt æqualia: cumque obtineant eandem altitudinem per coroll. nost. 1. ad propositio. 1. lib. 6. element. bases habebunt æquales BC, BF, per ipsam 1. propos. cit. cùm sint æqualia ostensa dicta triangula.

COROLL. NOSTRVM V.

In Hyperbola, Ellipsi, & circulo. Eisdem positis ac demonstratis: erunt triangula AGC, DGB, æqualia.

HOc enim in demonstratione propositionis huius primæ demonstratum est primo loco.

COROLL. NOSTRVM VI.

In Hyperbola, Ellipsi, & circulo. Eisdem positis ac demonstratis: erunt triangula mixtilinea ADB BCA, æqualia.

SI enim æqualibus triangulis AED, BEC ostensis, addatur in Hyperbola, & ellipsi, commune triangulum mixtilineum AEB; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. proposita duo triangula mixtilinea ADB, BCA, æqualia. At verò in circulo si æqualibus triangulis AED, BEC, addatur commune triangulum mixtilineum, AGB; fient eadem proposita triangula ADB, BCA, mixtilinea æqualia.

COROLL. NOSTRVM. VII.

In Hyperbola, Ellipsi, & circulo. Eisdem positis, ac demonstratis: erunt triangula rectilinea ADB, BCA, æqualia.

ÆQualibus angulis ostensis AED, BEC, addatur commune triangulum rectilineum AEB in Hyperbola & ellipsi, at verò in circulo commune triangulum rectilineum AGB; fient per 2. axiom. lib. 1. elementorum proposita rectilinea triangula æqualia ADB, BCA.

PRO-

PROPOSITIO II.

Iisdem positis. Si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumatur aliquod punctum, & per ipsum æquidistantes contingentibus vsque ad diametros ducantur: Quadrilaterum factum ad vnam contingentium, & ad vnam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum constituitur.

HÆc propositio multos casus obtinet colligendos ex casibus propositio. 42. & 43. lib. 1. vti adnotauit Eutocius, ex diuerso situ puncti assumendi: quorum demonstrationes præcipuè dependebunt ex afferendis. Sit igitur

Suppositio. Coni sectionem vel circuli circumferentiam AB, contingãt duæ rectæ lineæ AEC, BED, illa in puncto A, hæc in puncto B; conueniantque exteriùs in puncto E, vti in prima propos. ductæque sint diametri AD, BC, per illa puncta contactuum; & diameter AD, cum tangente BED conueniat in D; & diameter BC, tangensque AEC, concurrant in C, vti in suppositione ad primam propositionem ostendimus: hæc enim supponitur vti Author intelligit, hisce verbis, Iisdem positis, supple vt in prima propositione. Præterea sit assumptum punctum G in ipsis lineis curuis, ex quo recta GKL, vel KGL ducta sit parallela tangenti AEC, occurrens in L, & in K diametris AD, BC per prop. 11. Procli, & alia recta GMF, vel MG, parallela ipsi tangenti BED, occurrens in M alteri diametro AD, per cit. prop. 11. Procli, & occurrens etiam I, tangenti AEC productæ, & in F, diametro CB vel tangenti AC, per eandem proposit. Procli. Triangulum resultabit AIM factum ab portione AI, tangentis CEAI, & diametri AD portione AM, & ductæ IGM, vel MIG, portione IM, parallelæ tangenti BED; tùm resultabit quadrilaterum CLGI, factum ad vnam AEC contingentem, & diametrum BC, & ductis parallelis ipsis tangentibus. Dico autem triangulum prædictum AIM, esse æquale quadrilatero prædicto CLGI. siue punctum G sumptum sit inter puncta A & B contactuum data, siue extra lineam curuam inter ipsa inclusam ad partes E puncti concursus tangentium datarum linearum AEC, BED.

Demonstratio in Parabola. Quia per prop. 42. lib. 1. Triangulum KGM, est æquale quadrilatero ACLK: in casu quo punctum G sit assumptum in linea curua ad partes E, inter duas diametros DA, CB, vel inter duo puncta contactuum A & B; si commune adimatur quadrilaterum AIGK; remanebit per 3. axio. lib. 1. element. triangulum AIM propositum æquale quadrilatero proposito CLGI. At verò in casu, quo punctum G, sit extra lineam curuam AB ad partes E, tamen in ipsa curua linea: si addatur dictis æqualibus KGM, ACLK; commune quadrilaterum AIGK, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. æqualia, triangulum propositum AIM, & quadrilaterum CLGI propositum. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio in Hyperbola, ellipsi, & circulo. Per prop. 43. lib. 1. triangulum GKM æquale erit quadrilatero ACLK, si auferantur ab maioribus quantitatibus, quantitates quibus differunt minores à maioribus, de quibus agitur in illa propos. cit. 43. Iam verò in Hyperbola & ellipsi in casu quo punctum G sumptum sit in linea curua ad partes E, inter puncta A & B; si auferatur commune AIGK quadrilaterum, ab dictis æqualibus, triangulo GKM; & quadrilatero ACLK; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. æqualia, triangulum AIM, & quadrilaterum CLGI. In casu verò quo punctum G sit extra dictam lineam curuam prædictam AB, in alio puncto lineæ curuæ Hyperboles vel ellipseos; si æqualibus triangulo GKM, & quadrilatero ACLK, addatur commune quadrilaterum AIGK; fient per 2. axiom. lib. 1. element. æqualia, triangulum AIM, & quadrilaterum CLGI. At verò in circulo, posito puncto G in arcu AG, ad partes E; si æqualibus ostensis, triangulo GKM, & quadrilatero ACLK, addatur commune quadrilaterum AIGK; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. æqualia, triangulum AIM, & quadrilaterum CLGI: quod si punctum G sit in altero arcu circuli ad partes oppositas ipsi E; si ab æqualibus prædictis, triangulo GKM, & quadrilatero ACLK, commune dematur quadrilaterum AIGK; relinquentur per 3. ax. lib. 1. elementorum æqualia, triangulum AIM, & quadrilaterum CLGI. Sicuti fuit propositum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Iisdem positis, ac demonstratis in primo casu ex declaratis: si in Parabola, hyperbola, & ellipsi producatur recta LGK, donec attingat in N, lineam curuam, (nam in circulo secat in N;) erit triangulum KNX, æquale triangulo KGM, si ducta fuerit recta NX parallela ipsi BED tangenti, occurrens in X diametro AD, iuxta proposit. 11. Procli. Et aliter propositio demonstrabitur in dicto casu.

DEmonstratio. In Parabola per prop. 49. lib. 1. Triangulum KNX, est æquale quadrila-

drilatero CAKL. In Hyperbola verò, & ellipsi, & circuli circumferentia, idem triangulum KNX, æquale quadrilatero eidem CAKL, per propos. 50. lib. 1. Quoniam verò recta NKG, parallela est tangenti AEC, ipsa KNG, erit ordinatim applicata diametro DAX, & bifariàm in K, ab ipsa diametro DAX, per coroll. nost. 7. ad propos. 48. lib. 1. & quia etiam est recta NX parallela tangenti BD, sicuti etiam est eidem tangenti parallela MGF, erunt per prop. 30. lib. 1. elemen. duæ rectæ MG, NX, parallelæ: igitur duo triangula KNX, KGM, erunt per lemma 50. lib. 1. comparabilia in ratione laterum; ita vt sit GK ad KM, sicut NK ad KX; primum autem GK ostensum est æquale tertio NK; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secundum AM, erit æquale quarto KM; hæc autem latera respectiuè æqualia, comprehendunt angulos ad verticem K æquales per propositio. 15. lib. 1. elem. ergo per 4. propos. lib. eiusdem 1. elementor. triangula ipsa KNX, KGM, erunt æqualia. ostendimus autem triangulum KNX esse æquale quadrilatero CAKL, ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. triangulum KGM, erit æquale eidem quadrilatero CAKL. Quod si ab his postremis æqualibus, adimatur commune quadrilaterum AIGK; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. element. proposita æqualia, triangulum AIM, & quadrilaterum CLGI; & alia ratione demonstrata æqualia.

PROPOSITIO III.

Iisdem positis. Si in coni sectione, vel circuli circumferentia duo puncta sumantur; & per ipsa ducantur æquidistantes contingentibus vsque ad diametros: Quadrilatera quæ ab ipsis fiunt, in diametris constituta, inter se sunt æqualia.

Diuersi sunt casus huius propositionis, sicuti antecedentis. Puncta verò assumenda in linea curua, vti Eutocius animaduertit, sita esse debent inter duas diametros ad partes concursus tangentium rectarum; vel extra illum arcum, ad easdem partes eiusdem diametri: si enim vnum punctum assumeretur in dicto arcu inter duas diametros, & alterum extra illum arcum; vel vnum punctum, extra illum arcum quidem, ad vnam partem vnius diametri, alterum verò ad aliam partem alterius diametri; non constituerentur quadrilatera proposita. Porrò figurationes dabimus in casu quo duo puncta dentur in linea curua inter duas diametros ad partes concursus tangentium datarum: nam in alio casu figurationes intelligi poterunt; & demonstratio afferenda in priore casu, inseruiet etiam in posteriore casu ad colligendam veritatem ab prudente Geometra.

Suppositio autem afferenda supponet vt Author loquitur, ea quæ in suppositione primæ propositionis & secundæ probauimus. Sit igitur

Suppositio. In coni sectione, vel circuli circumferentia, sint duæ rectæ lineæ AEC, BED, contingentes, illa quidem in A, hæc verò in B, & conuenientes in puncto E: sintque duæ diametri, vna AD transiens per punctum A, altera BC incedens per punctum B; & tangens AEC conueniat in C cum diametro BC, & alia tangens BED conueniat in D cum diametro AD; vt in antecedentibus propositionibus. Sumptaque sint duo puncta F, G, in linea curua sita inter duas diametros AD, BC, ad partes E concursus duarum tangentium rectarum AEC, BED: ductaque sit per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto F, recta linea FKL parallela tangenti AEC, quæ secabit in K obuiam tangentem BED, & diametrum BD in L, per prop. 11. Procli. Simili modo recta linea GHPR ducta ex alio puncto G, parallela alteri tangenti BED, secabit in H obuiam rectam FKL, tangentem AEC in P, & diametrum AD in R. Præterea ex supradicto puncto F, agatur alia recta linea NFM parallela tangenti BED, quæ secabit in I, tangentem AEC, & in M diametrum AD, per cit. propos. 11. Procli: tùm etiam ex alio puncto G, agatur alia recta NGXO, parallela ipsi tangenti AEC, quæ per propos. 11. Procli secabit in N rectam NM, & in X rectam tangentem BED, & in O diametrum BC: sed etiam per 11. proposit. Procli, duæ rectæ OGN, MF productæ se mutuò secabunt in N. quia recta OGN secat tangentem BE parallelam ipsi MF in puncto G. Porrò ex hac architectura rectarum linearum resultabunt diuersa triangula, & quadrilatera in diametris constituta. Dico autem quadrilaterum LHGO, æquale esse quadrilatero MFHR; & quadrilaterum LFNO, æquale esse quadrilatero RGNM.

*Demonstratio. Quia per 2. prop. Triangulum RPA æquale est quadrilatero CPGO; & triangulum AIM, æquale quadrilatero CIFL. Est autem per 8. ax. lib. 1. elem. triangulum RPA maius quàm triangulum AIM, quadrilatero RPIM; ergo per 2. lemma, quadrilaterum CPGO maius erit quàm quadrilaterum CIFL, eodem quadrilatero RPIM. Cùm autem per axiom. 19. lib. 1. elem. omne totum sit æquale suis omnibus simul sumptis partibus; & differentia qua minus differt à maiori, & ipsum minus, sint partes simul sum-

ſumptæ, maioris; ergo per lemma 3. in materia ſubiecta ſi ab maiore quadrilatero CPGO, demamus minus quadrilaterum CIFL, in reſiduo apparebit differentia RPIM: igitur quadrilaterum CPGO, erit æquale ſimul ſumptis quadrilateris CIFL, RPIM; hoc eſt ſimul ſumptis quadrilateris CPHL, RHFM æqualibus duobus prædictis. Quod ſi ex his duobus poſtremis quadrilateris ſimul ſumptis CPHL, RHFM, æqualibus oſtenſis quadrilatero CPGO; auferatur commune quadrilaterum CPHL; relinquetur per 3. axiom. lib. 1. elem. quadrilaterum LHGO, æquale quadrilatero MFHR: & ſi his poſtremis æqualibus addatur in parabola & Hyperbola commune quadrilaterum FHGN; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. quadrilatera æqualia LFNO, RGNM: in ellipſi verò tollatur, relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elementor. eadem quadrilatera æqualia.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Eiſdem datis, & oſtenſis, erunt quadrilatera RGFM, LFGO, mixtilinea æqualia.

SI enim quadrilateris oſtenſis æqualibus LHGO, MFHR, in Parabola & Hyperbola addatur commune mixtilineum triangulum FHG, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. quadrilatera æqualia mixtilinea propoſita RGFM, LFGO: At verò in ellipſi & circulo, ſi ab dictis æqualibus oſtenſis quadrilateris LHGO, MFHR, tollatur commune mixtilineum triangulum FHG, relinquentur per 3. axio. lib. 1. elem. propoſita quadrilatera mixtilinea æqualia RGFM, LFGO.

PROPOSITIO IV.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes, inter ſe conueniant; & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes: Triangula quæ ad contingentes conſtituuntur, ſibi ipſis æqualia erunt.

SVppoſitio. Oppoſitarum ſectionum vnam contingat in A recta linea AC, & alteram alia BC recta in B, conuenientes in puncto C, quod erit per prop. 32. libri 2. in angulo deinceps continenti Hyperbolam quamlibet ex datis, non autem in centro illarum D repetiendo per prop. 45. lib. 2. neque etiam in angulo continente quamlibet ex datis oppoſitis ſectionibus, vti explicauimus in coroll. noſtro ad cit. prop. 32. lib. 2. Tùm per prædicta puncta A, B, contactuum emiſſæ ſint rectæ lineæ ad centrum D, diametrales ADF, BDG, occurrentes dictis tangentibus; ADF quidem in F tangenti BC; & BDG in G tangenti AC. Dico triangula reſultantia ADG, BDF, eſſe æqualia; tùm etiam triangula ACF, BCG; conſtituta ad ipſas tangentes AC, BC.

Apparatus. Producatur diameter ADF, vltra F, occurret in H lineæ curuæ oppoſitæ ſectionis, per prop. 29. lib. 1. & tota ADH, bifariàm diuiſa erit in centro D, per prop. 30. lib. 1. Tùm ex puncto H, per prop. 49. lib. 2. ponatur recta HL contingens Hyperbolam BH in puncto H, hæc per coroll. propoſitio. 31. lib. 1. non tranſibit per centrum D, & ipſam Hyperbolam BH; occurret igitur diametro BDG, in puncto L, inter centrum D, & punctum B. Porrò per coroll. noſt. 2. ad propoſit. 44. lib. 1. duæ rectæ lineæ HL, AG, tangentes datas ſectiones oppoſitas, vnam vnam, altera aliam, in punctis extremis diametri ADH, erunt æquales & parallelæ.

Demonſtratio. Quia duæ rectæ lineæ LH, AG, ſunt parallelæ, erunt anguli HLD, AGD, æquales, per prop. 29. lib. 1. elem. Sed etiam per prop. 15. lib. eiuſdem, anguli ad verticem D ſunt æquales: ergo in triangulis HLD, AGD, quia latera LH, AG, ſunt oſtenſa in apparatu æqualia, duoque ſunt anguli æquales reſpectiuè duobus angulis; erunt per prop. 26. lib. 1. elem. ipſa triangula HLD, AGD, æqualia. Sunt autem per coroll. noſt. 5. ad prop. 1. triangula duo HLD, BFD, æqualia: igitur per 1. axiom. lib. 1. elem. triangula propoſita ADG, BDF, æqualia: Quibus ſi addatur commune quadrilaterum DFCG, fient per 2. ax. lib. 1. elem. alia duo triangula propoſita æqualia ACF, BCG.

Aduerte ex Eutocio ad hanc propoſit. notis proprijs, poſſe ſumi vt alterutram ſectionum oppoſitarum duæ rectæ lineæ contingant concurrentes in vnum punctum quod erit intra angulum continentem ipſam hyperbolam contactam & non in centro eius, per coroll. noſt. ad prop. 25. lib. 2. Ducta verò diameter ab vno puncto contactus per centrum datarum oppoſitarum ſectionum, ipſa occurret alteri ſectioni oppoſitæ in vno puncto per prop. 29. lib. 1. & bifariàm ſecabitur in centro per prop. 30. lib. eiuſdem 1. quod ſi ex illo dicto occurſus puncto ſi per prop. 49. lib. 2. agatur recta linea tangens hanc ſectionem oppoſitam, occurret inter ipſam & centrum dictæ diametro, per coroll. prop. 31. lib. 1. eritque per coroll. noſt. 2. ad prop. 44. lib. 1. æqualis & parallela dictæ contingenti, ipſaque triangula reſultantia erunt æqualia per coroll. noſtrum 3. ad cit. prop. 44. lib. 1.

PRO-

PROPOSITIO V.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant; & in quauis sectionum aliquod punctum sumatur, à quo ducantur duæ rectæ lineæ, vna quidem contingenti æquidistans, altera verò æquidistans ei quæ tactus coniungit: Triangulum quod ab ipsis constituitur ad diametrum per occursum ductam, à triangulo quod est ad occursum contingentium differt triangulo facto ad contingentem & ad diametrum quæ per tactum ducta fuerit.

SVppositio, & apparatus. Sectionum oppositarum A, B, quæratur centrum C per prop.45. lib.2. & linea recta ED sectionem A contingat in E, & sectionem B oppositam contingat in F recta FD, conueniens in D cum altera tangente ED, quod punctum D non erit centrum C, sed in angulo deinceps continenti alterutram sectionem, per prop.32. lib.2. sed & recta linea DC erit diameter recta & coniugata transuersæ transeunti per C centrum parallelæ ipsi rectæ vnienti puncta F, E, prædicta contactuum, per coroll. nost. ad prop.39. lib.2. Porrò producta recta CD vltra D, ex puncto G sumpto in linea curua sectionis B, agatur per propos.31.lib.1.elem. recta linea GM parallela rectæ tangenti FD, quæ secabit in M obuiam CD productam vltra D, per prop.11. Procli: tùm alia recta GKHL parallela rectæ FE vnienti prædicta puncta F, E, contactuum, quæ secabit obuias rectas FD in K, CDM in H, FC ducendam diametrum ex puncto contactus F per centrum C, in puncto L, per cit. prop.11. Procli. Dico triangulum GHM resultans ex dictis parallelis GM, GH, ad rectam diametrum CDM ductam per occursum D tangentium datarum rectarum, differre ab triangulo KHD quod est ad occursum prædictum D, triangulo KLF facto ad contingentem FKD, & ad diametrum FCL ex puncto F contactus deductam.

Demonstratio. Quandoquidem recta CD est probata diameter recta sectionum datarum oppositarum, secatur bifariàm rectam FE parallelam diametro transuersæ transeunti per C, centrum, iuxta prop.39. lib.2. erit per coroll. nost.36. prop.49. lib.2. ipsa recta FE ordinatim applicata dictæ diametro CDM rectæ; sed est per apparatum recta GKHL parallela ipsi EF; & recta MG æquidistans ipsi tangenti FD: ergo per propos.45. lib.1. Triangulum GHM, differt ab triangulo CLH, triangulo CDF. Quare per lemma 3. summa triangulorum CLH, CDF, erit æqualis triangulo GHM: quod si ex his æqualibus auferatur commune triangulum KHD; erit per 4.lemma, triangulum KLF, differentia inter triangula GHM, KHD: igitur sicuti propositum est, triangulum GHM differt ab triangulo KHD, triangulo KLF.

COROLLARIVM.

Constat igitur Triangulum KLF esse æquale quadrilatero MGKD.

CVm enim ostenderimus duo simul triangula CLH, CDF, esse æqualia triangulo GHM: si ab his æqualibus tollatur commune triangulum KHD; relinquetur triangulum KLF, æquale quadrilatero MGKD, per 3. axio. lib.1. elem.

PROPOSITIO VI.

Iisdem positis. Si in vna oppositarum sectionum aliquod punctum sumatur, & ab eo ducantur rectæ lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus & diametris occurrant: Quadrilaterum ab ipsis factum ad vnam contingentium, & ad vnam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum constituitur.

SVppositio, & apparatus. Oppositæ sectiones AB, CD, habeant diametros AEC, BED, per earum centrum E incedentes: vnamque earum AB, contingant duæ rectæ lineæ AF, BG, illa in A, hæc in B, quæ concurrunt in H puncto, intra angulum continentem ipsam, & extra centrum E, per coroll. nost. 1. ad prop.25.lib.2. sumptumque sit aliquod punctum K in eiusdem sectionis linea curua, vel in altera opposita; ex quo ducantur per prop. 31. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ KLM, KNX, contingentibus prædictis æquidistantes, illa quidem contingenti BG, hæc verò contingenti AF; & per prop.11. Procli, KLM occurrat in 1 contingenti AF productæ si opus sit, & KNX occurrat in L alteri contingenti BG productæ si opus sit; tùm diametris prædictis in

in M, & N. Dico quadrilaterum KIFM factum ab ipsis ductis lineis ad vnam contingentium AFI, & ad vnam BED diametrorum, æquale esse triangulo AIN constituto ad eandem contingentem AF, & ad alteram diametrum AEC. Porrò si fuerit necessarium producantur tangentes AF, BG, donec occurrant diametris in F & G, iuxta axiom. 28. libri 1. element.

Demonstratio. Oppositarum sectionum AB, CD, vnam AB, contingunt duæ rectæ lineæ AF, BG, conuenientes in H; & in eadem sectione AB sumptum est punctum K, ex quo ducta est recta KL parallela contingenti AF, secans in M, diametrum BED: igitur per 2. prop. triangulum propositum AIN erit æquale quadrilatero KIFM, in casu quo eandem sectionem contingant duæ rectæ AF, BG, vti prima figura indicat. In casu verò quo vna BG sectionem AB contingat in B & alia recta CR contingat in C alteram sectionem DC, ducendo ex puncto C per centrum E diametrum CEA, & per prop. 49. lib. 2. educendo ex puncto A aliam contingentem rectam AFI ipsam sectionem AB, erit per 4. prop. triangulum AIN æquale triangulo CRG æquale: erit verò per prop. 5. coroll. triangulum CRG æquale quadrilatero KIFM; ergo per 1. axio. lib. element. triangulum AIN erit æquale quadrilatero KIFM. Quod si punctum K sit datum in linea curua sectionis AB, & tangentes datæ seorsim sumptæ tangant suas proprias sectiones, conueniantque in vnum punctum, eodem modo procedendum erit vti vltimò diximus. Atque ita notandum est hanc propositionem diuersos obtinere casus.

PROPOSITIO VII.

Iisdem positis. Si in vtraque sectione aliqua puncta sumantur; & ab ipsis ducantur lineæ contingentibus æquidistantes, quæ & contingentibus & diametris occurrant: quadrilatera à lineis ductis constituta ad diametros, inter se æqualia erunt.

Suppositis iisdem quæ in superiore 6. propositione. Et præterea sumpta sint duo puncta K, L, vnum K in sectione AB, & aliud L in sectione DC; per quæ puncta sint transmissæ rectæ lineæ MKPRχ, NSTLω, respectiuè parallelæ tangentibus rectis AF, BG; tùm etiam aliæ duæ rectæ lineæ χφYLψ, NIOKX, parallelæ respectiuè eisdem tangentibus AG, BG; quæ & dictis tangentibus, & dictis diametris AEC, BED, occurrant in punctis designatis. Dico quadrilatera ab illis dictis rectis lineis constituta ad diametros dictas, esse æqualia, videlicet quadrilaterum TRKN esse æquale quadrilatero LYIN; tùm quadrilaterum KχYI esse æquale quadrilatero RTLχ.

Demonstratio. Per 2. propos. Triangulum AOI est æquale quadrilatero RFOK; quibus æqualibus si adijciatur quadrilaterum EIOF; fient per 2. axiom. lib. 1. element. ex vna parte triangulum AEF, & ex alia quadrilaterum KIER, æqualia; est verò per coroll. nost. 5. ad prop. 1. triangulum AEF æquale triangulo BEG: ergo per 1. axiom. lib. 1. element. triangulum BEG erit æquale quadrilatero KIER, & huic quadrilatero KIER, est æquale quadrilaterum LTEY, (quod sic probabitur, ex puncto C si concipiamus rectam lineam contingentem Hyperbolam DC, concurret cum diametro DEB, in puncto ∂ inter centrum E, & hyperbolam DC, per propofit. 31. lib. 1. hoc verò triangulum CE∂ erit æquale triangulo AEF per coroll. 3. ad prop. 44. lib. 1. sed & hoc triangulum CE∂ eodem modo probabitur æquale quadrilatero LTEY, quo probatum est triangulum AEF æquale quadrilatero KIER igitur cùm fint æqualibus ostensis triangulis AEF, CE∂, ostensa æqualia quadrilatera KIER, LTEY, ipsa quadrilatera erunt æqualia.) Quod si his æqualibus quadrilateris KIER, LTEY, adijciatur commune quadrilaterum NTEI, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. æqualia quadrilatera TRKN, LYIN, æqualia. Simili prorsus discursu ex eisdem principijs ostendentur æqualia quadrilatera KχYI, RTLχ.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Iisdem positis ac demonstratis quadrilatera LTEY, KIER, æqualia erunt.

Vltimum hoc demonstrauimus ante conclusionem demonstrationis præsentis propositionis.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem positis. pro punctis K, L, sumantur C, D, in quibus diametri cum sectionibus conueniunt; & per ipsa contingentibus æquidistantes ducantur. Dico quadrilaterum DEGX, quadrilatero CEFT æquale esse: & quadrilaterum XGID, quadrilatero TFOC.

SVppositio & apparatus. Itaque sint tangentes duæ rectæ AF, BG, in sectione AB, conuenientes in H puncto; & duæ diametri AEC, BED, occurrentes in punctis D & C, alteri sectioni oppositæ, DC, transeuntes per E Centrum, quibus occurrant in F & G dictæ tangentes. Tùm ex punctis C, D, eductæ aliæ rectæ DI, CO parallelæ prædictis tangentibus, DI quidem parallela tangenti BG; CO verò parallela tangenti AF, occurrentes in I & O prædictis diametris, iuxta prop. 11. Procli: recta OC, & recta DI, erunt etiam tangentes sectionem DC, per coroll. nost. 5. ad prop 44. lib. 1. eritque CO æqualis ipsi AF tangenti, & recta DI æqualis tangenti BG, per coroll. nost. 2. ad cit. prop. 44. lib. 1. Insuper ex eisdem punctis C & D, ductæ sint aliæ rectæ CT, DX, parallelæ eisdem tangentibus BG, AF; CT quidem ipsi BG, & DX ipsi AF, per prop. 31. lib. 1. elem. occurret CT in T productæ tangenti AF vltra F, per 11. propos. Procli, & DX occurret in X productæ tangenti BG vltra G, per eandem prop. Procli. Denique ducatur recta AB nectens puncta contactuum A, B; & alia recta GF; & alia recta EHK, ex centro E per H punctum concursus tangentium BG, AF, quod punctum H est intra angulum continentem hyperbolam AB, non autem in centro E, per coroll. nost. 1. ad prop. 25. lib. 2. ergo recta linea EH diuidat angulum continentem dictam Hyperbolam; productaque vltra H versus ipsam Hyperbolam AB, intra eius locum penetrabit, per coroll. nost. 5. ad propos. 2. lib. 2. ideoque erit eius diameter transuersa per coroll. prop. 51. lib. 1. quare rectam AB bifariàm in K secabit per propos. 30. lib. 2. Porrò resultabunt ex ista constructione diuersa triangula, & proposita quadrilatera DEGX, CEFT, probanda æqualia: tùm etiam æqualia quadrilatera XGID, TFOC.

Demonstratio. Quia in triangulo AEB, basis AB est bifariàm in K diuisa, vti ostendimus; & rectæ AF, BG, se mutuò intersecant in H puncto rectæ EK; recta GF per lemma 5. æquidistabit rectæ AB: igitur per 50. lem. lib. 1. erit vt AE ad EB, sic GE ad EF; & vt AE ad GE, sic BE ad EF; & vt AE ad AG, sic BE ad BF: est autem per propos. 15. lib. 5. elem. & coroll. prop. 4. lib. eiusdem, vt CA ad AE, sic DB ad BE, antecedentes enim sunt duplæ consequentium per 30. prop. lib. 1. & ostendimus esse AE ad AG, sicut BE ad BF; ergo per propos. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate erit vt CA ad AG, sic DB ad BF. Quare per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ CA ad quadratum rectæ AG, sic erit quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ BF. & quia in triangulo CTA est per apparatum seu ex datis recta GH parallela lateri CT; erit per 1. lemma, vt quadratum rectæ CA ad quadratum rectæ AG, sic triangulum CTA ad triangulum GHA. Eodem modo in triangulo DXB, quia ex datis recta FH est parallela lateri DX; erit per cit. 1. lemma, vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ BF, sic triangulum DXB ad triangulum FHB. igitur cùm probauerimus esse vt quadratum rectæ CA ad quadratum rectæ AG, sic quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ BF: erit per 11. proposit. lib. 5. element. vt triangulum CTA ad triangulum GHA; sic triangulum DXB ad triangulum FHB: vicissimque ergo erit per prop. 16. lib. 5. elem. triangulum CTA ad triangulum DXB, vt triangulum GHA, ad triangulum FHB. hæc duo postrema triangula sunt per proposit. 1. æqualia: igitur duo prima CTA, DXB, erunt æqualia per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. Quod si ex his postremis æqualibus triangulis maioribus CTA, DXB, tollantur æqualia triangula AEF, BEG, æqualia per coroll. nost. 5. ad proposit. 1. relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elemen. proposita quadrilatera æqualia DEGX, CEFT. Quoniàm verò in apparatu probauimus duas rectas CO, DI, esse tangentes sectionem DC; vnde necessariò concurrent in L intra angulum continentem sectionem DC, & non in centro eius E, iuxta coroll. nost. 1. ad propos. 25. lib. 2. & ex ipso apparatu occurrerunt diametris DE, CE, in I, & O, eductis per puncta D, & C, contactuum: erunt per 5. coroll. nost. ad 1. prop. duo triangula DIE, COE, æqualia. Igitur si ista triangula æqualia prædictis æqualibus quadrilateris addantur; hoc & quadrilatero DEGX addatur triangulum DIE, & quadrilatero CEFT addatur triangulum COE; fient per 2. axiom. lib. 1. eleman. quadrilatera XGID, TFOC, æqualia proposita. Atque ita demonstrauerimus totam propositionem.

COROLL. NOSTRVM I.

Eisdem positis, ac demonstratis, erit triangulum CTA æquale triangulo DXB.

HOc enim in demonstratione allata ad hanc propositionem probatum est, antequam concluderentur æqualia esse quadrilatera proposita.

COROLL. NOSTRVM II.

Eisdem positis ac demonstratis, erit quadrilaterum DFHX æquale quadrilatero CGHT.

SI enim quadrilateris DEGX, CEFT, probatis æqualibus, addatur commune quadrilaterum GEFH; fient per 2. ax. lib. 1. element. æqualia proposita quadrilatera DFHX, CGHT, æqualia.

COROL.

COROLL. NOSTRVM III.

Eisdem positis ac demonstratis. erit quadrilaterum DFGX, æquale quadrilatero CGFT.

NAm si quadrilateris ostensis æqualibus DEGX, CEFT, addatur commune triangulum GEF, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. proposita quadrilatera æqualia DFGX, CGFT. Vel si ab æqualibus quadrilateris DFHX, CGHT, ostensis in coroll. 2. tollatur commune triangulum GHF, relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. quadrilatera proposita æqualia, DFGX, CGFT.

COROLL. NOSTRVM. IV.

In sectionibus oppositis. Si vnam earum AB, duæ rectæ AHF, BHG, contingant, prima in A, secunda in B, concurrentes in puncto H, & occurrentes diametris ipsarum transuersis BED, AEC, per centrum earum E transeuntibus, in punctis F & G; si ex punctis D & C alterius oppositæ DC sectionis in quibus ipsi occurrunt, agantur rectæ lineæ CLO, DLI, parallelæ prædictis tangentibus alteram sectionem AB, ita vt CLO sit parallela tangenti AHF, & DLI sit parallela tangenti BHG; occurrantque sibi in L puncto & dictis diametris in O & I: recta CO erit parallela & æqualis tangenti AF, & ipsa CO tanget in C sectionem DC; & recta DI erit parallela & æqualis tangenti BG, & ipsa DI tanget in D sectionem DC: & erit triangulum BEG æquale triangulo DEI; & triangulum AEF æquale triangulo CEO; & rectæ OE, FE, æquales; tum rectæ EI, EG æquales; tùm rectæ DI, BG. æquales; tum rectæ AF, CO, æquales. Ductisque rectis OI, GF, erunt triangula OEI, GEF, æqualia; tùm etiam triangula OLI, GHF, æqualia. Sed & erunt æqualia Quadrilatera OLIE, GHFE. Insuper erunt triangula AHG, CLI, æqualia; tùm etiam triangula BHF, DLO, æqualia. Ad hæc erunt duo simul triangula AEF, BEG, æqualia. duobus simul triangulis CEO, DEI. Tùm duo simul triangula AGH, BHF, æqualia duobus simul. triangulis CLI, DLO. Tùm etiam duo quinque latera AGFBH, CIODL, æqualia. Denique alia duo quadrilatera AEBH, DELI, æqualia.

COnstructio ferè tota iam assignata est. Itaque ad demonstrationem veniamus. Quia recta CO datur parallela tangenti rectæ AF, erit tangens in C sectionem CD, per coroll. nost. 1. ad prop. 44. lib. 1. eodem modo, erit recta DI parallela tangenti BG, tangens in D sectionem DC, per cit. coroll. sed & per coroll. nost. 3. ad eandem prop. cit. erit recta tangens CO æqualis tangenti AF; & recta DI tangens erit æqualis tangenti BG. Verùm etiam per coroll. nost. 3. ad cit. prop. 44. lib. 1. triangulum BEG erit æquale triangulo DEI, & triangulum AEF æquale triangulo CEO; & rectæ OE, FE, æquales; tùm rectæ DI, BG, æquales; tùm rectæ AF, CO æquales. Igitur quia in triangulis OEI, GEF, sunt anguli ad verticem E æquales per prop. 15. lib. 1. elem. & latera eos comprehendentia sunt respectiuè æqualia ostensa, erunt per 4. prop. lib. 1. elem. OI, GF, æquales; & triangula æqualia OEI, GEF; & anguli EIO, EGF, æquales, & anguli EOI, EFG, æquales. Et quia in rectas parallelas DI, BG, recta incidit GI, erunt per prop. 29. lib. 1. element. anguli alterni æquales DIE, BGE; ex quibus si demantur anguli ostensi æquales EIO, EGF, relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elemen. anguli æquales LIO, HGE. Similiter quia in rectas parallelas CO, AF, incidit recta OF, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli alterni COE, AFE, æquales; ex quibus si tollantur anguli æquales ostensi EOI, EFG, relinquentur æquales anguli LOI, HFG, per 3. axiom. lib. 1. elem. Cùm igitur in triangulis OLI, GHF, supra latera OI, GF, ostensa æqualia sint anguli duo respectiuè æquales alijs duobus probati; ipsa erunt per coroll. prop. 26. lib. 1. elem. æqualia ipsa triangula OLI, GHF. Igitur si hæc duo triangula æqualia OLI, GHF; addantur vti oportet triangulis duobus ostensis æqualibus OEI, GEF; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. duo quadrilatera OLIE, GHFE, proposita æqualia. Sunt autem triangula AEF, CEO, ostensa æqualia; igitur si ab illis demantur quadrilatera ostensa æqualia OLIE, GHFE, vti oportet; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elemen. triangula AHG, CLI, æqualia. Simili modo si ab æqualibus ostensis triangulis BEG, DEI, quadrilatera eadem æqualia GHFE, OLIE; relinquentur triangula æqualia BHF, DLO, æqualia. Quoniam autem probauimus triangula AEF, CEO esse æqualia; tum alia duo triangula æqualia BEG, DEI; si prima primis, secunda secundis addamus; fient per 2. axio. lib. 1. elem. duo simul triangula AEF, BEG, æqualia duobus triangulis CEO, DEI. Quod si ab his postremis æqualibus, detrahantur vti oportet, ostensa æqualia quadrilatera EGHF, EILO relinquentur per 3. ax. lib. 1. element. duo simul triangula AGH, BFH, æqualia duobus simul triangulis CLI, DLO. Et si duobus primis simul triangulis prædictis addatur commune triangulum GHE; & duobus postremis simul triangulis prædictis addatur commune triangulum OLI; cùm sint addita æqualia triangula GHE, OLI, ostensa; & ea quibus adduntur probata æqualia; fient per 2. ax. lib. 1. elemento. quinquelatera proposita æqualia AGFBH, CIODL. & si his quinquelateris æqualibus adijciantur vti oportet, triangula ostensa æqualia GEF, OEI; fient per 2. axio. lib. 1. elemen. quadrilatera proposita æqualia, AEBH, DECL.

PROPOSITIO IX.

Iisdem positis. Si alterum quidem punctum sit inter diametros vt K; alterum verò sit idem quod vnum punctorum C, D, vt C; & æquidistantes ducantur. Dico triangulum CEO æquale esse quadrilatero KMEP; & quadrilaterum LCOP, æquale ipsi LCMK.

Iisdem positis quæ in præcedente propositione, & quæ supponit ipsa propositio præcedens, ductæ sint KM, CO, CL illa quidem parallela tangenti GB, hæ verò parallelæ AF, occurrentes sibi inuicem in R, & L, & diametris in M & O, & P. probandum erit propositum.

Demonstratio. Per nostrum coroll. 4. ad præcedent. prop. Triangulum CEO est æquale triangulo AEF; & per prop. 6. triangulum AEF æquale est quadrilatero KMEP: igitur per ax. 1. lib. 1. elem. triangulum CEO æquale erit quadrilatero KMEP, sicuti fuit primò propositum. Quod si ab his æqualibus commune tollatur quadrilaterum ORME, remanebunt per 3. axiom. lib. 1. elem. æqualia, triangulum CRM & quadrilaterum KROP. & si his postremis æqualibus commune addatur quadrilaterum LCRK, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. æqualia proposita vltimò quadrilatera LCOP; LCMK.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Iisdem positis: erit triangulum CRM æquale quadrilatero KROP.

Hoc enim inter demonstrandum propositionem probatum est.

PROPOSITIO X.

Iisdem positis. Sumantur K, L, non tamen in punctis, in quibus diametri sectionibus occurrunt; demonstrandum est quadrilaterum LTRϰ esse æquale quadrilatero ωϰKI.

Suppositio est eadem quæ in præcedente, præterea quæ adduntur in hac propositio. cuius figuratio apposita exhibet quadrilatera proposita effecta secundum suppositionem precedentem & præsentem.

Aduerte pro demonstratione punctum ϰ. debere esse in directum rectarum ωL, RK, sed ob loci angustias in figura sculpta, nos prudenter reflexisse ab margine, versus partes interiores, rectas ωL, RK, productas, & concurrentes in ϰ.

Demonstratio. Cùm dentur rectæ lineæ AF, BG, contingere sectionem AB; & per puncta contactuum A, B, diametri AEC, BED incedere; sintque ex datis LT; KI, contingentibus prædictis æquidistantes relatiuè: erit per prop. 43. lib. 1. Triangulum TYE maius quàm triangulum YωL, triangulo EFA. eodem modo probabitur triangulum XEI maius quàm triangulum XRK, triangulo BEG. Est autem per coroll. nost. 5. ad propos. 1. triangulo BEG æquale triangulum ABF; igitur eodem excessu triangulum TYB superat triangulum YωL, quo triangulum XEI superat triangulum XRK: ergo per lemma 10. ad lib. 2. triangula TYE, XRK simul sumpta, sunt æqualia triangulis simul sumptis XEI, YωL. His æqualibus adijciatur commune multilaterum KXEYLϰ, fient per 2. ax. lib. 1. elemen. quadrilatera proposita æqualia LTRϰ, ωϰKI.

PROPOSITIO XI.

Iisdem positis. Si in quauis sectione punctum sumatur; & ab ipso lineæ æquidistantes ducantur, vna quidem contingenti æquidistans, altera verò æquidistans ei quæ tactus coniungit: Triangulum quod ab ipsis fit ad diametrum per occursum contingentium ductam; à triangulo contento linea contingente & diametro per tactum, differt triangulo quod ad contingentium occursum constituitur.

Suppositio. Sectiones oppositas AB, CD, contingant duæ rectæ lineæ AE, DE; AE quidem sectionem AB; DE verò sectionem CD; sibique ipsis tangentes occurrant in E puncto sito iuxta coroll. nost. ad prop. 32. lib. 2. extra centrum, & asymptotos, verùm in angulo deinceps ad angulos continentes ipsas sectiones per ipsam proposi. 32. lib. 2. Sit verò recta AD nectens puncta A, D, contactuum: & ex puncto E per centrum H oppositarum sectionum transmissa & producta recta HE

doner

donec occurrat in G rectæ AD, quàm diuidet bifariàm in G, per prop. 39. lib. 2. eritque per coroll. nost. ad cit. proposit. 39. diameter recta & coniugata transuersæ parallela ipsi AD, per H centrum concipiendæ. Sumptum autem sit punctum B in sectione AB, ex quo acta sit rectalinea BKFL parallela ipsi AD, per propositio. 31. lib. 1. elemento. & ex eodem puncto B alia recta ducta EM æquidistans tangenti AE; hæc per propos. 11. Procli occurret in M rectæ GHE productæ vltra E; illa verò BKFL occurret in F eidem rectæ GHEM, & in K rectæ tangenti AE. Denique ex puncto A contactus per centrum H transmittatur recta AH diameter occurrens in L puncto rectæ BKFL per cit. proposit. 11. Procli. Dico Triangulum BFM quod fit ad diametrum HEM transeuntem per E concursum tangentium datarum, ab prædictis rectis BF, BM, parallelis respectiuè alijs rectis AD vnienti puncta contactuum, & tangenti AE, differre ab triangulo AKL contento sub portione AK, tangentis AE; & portione KL, rectæ BL parallelæ vnienti puncta A, D, contactuum; & ab diametro AHL per ipsum punctum A contactus, triangulo KEF quod ad E punctum concursus datarum tangentium constituitur, ab portione EK, tangentis AE; & ab portione KF, prædictæ BL parallelæ vnienti AD puncta contactuum; & ab FE portione diametri rectæ HE.

Demonstratio. Quia recta AGD bifariàm secatur in G extra centrum H, ab recta diametro EHG sectionum oppositarum; ipsa AGD, & BF erunt per coroll. nost. 36. ad propos. 49. lib. 2. ordinatim applicatæ ipsi diametro rectæ EHG: & quia recta AE sectionem contingit in A: sumptumque est punctum B in sectione AB; & recta BF est etiam ordinatim applicata dictæ diametro EH; & recta BM est parallela contingenti rectæ AE: per prop. 45. lib. 1. Triangulum BFM differet ab triangulo LHF, triangulo HAE: igitur si ista duo triangula LHF, HAE, simul sumamus, ipsa erunt æqualia triangulo BFM, per lem. 3 Quod si ex illis duobus simul triangulis LHF, HAE, detrahamus triangulum KFE, remanebit per lemma 2. triangulum AKL pro differentia qua triangulum BFM æquale ostensum duobus simul sumptis LHF, HAE, differt ab triangulo KFE: vel ipsum triangulum KFE erit differentia trianguli BFM, ab triangulo AKL, sicuti fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM. I.

Iisdem datis & positis. Triangulum BFM differt ab triangulo KFE, triangulo AKL.

HOc enim demonstrauimus antequam concluderemus propositum.

COROLL. NOSTRVM II.

Triangulum BFM est æquale duobus simul triangulis KFE, AKL.

NAm per prop. præsentem triãgulum AKL est differentia trianguli BFM, ab triangulo KFE; seu per coroll. nost. præcedens: ergo si differentiam AKL adiungamus triangulo minori KFE; fiet summa æqualis triangulo maiori BFM, per lemma 3.

COROLLARIVM AVTHORIS.

Quadrilaterum BKEM, æquale est triangulo LKA.

CVm enim sint ostensa æqualia, triangulum BFM ex vna parte, & ex alia duo simul triangula LHF, HAE: si ab his æqualibus commune dematur triangulum KFE; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. æqualia proposita, quadrilaterum BKEM, & triangulum LKA.

PROPOSITIO XII.

Iisdem positis. Si in vna sectione sumantur duo puncta; & ab vtrisque similiter ęquidistantes ducantur: Quadrilatera ab ipsis constituta, inter se sunt æqualia.

SVppositio. Sint eadem quæ in superiore propositione. Verùm in sectione AB, sumpta sint duo puncta B & K: ex quibus per propos. 31. lib. 1. elem. transmissæ sint duæ rectæ lineæ BMYN, KXOTP, parallelæ rectæ AD nectenti puncta contactuum A, D; primaque occurrat in M, tangenti AE, & in Y diametro EHG, & in N, diametro AHN, per propositio. 11. Procli: similiter secunda occurrat in O rectæ AE, in T diametro EH rectæ, & in P diametro AHNP, per eandem prop. Procli. Tùm ex eisdem punctis B & K, actæ sint aliæ duæ rectæ BR, KS, parallelæ tangenti AE, primaque occurrat in X rectæ KP, & in R diametro rectæ HE productæ vltra E; secunda verò occurrat in L rectæ NB productæ infra B, & in S diametro rectæ HE productæ vltra E, per cit. prop. 11. Procli. Dico quadrilaterum BXPN factum ab parallelis BN, KP, & diametro transuersa AHP, & recta BR portione BX parallelæ tangenti AE, esse æquale quadrilatero KSRX factio ab portione diametri rectæ, & portionibus parallelarum BR, KS, ipsi tangenti

 AE,

AE, & portione rectæ KP parallelæ rectæ AD.

Demonstratio. Per prop. 45. lib. 1. Triangulum KST maius est quàm triangulum PHT, triangulo HAE; & per axiom. 19. lib. 1. elem. triangulum APO simul cum triangulo TOE, æquale est triangulis simul sumptis PHT, HAE, & per prop. præcedent. 12. triangulum KST maius est quàm triangulum AOP, triangulo TOE; igitur si demamus commune triangulum TOE, remanebit triangulum AOP, æquale quadrilatero KOES, per lemma 7. Simili discursu probabimus triangulum AMN æquale esse quadrilatero BMER. Itaque cùm triangulum AOP excedat triangulum AMN, quadrilatero MNPO; & quadrilaterum BMER sit æquale triangulo AMN; per lemma 8. triangulum AOP excedet quadrilaterum BMER, quadrilatero MNOP: est verò quadrilaterum KOES æquale ipsi triangulo AOP ostensum: ergo etiam quadrilaterum KOES exceder quadrilaterum BMER, quadrilatero MNOP, per cit. lemma 8. Igitur simul sumpta quadrilatera BMER, MNOP, sunt æqualia quadrilatero KOES, per lem. 3. eò quòd sint partes integrantes ipsum; nam differentia alicuius minoris simul cum ipsa minore, sunt æquales ipsi maiori. Igitur si ex æqualibus; KOES, ex vna parte, & ex alia duobus quadrilateris simul sumptis BMER, MNOP, dematur commune quadrilaterum XOER; residua erunt per 3. axiom. lib. 1. elementorum æqualia, videlicet quadrilatera proposita KXRS, BXPN.

COROLL. NOSTRVM. I.

Iisdem positis. Quadrilatera LNPK, BRSL, erunt æqualia.

SI enim æqualibus ostensis quadrilateris KXRS, BXPN, addatur commune quadrilaterum BXKL; fient per 2. axiom. lib. 1. elementorum æqualia proposita quadrilatera LNPK, BRSL.

COROLL. NOSTRVM II.

Multilaterum POERBN, æquale est quadrilatero KOES.

QVadrilatera duo simul sumpta BMER, MNOP, sunt per ax. 19. lib. 1. elemen. æqualia multilatero POERBN; sunt etiam sunt in demonstratione huius prop. 12. ostensa æqualia quadrilatero KOES: ergo per 1. ax. lib. 1. elem. proposita erunt æqualia, nimirum multilaterum POERBN, & quadrilaterum KOES.

PROPOSITIO XIII.

Si in oppositis sectionibus, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes sectiones quæ deinceps sunt, in vnum punctum conueniant; & per tactus diametri ducantur: Triangula quorum communis vertex, est sectionum centrum, inter se æqualia erunt.

SVppositio. In oppositarum sectionum coniugatarum A, B, C, D, quarum centrum H, sint duæ rectæ lineæ AE, BE, contingentes; AE quidem sectionem A in puncto A; BE verò, sectionem B deinceps ad A sectionem, in puncto B; conueniantque in vnum punctum E duæ illæ rectæ contingentes: Diametri verò ex centro H transmissæ sint HA, HB, ad dicta puncta contactuum A, B; productæ verò vltra H centrum, conueniant cum oppositis sectionibus in C & D punctis, iuxta prop. 29. lib. 1. secetque diameter BHD contingentem rectam AE productam vltra E, in puncto G; & diameter AHC secet in F contingentem rectam BE. Dico triangula resultantia BHF, AHG, quorum vertices H sunt in centro H, esse æqualia.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. element. ex puncto A agatur recta AK æquidistans tangenti BE, quæ occurret in K diametro DHB productæ vltra B, per prop. 11. Procli: tùm ex puncto H seu centro, ponatur alia recta LHM parallela eidem tangenti BE, occurrens in M & L, sectionibus oppositis A, C. Descriptis in plano seorsim triangulis AGH, BHF, datisque tribus rectis lineis hoc ordine GH, HB, FH, reperiatur per prop. 12. lib. 6. elem. quarta proportionalis, cui per prop. 3. lib. 1. elem. detrahatur ex recta HA producenda vltra H, recta HX æqualis, ducaturque recta GX.

Demonstratio. Quia sectionem B, recta BFE contingit in B, & per tactum B incedit diameter BHD; estque recta LHM per centrum H, parallela ipsi BEF contingenti: erit per prop. 20. lib. 1. recta LM diameter coniugata diametro BHD in oppositis sectionibus coniugatis datis; ideoque recta AK erit ordinatim applicata diametro BD in K, per defin. 16. & 17. lib. 1. inter primas. Datur autem recta AEG attingere sectionem A in puncto A: igitur per prop. 38. lib. 1. rectãgulum sub KH, HG, æquale erit quadrato rectæ BH; ideoque per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt KH ad HB, sic HB ad HG: Cùm autem in triangulo KHA sit recta BF parallela basi KA, erit per lemma 50. lib. 1. vt KH ad HB, sic AH ad HF: ostendimus

mus autem esse vt KH ad HB, sic HB ad HG; ergo erit per 11. prop. lib. 5. ele. vt HB ad HG; sic AH ad FH; & inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt GH ad HB, sic FH ad AH: & quia ex apparatu est vt GH ad HB, sic FH ad HX; erit per prop. 11. lib. 5. elemen. vt FH ad AH, sic FH ad HX: ergo per prop. 9. lib. 5. elem. recta HA erit æqualis rectæ HX. & quia triangula AGH, XGH, æqualem obtinent altitudinem per coroll. not. 1. ad prop 1. lib. 6. elem. erunt per ipsam prop. 1. inter se vt bases HA, HX, quæ ostensæ sunt æquales; igitur erunt æqualia ipsa triangula AGH, XGH. Cumque sit apparatu vt GH ad HB, sic FH ad HX, inuertendo erit per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt XH ad HF, sic BH ad HG, reciproca videlicet latera triangulorum BFH, XGH, habentium angulos ad verticem H æquales per prop. 15. lib. 1. elem. quare ipsa triangula BFH. XGH, erunt per prop. 15. lib. 6. elemen. æqualia. Sed ostendimus triangulum XGH esse æquale triangulo AGH; ergo per 1. axio: lib. 1. elem. triangula BFH, AGH, erunt æqualia, sicuti fuit propositum.

PROPOSITIO XIV.

Iisdem positis. Si in quauis sectione punctum sumatur; & ab ipso ducantur lineæ æquidistantes contingentibus vsque ad diametros: Triangulum quod ad centrum constituitur, à triangulo circa eundem angulum, differt triangulo basim habente lineam contingentem, & verticem sectionum centrum.

Svppositis iisdem quæ in antecedente propositione. Sumptum sit punctum X in sectione B; ductaque sit recta XRS æquidistans tangenti AEG in A sectionem A; tùm alia recta OXT parallela tangenti BE alteri in B, sectionem B. Dico triangulum OHT factum ab dicta tangente OXT, & duarum diametrorum AOHC, TBHD, portionibus, differre ab triangulo XΓS habente eundem angulum T, cum præcedente triangulo OHT, triangulo BHF, basim habente partem BF, rectæ tangentis BE, & verticem in centro H, sicuti obtinet verticem in eodem centro H, triangulum maius OHT.

Demonstratio. Quandoquidem ex demonstratione præcedentis propositionis 13. sectionis A diameter est LHM coniugata ipsi BHD, & ex puncto A, sectionis, A, est recta educta AEG, ipsam A sectionem contingens, & applicata est ordinatim recta AY parallela ipsi LHM, ad diametrum DHBY coniugatam ipsi diametro LHM: habebit per prop. 40. lib. 1. recta AY ad rectam YG, proportionem compositam ex ratione HY ad YA, & ex ratione transuersi lateris figuræ quæ fit ad LM, ad latus eius rectum. Verùm quia in triangulis YGA, YHA. TSX, sunt parallelæ BRFE, TXO, basibus YA, TXO; erit per lemma 50. ad lib. 1. vt AY ad YG, sic XΓ ad TS; tùm etiam vt HY ad YA, sic H[illegible] ad TO, & HB ad BF; vt autem figuræ latus LM constitutæ latus transuersum ad rectum, ita figuræ ad BD constitutæ, rectum latus ad transuersum, prout ostendimus ad prop. 20. lib. 2. ergo per lemma 7. ad lib. 1. recta XT ad rectam TS, proportionem habebit compositam ex ratione HB ad BF, hoc est ex ratione eadem ostensa HT ad TO, & ex ratione recti lateris figuræ ad BD, ad latus eius transuersum. Igitur ex demonstratis in propos. 41. lib. 1. Triangulum THO differet ab triangulo XΓS, triangulo BHF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Si vnam oppositarum, sectionum, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes conueniant; & per tactus, diametri ducantur: sumatur autem punctum in quauis sectionum coniugatarum, & ab ipso ducantur æquidistantes contingentibus, vsque ad diametros. Triangulum quod ab ipsis ad sectionem constituitur, maius est quàm triangulum quod ad centrum, triangulo basim habente lineam contingentem, & verticem centrum sectionum.

Svppositio. Sint sectiones oppositæ coniugatæ, AB, GS, T, X, quarum centrum H: Sectionem verò AB contingant duæ rectæ lineæ ADE, BDC, conuenientes in puncto D: & per tactus A, B, diametri AHF, BHT, incedant. Sumptumque sit punctum S, in sectione GS, ex quo sit emissa recta SFL æquidistans rectæ tangenti BDC; & alia recta SY æquidistans alteri tangenti ADE: & SY recta occurrat in Y, diametro BHT; & altera SFL recta occurrat in L, alteri diametro BHT. Dico triangulum SLY factum ab his ductis rectis ad diametrum BHT, maius esse quàm triangulum FHL quod ad centrum H existit; trian-

gulo BHC, verticem habente in centro H, & basim BC contingentem sectionem AB in A.

Apparatus. per prop. 31. lib. 1. elem. agatur per centrum H, recta XHG parallela rectæ BC tangenti; & per G recta KIG parallela alteri AE tangenti; & recta SO parallela diametro BT: erit iuxta prop. 20. lib. 2. recta XG diameter coniugata diametro BT. Quod si intelligamus rectam contingentem in puncto G, sectionem [illegible], æquidistabit ipsi diametro THB, per cit. prop. 20. lib. 2. quare & ipsi SO æquidistabit per propos. 30. lib. 1. elem. quare per prop. 47. lib. 1. recta SO erit ad diametrum HGO ordinatim applicata; & parallelogrammum resultabit SLHO. Quia ergo recta BC sectionem contingit AB, & recta BH per B punctum contactus incedit; contingitque eandem sectionem recta AE; datis verò tribus rectis DB prima, BE secunda, quarta verò dupla ipsius BC, reperiatur per lemma 16. ad lib. 2. tertia proportionalis MN: erit per prop. 50. lib. 1. recta MN rectum latus figuræ quæ ad BT diametrum constituitur. Quod si per proposit. 10. lib. 1. elem. recta MN bifariàm in P diuidatur; erit per prop. 11. & 15. lib. 5. elem. vt DB ad BE, sic MP ad BC. Præterea per prop. 11. lib. 6. elem. fiat vt XG ad TB, sic TB ad rectam R: erit recta R, figuræ rectum latus ad XHG diametrum constituitur, per defin. 4. lib. 1. inter secundas; quia cùm sectionis SG, sit diameter XHG seu transuersum latus, & BT secunda diameter coniugata ipsi XHG, mediamque proportionem habeat recta TB, inter XHG, & R; erit recta R rectum latus prædictum, iuxta cit. defin. Iam verò quia est, vt DB ad BE, sic MP ad CB; & per lemma 1. ad lib. 2. est vt DB ad BE, sic quadratum rectæ DB ad rectangulum sub CB, BH, per 1. prop. lib. 6. element. assumendo pro altitudine communi rectam BH: erit igitur per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ DB ad rectangulum sub DB, BE, sic rectangulum sub MB, BH, ad rectangulum sub CB, BH. Cùm igitur sit recta XG media proportionalis inter TB, MN, per defin. 4. lib. 1. inter secundas; eò quòd XG sit secunda diameter in sectione AB, & transuersum eius latus TB, & rectum MN: rectangulum sub TB, MN, erit æquale quadrato rectæ XG, per prop 17. lib. 6. element. & rectangulum sub MP, BH, est quarta pars rectanguli sub TB, MN, per coroll. nost. ad propos. 20. lib. 6. elem. tùm etiam quadratum rectæ GH, est quarta pars quadrati rectæ XG, (nam tota XG bifariàm in centro H diuiditur, per proposit. 29. lib. 1.) erit per prop. 7. & 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ DB ad rectangulum sub BD, BE, sic quadratum rectæ GH ad rectangulum sub CB, BH: & vicissim per prop. 16. lib. 5. element. vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ GH, sic rectangulum sub BD, BE, ad rectangulum sub CB, BH. Cùm autem triangula DBE, GHI, habeant angulos æquales DBE, GHI, per prop. 29. lib. 1. elem. ob parallelas GH, BD, tùm etiam angulos æquales DEB, GIH, ob parallelas DB, GI; habebunt per nost. coroll. 3. ad propositio 32. lib 1. elem. reliquos tertios angulos æquales: quare per prop. 4. lib. 6. element. obtinebunt latera proportionalia circum æquales angulos; & per defin. 1. lib. 6. elemen. erunt dicta triangula similia. Quare per propos. 19. lib. 6. elem. triangulum DBE ad triangulum GHI, habebit duplicatam rationem rectæ DB ad rectam GH; simili modo per prop. 20. lib. 6. element. quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ GH, obtinebit rationem duplicatam rectæ DB ad rectam GH: erit igitur vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ GH, sic triangulum DBE ad triangulum GHI. Quod si describantur seorsim triangula DBE, CBH; & per prop. 11. lib. 1. elem. ponantur rectæ DQ, CV, perpendiculares ad rectam BH; erunt dictæ perpendiculares, per prop. 28. lib. 1. elem. parallelæ: quare per lemma 50. ad lib. 1. erit vt DQ ad DB, sic CV ad CB: assumendo autem pro altitudine communi rectam BE; erit per 1. prop. lib. 6. elem. vt DQ ad DB, sic rectangulum sub DQ, BE, ad rectangulum sub DB, BE: & assumendo pro altitudine communi rectam BH; erit per cit. prop. 1. lib. 6. elem. vt CV ad CB, sic rectangulum sub CV, BH, ad rectangulum sub CB, BH: ergo per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub DQ, BE, ad rectangulum sub DB, BE, ita rectangulum sub CV, BH, ad rectangulum sub CB, BH; & per prop. 16. lib. 5. elem. vicissim erit vt rectangulum sub DQ, BE, ad rectangulum sub CV, BH, sic rectangulum sub DB, BE, ad rectangulum sub CB, BH: rectangulum autem sub DQ, BE, duplum est trianguli DBE, per prop. 41. lib. 1. element. & rectangulum sub CV, BH, duplum est trianguli CHB: ergo per prop. 11. & 15. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub DB, BE, ad rectangulum sub CB, BH, sic triangulum DBE ad triangulum CBH. Ostendimus autem anteà, esse vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ GH, sic rectangulum sub DB, BE, ad rectangulum sub CB, BH; & quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ GH, sic triangulum DBE ad triangulum GHI; & vt rectangulum sub DB, BE, ad rectangulum sub CB, BH, sic triangulum DBE ad triangulum CBH: ergo per propos. 11. lib. 5. element. erit vt triangulum DBE ad triangulum GHI, sic triangulum DBE ad triangulum CBH: quare per prop. 9. lib. 5. elemen. triangula GHI, CBH, erunt æqualia. Triangulum igitur GHK cùm differat ab triangulo IHK, triangulo GHI, differet etiam triangulo æquali CBH. Insuper quia per propositio. 39. lib. 1. recta HB ad rectam BC, habet proportionem compositam ex ratione HB ad MP, & ex ratione MP ad BC; & per prop.

propof. 15. & 16. lib. 5. element. eft vt HB ad MP, ita TB ad MN; & linea recta R ad XG rectam, (nam per propof. 10. lib. 2. eft vt figuræ conftitutæ ad TB, ipfum tranfuerfum latus TB ad rectum MN, ita figuræ ad XG conftitutæ, rectum latus R ad XG tranfuerfum;) vt autem MP ad BC, ita DB ad BE vti oftendimus in fuperioribus: erit per lemma 7. ad lib. 1. proportio HB ad BC, compofita ex ratione DB ad BE, & ex ratione R rectæ ad XG: æquidiftant autem BC & SL rectæ, ergo anguli HCB, HLF, erunt æquales per propof. 29. lib. 1. elem. fed & per prop. 15. lib. eiufdem, anguli ad verticem feu centrum H, funt æquales: ergo triangulorum HCB, HLF, reliqui anguli tertij erunt æquales, per noft. 3. coroll. ad prop. 32. lib. 1. elem. quare ipfa dicta triangula erunt æquiangula, & per 4 propof. lib. 6. elem. obtinebunt latera circa æquales angulos proportionalia, & per defin. 1. lib. eiufdem 6. erunt fimilia; eritque vt HB ad BC, fic HL ad LF: igitur per lemma 7. lib. 1. ficuti proportio HB ad BC componebatur ex ratione DB ad BE, & ex ratione rectæ R ad XG; ita etiam proportio rectæ HL ad LF, componetur ex ratione rectæ R ad XG, & ex ratione DB ad BE, feu GH ad HI; (nam in triangulis GHI, DBE, funt anguli in H & B æquales per prop. 29. lib. 1. elem. ob rectam HB, vel HI, incidentem in parallelas GH, BD vel ID; & anguli DEB, GIH, funt æquales per cit. prop. 2. ob rectam EI vel EB, incidentem in parallelas DE, BG vel IG; vnde dictorum triangulorum tertij anguli erunt æquales, & ipfa triangula æquiangula; igitur per 4. propofit. lib. 6. elementorum erit vt DB ad BE, fic GH ad HI.)

Demonftratio. Quandoquidem SG fectio eft Hyperbola, cuius diameter XG, rectum verò latus R; & ab eius S puncto recta SO applicatur; defcribiturque ab recta HG ex centro H, figura HIG; & ab applicata SO, vel HL ipfi æquali per prop. 34. lib. 1. elem. in parallelogrammo HLSO probato, figura HLF alia; & ab HO, vel ab SL æquali ipfi HO, per cit. propofit. 34. lib. 1. element. defcribitur figura SLY, fimilis figuræ HIG, iuxta coroll. prop. 4. lib. 6. element. ob parallelas rectas SL, OH; tùm SY, OI; quæ figura fit ab ea quæ ex centro, & proportiones habet compofitas commemoratas; erit per propofitio. 41. lib. 1. triangulum SLY maius quàm triangulum HLF; triangulo GHI, hoc eft triangulo CBH æquali ipfi GHI oftenfo. Quod erat demonftrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Iifdem pofitis. Si in quauis fectione aliqua puncta fumantur; & ab ipfis ducantur lineæ contingentibus æquidiftantes, quæ & contingentibus & diametris occurrant, Quadrilatera à lineis ductis conftituta ad diametros, inter fe æqualia erunt. Hoc eft Commandini notis fuis ad hanc prop. 15.

MAneant enim eadem quæ fuprà. Et in fectione C; fumatur aliud punctum C diuerfum ab K, atque ab eo tranfmittantur rectæ CQRS, CT, parallelæ contingentibus. Dico quadrilaterum KLRQ, effe æquale quadrilatero CQNT.

Demonftratio. Ex demonftratione allata, Triangulum CST maius eft quàm triangulum RSG, triangulo GAH: vnde quadrilaterum CRGT, triangulo GAH eft æquale. Similiter cùm triangulum KMN maius fit quàm triangulum LMG, triangulo GAH; erit quadrilaterum KLGN, æquale eidem triangulo GAH: Igitur per 1. axiom. lib. 1. elem. quadrilatera prædicta erunt æqualia: ex quibus fi tollatur commune quadrilaterum RGNQ, relinquentur per 3. axiom. libri 1. elementorum quadrilatera propofita æqualia KLRQ, CQNT.

PROPOSITIO XVI.

Si Coni fectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in vnum conueniant; & ab aliquo puncto eorum quæ funt in fectione, ducatur linea vni contingentium æquidiftans, quæ & fectionem, & alteram contingentium fecet. Vt quadrata contingentium inter fefe, ita erit rectangulum lineis quæ interijciuntur inter fectionem & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidiftantem & tactum interiectæ.

SVppofitio. Coni fectionem, vel circuli circumferentiam AB, contingant duæ rectæ lineæ AC, BC, conuenientes in C. fumptoque aliquo puncto D, in linea curua fectionis vel circuli circumferentiæ, ab eo ducatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea DF parallela contingenti vni, puta BC, quæque fecet alteram contingentem AC in E, & fectionem ipfam vel circuli circumferentiam in punctis D, F. Dico vt quadratum contingentis BC,

ad

ad quadratum contingentis AC; ita esse rectangulum sub FE, ED, hoc est sub lineis quæ intercipiuntur inter sectionem & contingentem AC, ad quadratum rectæ EA portionis alterius contingentis AC, sitæ inter æquidistantem FDE, & punctum A contactus.

Apparatus. Per propos. 44. lib. 2. diametri ducantur per A & B puncta contactuum, sintque HGA, LNBK. & ex puncto D assumpto, transmittatur per propos. 31. lib. 1. elem. recta linea DMN æquidistans rectæ alteri tangenti AC, secabit in M alteram tangentem BC, per prop. 11. Procli, & diametrum LB in N; & ipsa diameter LB producta occurret in K, rectæ FD: & diametrum HGA, secabit in H recta BC tangens producta vltra C; & recta FDE producta vltra E occurret in G, diametro HA, per prop. 11. Procli.

Demonstratio. In Parabola, quia ACL tangens conuenit in L cum diametro eius LB, & per D ducta æquidistans DMN recta, ipsi ACL tangenti, per propos. 46. lib. 1. diameter LBK, bifariam in K diuidet rectam FD parallelam tangenti BC: At verò in Hyperbola, ellipsi, & circuli circumferentia, diameter LBK diuidet bifariam in K, prædictam rectam FD, per prop. 47. lib. 1. & per propos. 2. triangulum AEG erit æquale quadrilatero DNLE; & per 1. prop. triangulum BLC æquale erit triangulo ACH. Iam verò quia recta FK æqualis est ipsi KD, & toti FD, adiecta in directum recta DE; erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub FE, ED, simul cum quadrato rectæ DK, æquale quadrato rectæ KE; estque per coroll. prop. 4. lib. 6. elemen. triangulum ELK simile triangulo DNK, ob parallelas rectas EL, DN: igitur per lemma 1. quadratum rectæ KE, ad quadratum rectæ KD, erit vt triangulum ELK ad triangulum DNK; & vicissim iuxta prop. 16. lib. 5. elem. vt totum quadratum rectæ EK, ad totum triangulum ELK, sic ablatum quadratum rectæ DK, ad ablatum triangulum DNK: ergo per propos. 19. lib. 5. elem. reliquum videlicet rectangulum sub FE, ED, ad reliquum quadrilaterum DNLE; erit, vt quadratum rectæ EK ad triangulum ELK. Quia verò in triangulo ELK recta CB est parallela basi EK, erit per coroll. proposit. 4. lib. 6. elem. triangulum ELK simile triangulo CLB; igitur per lemma 9. erit vt quadratum rectæ EK ad quadratum rectæ CB, sic triangulum ELK ad triangulum CLB; & per prop. 16. lib. 5. element. vicissim erit; vt quadratum rectæ EK ad triangulum ELK, sic quadratum rectæ CB ad triangulum CLB: quare per prop. 11. lib. 5. element. erit vt rectangulum sub FE, ED, ad quadrilaterum DNLE, sic quadratum rectæ CB ad triangulum CLB. est autem ostensum quadrilaterum DNLE, æquale triangulo AEG; & triangulum CLB ostensum æquale triangulo AHC: ergo per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub FE, ED, ad triangulum AEG, sic quadratum rectæ CB ad triangulum AHC; & vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. vt rectangulum sub FE, ED, ad quadratum rectæ CB, ita triangulum AEG ad triangulum AHG: sed per lemma 9. est vt triangulum AGE ad triangulum AHC, ita quadratum rectæ EA ad quadratum rectæ AC; igitur per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub FE, ED. ad quadratum rectæ CB, sic quadratum rectæ EA ad quadratum rectæ AC; & inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ BC ad rectangulum sub FE, ED, ita quadratum rectæ CA ad quadratum rectæ EA; & vicissim per proposit. 16. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ CA, sic rectangulum sub FE, ED, ad quadratum rectæ EA. Quod erat demonstrandum.

Aliam demonstrationem in circulo proferamus breuiorem, ex solis principijs elemento. Quandoquidem dantur duæ rectæ lineæ tangentes AC, CB, concurrere exteriùs in C; ipsæ erunt per coroll. 2. ad prop. 36. lib. 3. elem. æquales, ideoque per prop. 16. Procli, quadrata eorum æqualia. Sed etiam est per prop. cir. 36. lib. 3. elem. rectangulum sub FE, ED, æquale quadrato rectæ EA: igitur in specie æqualitatis erit quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ AC, sicut rectangulum sub FE, ED, ad quadratum EA.

COROLL. NOSTRVM. I.

Ex Eutocio notis suis ad hanc proposit. Si in Ellipsi & circulo, diametri quæ transeunt per tactuum puncta, sint contingentibus æquidistantes: eadem prorsus euenient quæ in propositione dicuntur.

HOc corollarium necessarium est ad vniuersalem demonstrationem propositionis: fieri enim potest vt diametri ellipseos vel circuli, incedentes per puncta contactuum, sint æquidistantes contingentibus, vt modò in suppositione ostendemus; non autem in Parabola & Hyperbola, in quibus occurrent dictæ tangentes cum diametris non transeuntibus per punctum contactus vnius, iuxta propositio. 24. lib. 1.

Suppositio. In ellipsi & circulo, duæ tangentes rectæ AC, BC, concurrant in C; & per punctum A contactus rectæ AC, sit diameter AHL parallela alteri contingenti BC rectæ; & per punctum B alterius rectæ BC tangentis sit diameter BHM parallela alteri rectæ AC tangenti. Quod semper eueniet quando erunt diametri axes coniugati in his figuris: nam erunt anguli contingentium rectarum cum axibus proprijs recti, sicuti sunt in centro H anguli recti axium. Sumptumque sit punctum D in lineis curuis ellipseos & circuli; ex quo per prop. 31. lib. 1. element. sint emissæ rectæ lineæ

DG

DG, DKF, parallelæ respectiuè tangentibus AC, BC, fecantes per propof.21. Procli; ipfas dictas diametros in G & K; recta verò DKF occurrat in F alteri puncto fectionum datarum. Dico ita effe quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ AC, ficut rectangulum FE, ED, ad quadratum rectæ EA.

Apparatus. Per prop.31.lib.1.elem ex puncto F, ponatur recta FI parallela ipfi AC, occurret in I, diametro AHL per prop.11. Procli: eruntque parallelæ per prop.30. lib.1. element. rectæ DG, FI; ficuti etiam funt parallelæ inuicem rectæ DKF, AGHIL, quia funt parallelæ tangenti AC: refultabuntque ideo parallelogramma ex hac conftructione & dictis in fuppofitione, videlicet EB, AD, AF, GF, GK, KI, quorum oppofita latera erunt æqualia per prop.34. lib.1. elem. eruntque per coroll. noft.7. ad propofit.48. lib.1. rectæ lineæ DK, DG, ordinatim applicatæ ad proprias diametros prædictas, & recta DF, bifariàm erit diuifa in K, quare rectæ KD, KF, æquales erunt, tùm etiam æquales HG, HI, dictis KD, KF, æquales per cit. prop.34. lib.1. element. cumque fint portiones HA, HL, diametri AHL fectæ bifariàm in centro H, per propof.30. lib.1. æquales, fi ab illis tollantur prædictæ partes HG, HI æquales oftenfæ, relinquentur æquales portiones AG, LI per axio. 3. lib.1. element. quibus fi addatur communis GI, fient per 2. axiom. lib. eiufdem æquales rectæ IA, GL. igitur per lemma 49. lib.1. rectangulum fub LG, GA erit æquale rectangulo fub IA, AG. Denique quia per prop.30. lib. 1. diameter BM diuifa eft bifariàm in H, erit per cit. lem.49. quadratum rectæ BH æquale rectangulo BH, HM: tum quadratum rectæ AH vel LH æquale rectangulo fub AH, HL.

Demonftratio. Per prop.21. lib.1. erit quadratum rectæ BH ad rectangulum fub LH, HA; ita quadratum rectæ DG, ad rectangulum fub LG, GA; rectangulum fub LH, HA, oftenfum eft in apparatu æquale quadrato rectæ LH: rectangulum verò fub LG, AG, oftenfum etiam eft in apparatu, æquale rectangulo fub IA, AG: igitur per propof.7. lib.5. elem. corollarium noftrum erit vt quadratum rectæ BH ad quadratum rectæ AH vel LH, fic quadratum rectæ DG ad rectangulum fub IA, AG; ergo per coroll. prop.4. lib.5. elem. inuertendo erit vt quadratum rectæ AH vel LH, ad quadratum rectæ BH, fic rectangulum fub IA, AG, ad quadratum rectæ DG. Sunt autem rectæ AH, BC æquales, ergo quadrata eorum erunt æqualia per prop.16. Procli: funtque etiam rectæ BH, AC, æquales, ideoque earum quadrata æqualia: funtque etiam duæ rectæ FE, ED, æquales duabus refpectiuè IA, AG; ideoque per lemma 49. lib.1. rectangula æqualia fub IA, AG, fub FE, ED: ergo per coroll. noftrum ad propofit.7. lib.1. elementor. erit vt quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ AC, fic rectangulum fub FE, ED, ad quadratum DG, hoc eft ad EA æqualem ipfi DG.

COROLL. NOSTRVM II.

Recta linea AE eft media proportionalis, inter duas rectas FE, ED; quando duæ rectæ tangentes AC, BC, funt æquales, vt in circulo femper per coroll.2. ad prop. 36. lib. 3. elem.

CVm enim fit per hanc propofitio. rectangulum fub FE, ED, ad quadratum rectæ AE, ficut quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BC; fi duæ rectæ AC, BC, fint æquales, erunt per prop.16. Procli, quadrata earum æqualia: ideoque rectangulum fub FE, ED, æquale quadrato rectæ AE. Quare per propofit.17. lib.6. elem. recta AE erit media proportionalis inter rectas FE, ED.

PROPOSITIO XVII.

Si coni fectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in vnum conueniant. Sumantur autem in fectione duo quæuis puncta, & ab ijs ducantur lineæ contingentibus æquidiftantes, quæ & fibi ipfis, & lineæ occurrant. Vt quadrata contingentium inter fefe; ita erit rectangulum contentum lineis quæ interijciuntur inter fectionem, & linearum occurfum, ad rectangulum, quod lineis fimiliter fumptis continetur.

HÆc propofitio ficuti præcedens cafum nullum habet in Parabola & Hyperbola, quoad tangentes datas; quæ femper concurrent cum diametris earum extra fectiones, non tranfeuntibus per puncta propria contactuum, iuxta prop. 24. lib.1. Sed in ellipfi & circulo, quia fieri poteft vt ipfæ tangentes duæ datæ fint refpectiuè concurrentes cum diametris vt in Parabola & Hyperbola; vel fint parallelæ dictis diametris: ideo addidimus huic propofitioni corollarium ex Eutocio fatisfaciens cafui fecundo; & demonftratio afferenda antè corollarium fatisfaciet primo cafui.

Suppofitio. Sit fectio coni vel circuli circumferentia AB, quam duæ rectæ lineæ AC, CB, contingant in A, & B, conuenientes in C. fumptaque fint in linea curua fectionis vel circuli duo puncta diuerfa D, E, diuerfa ab con-

contactibus A, B; ex quibus transmissæ sint rectæ lineæ EFIK, DFGH, parallelæ respectiuè dictis tangentibus; occurrantque sibi ipsis in F, & lineæ curuæ sectionis vel circumferentiæ circuli, in alijs proprijs punctis K, H. Dico esse vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BC, sic rectangulum sub KF, FE, ad rectangulum sub HF, FD.

Apparatus. Per propos. 44. lib. 2. per puncta A & B contactuum ducantur diametri propriæ NA, PB, quibus primùm occurrant prædictæ datæ tangentes, ACP, BCN, productæ vltra punctum concursus C; tùm etiam occurrant aliæ istis parallelæ iuxta prop. 11. Procli, productæ vltra punctum F concursus, in punctis proprijs L, O. Denique ex eisdem punctis D, E, agantur per prop. 31. lib. 1. elem. aliæ rectæ eisdem tangentibus datis parallelæ, videlicet DX, EM, quæ occurrent dictis diametris in X & M, per cit. propositio. Procli. eruntque per 30. proposit. lib. 1. element. tres ex vna parte parallelæ, & tres ex alia parallelæ rectæ lineæ.

Demonstratio. In Parabola per prop. 46. lib. 1. & in reliquis sectionibus & circuli circumferentia, per propos. 47. lib. 1. rectæ lineæ KE, HD, quæ totæ sunt intra sectiones per propos. 10. lib. 1. bifariàm in I, & B, secabuntur ab suis proprijs diametris MAI, PBG, & erunt ordinatim applicatæ ad illas per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. Cùm ergo recta KE secta sit bifariàm in I, eique adiecta sit recta EF; erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub KF, FE, vnà cum quadrato rectæ EI, æquale quadrato rectæ IF; cumque triangula IEM, IFL, sint similia per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. ob parallelas rectas EM, FL; erit per lemma 1. vt quadratum rectæ EI ad quadratum rectæ IF, sic triangulum IEM ad triangulum IFL; & per prop. 16. lib. 5. elem. vicissim, vt quadratum rectæ EI ad triangulum IEM, sic quadratum rectæ IF ad triangulum IFL: igitur erit vt totum quadratum rectæ FI ad totum triangulum IFL, sic ablatum quadratum rectæ EI ad ablatum triangulum IEM; quare per prop. 19. lib. 5. element. erit reliquum rectangulum sub KF, FE, ad reliquum quadrilaterum FLME, vt totum quadratum rectæ IF ad totum triangulum IFL: sed per nost. coroll. ad lemma 9. & prop. 16. lib. 5. element. est vt quadratum rectæ EI ad triangulum IEM, ita quadratum rectæ AC ad triangulum CAN; ergo per prop. 11. lib. 5. element. erit vt rectangulum sub KF, FE ad quadrilaterum FLME, ita quadratum rectæ AC ad triangulum CAN. Verùm per prop. 1. triangulum CAN æquale est triangulo CPB; & per prop. 3. quadrilaterum FLME æquale est quadrilatero FOXD; ergo per prop. 7. & 11. lib. 5. element. erit vt rectangulum sub KF, FE ad quadrilaterum FOXD, ita quadratum rectæ AC ad triangulum CPB. eodem artificio probabitur, vt est rectangulum sub HF, FD ad quadrilaterum FOXD, ita esse quadratum rectæ CB, ad triangulum CPB; quare per coroll. prop. 4. lib. 5. element. inuertendo erit, vt quadrilaterum FOXD, ad rectangulum sub HF, FD, sic triangulum CPB ad quadratum rectæ CB. Quare cùm sit ostensum, vt quadrilaterum sub KF, FE, ad quadrilaterum FOXD, ita quadratum rectæ AC, ad triangulum CPB; erit etiam inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. element. vt quadrilaterum FOXD ad rectangulum sub KF, FD, ita triangulum CPB, ad quadratum rectæ AC. Comparando igitur ac disponendo antecedentia demonstrata, videlicet vt quadratum rectæ AC ad triangulum CPB, sic rectangulum sub KF, FE, ad quadrilaterum FOXD; & vt triangulum CPB ad quadratum rectæ CB, sic quadrilaterum FOXD ad rectangulum sub HF, FD: erit per propos. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate, vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ CB, sicut rectangulum sub KF, FE, ad rectangulum sub HF, FD. Quod erat demonstrandum in hoc primo casu.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Ex Eutocio notis suis ad hanc propositionem. Si in Ellipsi & circuli circumferentia, diametri ductæ per tactus sint contingentibus AC, BC, æquidistantes: erit itidem vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ CB; ita rectangulum sub KF, FE, ad rectangulum sub HF, FD.

Apparatus. Per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. Rectæ lineæ DH, DP, EK, erunt ordinatim applicatæ ad suas proprias diametros, bifariàmque diuisa EK in O: & vti in corollario præcedentis propositionis ostendimus, erunt rectæ AP, LM, æquales; tùm MA, PL; & in parallelogrammis resultantibus, latera opposita BC, NA, æqualia; tùm AC, BN; tùm DQ, PN; tùm DF, PO.

Demonstratio. Quia AC, BN, sunt æquales, tùm CB, NA, æquales; erit per coroll. nost. ad propos. 7. lib. 5. elem. vt AC, ad CB, sic BN ad NA; & per prop. 22. lib. 6. element. vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ CB, sic quadratum rectæ BN ad quadratum rectæ NA, hoc est ad rectangulum sub AN, NL, ob æqualitatem rectarum AN, NL, per prop. 30. lib. 1. sed per prop. 21. lib. 1. & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ BN ad rectangulum sub AN, NL, ita est quadratum rectæ PD, hoc est quadratum rectæ FO æqualis ipsi DP, ad rectangulum AP, PL; & quadratum rectæ EO ad rectangulum sub AO, OL: igitur per prop. 19. lib. 5. elem. erit reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. Si ergo ex quadrato rectæ EO, dematur quadratum rectæ DP, vel FO æqualis ipsi DP, relinquetur rectangulum sub KF, FE, (nam per 5. proposit.

posit. lib 2. elem. quadratum rectæ EO æquale est rectangulo sub KF, FE. simul cum quadrato rectæ FO; quia bifariàm recta EK diuisa est in O, & non bifariàm in F.) tùm etiam si ab rectangulo sub AO, OL, subtrahatur rectangulum sub AP, PL, relinquetur rectangulum sub MO, OP; (nam per lem. 11. rectangulum sub AO, OL, æquale est rectangulis sub AP, PL, sub MO. OL.) hoc est rectangulum sub HF, FD, æqualibus ipsis MO, OP. Igitur per proposit. 19. lib. 5. element. erit vt quadratum rectæ BN seu AC, ad rectangulum sub AN, NL. seu quadratum BC; sic rectangulum sub KF, FE, ad rectangulum sub HF, FD. Sicuti fuit propositum.

PROPOSITIO XVIII.

Si oppositas sectiones duæ rectæ contingentes in vnum conueniant: sumatur autem in quauis sectione aliquod punctum, & ab eo ducatur linea vni contingentium æquidistans, quæ & sectionem & alteram contingentium secet. Vt quadrata contingentium inter sese; ita erit rectangulum contentum lineis quæ interijciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidistantem & tactum interiectæ.

Dvos habet casus hæc propositio. Aut enim duarum datarum rectarum linearum contingentium vna continget vnam sectionem; & alia continget alteram sectionem oppositam. Vel autem contingent vnam.

Suppositio pro primo casu. Oppositas sectiones A, B, contingant duæ rectæ lineæ; AC quidem sectionem A, BC verò sectionem B; conueniantque in vnum C punctum. Sumptumque sit aliud punctum D in quauis sectionum, exempli gratiâ in sectione B: ex quo puncto D acta sit recta linea DEF æquidistans rectæ AC contingenti, secansque in D & E sectionem B, & contingentem BC in puncto F. Dico vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BC, ita esse rectangulum sub EF, FD, ad quadratum rectæ FB.

Apparatus. Per propos. 44. lib. 2. ex puncto contactus A ducatur diameter transuersa AHGL, quæ secabit per propos. 24. lib. 1. tangentem BC in H; & oppositam sectionem B in G, per prop. 29. lib. 1. Tùm ex punctis B & G, transmittantur per prop. 31. lib. 1. elem. rectæ lineæ BL, GK, parallelæ ipsi FE, quæ erunt per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inuicem, & tangenti AC; & rectam BL secabit in L diameter transuersa AGL; & rectam GK, secabit in K, tangens BC, per prop. 11. Procli. eritque recta BL ordinatim applicata diametro AGL, per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. quia parallela tangenti AC; & ob eandem causam recta DIE erit ordinatim applicata eidem diametro.

Demonstratio. Recta BHC in puncto B sectionem contingit, secans diametrum AHL in H, cui diametro est ordinatim applicata recta BL; ergo per propos. 36. lib. 1. erit vt AL ad LG, ita AH ad HG: & quia duæ rectæ BC, AL, se mutuo secant in H, suntque parallelæ BL, AC, erit per lemma 50. lib. 1. vt AH ad HC, sic LH ad HB; & vt AH ad LH, sic HC ad HB; & vt AL ad LH, sic CB ad BH: cumque etiam sit in triangulo BHL, recta KG parallela basi BL; erit etiam per lemma cit. 50. lib. 1. vt HL ad LG, sic HB ad BK: ergo erit per prop. 16. lib. 5. elemen. ex æquo, vt AL ad LG, sic CB ad BK. Simili discursu ex lemmate 50. cit. & prop. 16. lib. 5. elem. erit vt AH ad HG, sic AC ad KG; & vt CB ad BK, sic AC ad KG; & vt AC ad CB, sic KG ad BK. Igitur per prop. 22. lib. 6. element. erit vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ CB, sic quadratum rectæ KG ad quadratum rectæ BK; sed per proposit. 16. est, vt quadratum rectæ KG ad quadratum rectæ KB, sic rectangulum sub EF, FD, ad quadratum rectæ FB: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ CB, ita rectangulum sub EF, FD, ad quadratum rectæ FB. Sicuti fuit propositum.

Suppositio pro secundo casu. Sectionum oppositarum AB, MP, vnam AB, contingant duæ rectæ lineæ ACLE, BCH, in punctis A, B, concurrentes in punctum C: sumptumque sit punctum D in opposita sectione, ex quo egrediatur recta FDE, parallela ipsi BC contingenti, occurrens in E alteri tangenti ACE, & secans sectionem MN, in alio puncto F, ex datis. Assero esse vt quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ CA, sic rectangulum sub FE, ED, ad quadratum rectæ AE.

Apparatus. Per prop. 44. lib. 2. ducantur ex punctis A & B, duæ diametri AM, BNP; ipsi AM occurret in H tangens BCH, & alteri BN, alia tangens A in puncto L, per prop. 24. lib. 1. tùm per prop. 31. lib. 1. element. ex puncto D assumpto in sectione MP, quod non debet esse punctum P in quo diameter BNP occurrit ipsi sectioni MP, iuxta propos. 29. lib. 1. agatur recta linea DX parallela tangenti AC, hæc occurret per prop. 11. Procli in X, diametro BNP. porrò secabitur bifariàm recta FD quæ tota est intra sectionem per prop. 10. lib. 1. in puncto O, ab diametro BNP, per prop. 48.

lib. 1. eò quòd sit parallela tangenti BCH, eritque ordinatim applicata diametro ipsi BNP. Sed & erunt triangula similia BCL, OEL, ODX, ob angulos in L ad verticem æquales, & angulos in C & E æquales per prop. 29. lib. 1. elem. & in O & B, per cit. prop. 29. & angulos in D & E, in X & L, æquales per eandem propositio. citat. 29. vnde triangula prædicta erunt æquiangula, & per propositio. 4. lib. 6. element. latera obtinebunt proportionalia; & per defin. 1. lib. 6. element. similia erunt.

Demonstratio. Quia recta FD est bifariàm diuisa in O, eique adiecta est recta DE; erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub FE, ED, simul cum quadrato rectæ DO, æquale quadrato rectæ OE: Igitur cùm in triangulo EOL sit recta DX parallela basi EL, erit per lemma 1. vt quadratum rectæ OE ad quadratum rectæ DO, sic triangulum EOL ad triangulum DOX; ergo per prop. 16. lib. 5. elem. erit vt totum quadratum rectæ EO ad totum triangulum EOL, ita ablatum quadratum rectæ DO ad ablatum triangulum DOX: ergo per prop. 19. lib. 5. elem. erit reliquum rectangulum sub FE, ED, ad reliquum vtpote quadrilaterum DELX, vt totum quadratum rectæ EO ad totum triangulum EOL: sed vt quadratum rectæ EO, ad triangulum EOL, ita quadratum rectæ BC ad triangulum BCL, per lem. 1. & per proposit. 16. lib. 5. elem. Igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub FE, ED, ad quadrilaterum DELX, quadratum rectæ BC ad triangulum BCL: est autem per prop. 6. quadrilaterum DELX æquale triangulo AEG; & triangulum BCL, triangulo ACG, per 1. prop. Igitur per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub FE, ED, ad triangulum AEG; sic quadratum rectæ BC ad triangulum ACH; Cùmque in triangulo EAG sit parallela recta CH, basi EG, erit per 1. lemma, vt quadratum rectæ EA ad quadratum rectæ AC, ita triangulum AEG ad triangulum ACH; & per coroll. prop. 4. lib. 5. element. vt triangulum ACH ad triangulum AEG, sic quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ EA: & per proposi. 16. lib. 5. elemen. vicissim sit vt triangulum ACH ad quadratum rectæ AC, sic triangulum AEG ad quadratum rectæ EA. Igitur resumendo, & in ordinem redigendo demonstrata: cùm sit quadratum rectæ BC ad triangulum ACH, sicut rectangulum sub FE, ED, ad triangulum AEG; & modò ostenderimus esse triangulum ACH ad quadratum rectæ AC, vt triangulum AEG ad quadratum rectæ EA: erit per prop. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate, vt quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ CA, sic rectangulum sub FE, ED, ad quadratum rectæ EA. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ contingentes in vnum conueniant; sumptaque sint puncta, vnum in vna sectione, aliud in alia, ex quibus ducantur contingentibus æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant. Vt quadrata contingentium inter sese; ita erit rectangulum contentum lineis quæ interijciuntur inter sectionem & linearum occursum, ad rectangulum quod lineis similiter sumptis continetur.

Suppositio. Oppositarum A, D, sectionum repertæ sint diametri AC, BD, per prop. 44. lib. 2. incedentes per centrum earum E reperiendum per proposit. 45. libri eiusdem; vnaque diameter AF, procedat ex puncto A contactus rectæ lineæ AF contingentis sectionem A; & alia BD diameter procedat ex puncto D contactus rectæ lineæ DF contingentis sectionem oppositam D: conueniantque in vnum punctum F, duæ istæ contingentes rectæ AF, DF; & tangens AF conueniet in T cum diametro DB, & tangens DF occurret diametro AC in S, per proposit. 24. lib. 1. Sumptum autem sit punctum M in sectione D, ex quo acta sit recta linea MXL parallela tangenti DF, & secans in M & X, sectionem D: sumptumque sit aliud punctum G in altera sectione A, per quod ducta sit recta linea GIL, parallela tangenti AF, secansque sectionem A in duobus punctis G, I, & occurrens in L, prædictæ rectæ MXL, ex datis ipsis. Porrò recta MXL secabitur in O, ab diametro AEC, & recta GIL secabitur in K ab diametro DEB, per prop. 1. Procli. Sed & recta MX secabitur in N ab diametro BED producta vltra D, per ipsam cit. proposir. Procli; & per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. bifariàm secabitur in N, eritque ordinatim applicata diametro BEDN. Simili modo recta GI, secabitur ab diametro CEA producta vltra A, & bifariàm in H, eritque ad ipsam diametrum CEAH ordinatim applicata. Dico autem, vt est rectæ AF quadratum, ad quadratum rectæ DF, sic esse rectangulum sub GL, LI, ad rectangulum sub ML, LX.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto X ponatur recta linea XR parallela tangenti AF, erit etiam per prop. 30. lib. 1. elem. paral-

parallela rectæ GIL, secabitque in R diametrum BED. Similiter ex puncto I posita recta linea IP parallela tangenti rectæ DF, erit etiam parallela rectæ MXL, secabitque in P diametrum AEC, ex eisdem principijs eitatis. Porrò resultabunt diuersa triangula similia LNK, XNR per coroll. propos. 4. lib. 6. elem. ob rectam XR parallelam basi LK; tùm LHO, IHP, ob rectam IP parallelam basi LO, sed & duo triangula LNK, FDT, erunt similia per defin. 1. lib. 6. elem. ob angulos in D & N, æquales, tùm angulos in T & K æquales, per prop. 29. lib. 1. elemen. quare per coroll. nost. 3 ad prop. 32. lib. 1. elemen. reliquos angulos in F & L habebunt æquales; & per prop. 4. lib. 6. elem. latera obtinebunt proportionalia; vnde per defin. 1. cit. lib. 6 elem. ipsa triangula LNK, FDT, erunt similia: ostendimus autem triangulum XNR esse simile triangulo LNK; ergo per prop. 21. lib. 6. elemen. triangula tria LNK, XNR, FDT, erunt similia. Ex eisdem principijs probabuntur similia triangula tria LHO, FAS, IHP.

Demonstratio. Quia recta GHI, bifariàm diuisa est in H, eique in directum addita IL, erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub GL, LI, simul cum quadrato rectæ HI, æquale quadrato rectæ HL: & quia etiam eidem rectæ GHI bifariàm sectæ in H, adiecta est recta IK, erit per eandem prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub GK, IK, simul cum quadrato rectæ HI, æquale quadratum rectæ HK. & quia sunt in apparatu ostensa triangula æquiangula HLO, FAS, IHP, erit per coroll. nost. ad lemma 9. & per prop. 16. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ AF ad triangulum AFS, ita quadratum rectæ HL ad triangulum LHO, & quadratum rectæ IH ad triangulum HIP: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt totum quadratum rectæ HL ad totum triangulum HLO, sic ablatum quadratum rectæ HI ad ablatum triangulum HIP: & quia ostendimus rectangulum sub GL, LI, simul cum quadrato rectæ HI, esse æquale quadrato rectæ HL; hæc duo simul per propos. 7. lib. 5. elem. se habebunt ad eandem quantitatem vt quadratum rectæ HL; igitur si auferamus ab rectangulo sub GL, LI, simul cum quadrato rectæ HI, quadratum ipsum rectæ HI, erit reliquum rectangulum sub GL, LI, per prop. 19. lib. 5. element. ad reliquum quadrilaterum OPIL, si ab triangulo LHO dematur triangulum HIP, sicut totum quadratum rectæ HL ad totum triangulum HLO; & quia probatum est quadratum rectæ AF esse ad triangulum AFS, sicut quadratum totum rectæ HL ad totum triangulum HLO; erit per propositión. 11. lib. 5. element. reliquum rectangulum sub GL, LI, ad reliquum quadrilaterum OPIL, sicut quadratum rectæ AF ad triangulum AFS. At verò per prop. 4. triangulum AFS est æquale triangulo DFT; & per propos. 7. quadrilaterum OPIL æquale est quadrilatero KRXL: igitur per 7. & 11. prop. lib. 5. erit quadratum rectæ AF ad triangulum DFT, ita rectangulum sub GL, LI, ad quadrilaterum KRXL. ex eisdem principijs, eodem artificio, quo demonstrauimus rectangulum sub GL, LI, esse ad quadrilaterum OPIL, vt quadratum rectæ AF ad triangulum AFS, probabitur rectangulum sub ML, LX, esse ad quadrilaterum KRXL, vt quadratum rectæ DF ad triangulum DTF: quare per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. inuertendo erit, vt triangulum DTF ad quadratum rectæ DF, ita quadrilaterum KRXL ad rectangulum sub ML, LX. Igitur redigendo ad ordinem prædicta demonstrata, hac ratione, vt quadratum rectæ AF ad triangulum DFT, sic rectangulum sub GL, LI, ad quadrilaterum KRXL; & vt triangulum DFT ad quadratum rectæ FD, sic quadrilaterum KRXL ad rectangulum sub ML, LX: ergo per prop. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate erit, vt quadratum rectæ AF ad quadratum rectæ FD, sic rectangulum sub GL, LI, ad rectangulum sub ML, LX. Sicuti fuit propositum.

PROPOSITIO XX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes, sibi ipsis occurrant; & per occursum ducatur linea tactus coniungenti æquidistans, quæ secet vtramque sectionem: ducatur autem alia linea æquidistans eidem, sectionesque & contingentes secans. Erit vt rectangulum contentum lineis quæ inter occursum contingentium & sectiones interijciuntur, ad quadratum lineæ contingentis; ita rectangulum quod continetur lineis inter sectiones & contingentem interiectis, ad quadratum lineæ ad tactum abscissæ.

Svppositio. Per prop. 45. lib. 2. inuento centro E, sectionum oppositarum AB, CD, contingat in A recta AF sectionem AB, & alia recta CF contingat in C alteram sectionem oppositam CD; conueniantque in puncto F, istæ duæ tangentes rectæ AF, CF. Tùm puncta contactuum A, C, nectantur recta linea AC, cui data sit recta parallela BFD, ipsi AC nectenti puncta contactuum, seceturque in B & D sectiones datas, & per F punctum dicti con-

cursus incedat; hæc recta BFD, non incedet per centrum E iuxta prop. 32. lib. 2. nam punctum concursus F tangentium est extra centrum E; & ducta recta FE productaque vltra centrum E, diuidet bifariam in O rectam CD, per propos. 39. lib. 2. Sumptum verò sit punctum G in alterutra sectionum, puta AB, ex quo ducta sit altera recta GX parallela ipsi AC, quæ per prop. 30. lib. 1. elem. erit etiam parallela rectæ BFD, & ipsas sectiones datas oppositas secans in G & X, tum datas tangentes rectas in L & M, & rectam FE in S. Dico esse rectangulum sub BF, FD, ad quadratum rectæ AF tangentis, sicut rectangulum sub GL, LX, ad quadratum rectæ AL.

Apparatus. Ex punctis G, & B, per prop. 31. lib. 1. elem. agantur duæ rectæ lineæ GP, BR, parallelæ tangenti AF, secabuntur in P & R ab recta EF producta vltra F, per propofit. 11. Procli. & recta AENH ducatur ex puncto A per E centrum, occurrens in N rectæ GX & in H rectæ BFD per cit. propofit. Procli 11.

Demonstratio. Quandoquidem recta linea AC, nectit puncta contactuum A & C, & ex puncto F concursus datarum tangentium AF, CF, per centrum E incedit recta linea FE, productaque diuidit bifariam in O, rectam AC: ipsa recta FE erit diameter recta & coniugata ei transuersæ parallelæ ipsi AC, & incedenti per punctum seu centrum E, idque per prop. 38. lib. 2. ergo per defin. 15. & 17. lib. 1. inter primas, bifariam etiam diuidentur rectæ BD, GX, in F & S, parallelæ transuersæ dictæ diametro per propofit. 30. lib. 1. element. quia sunt parallelæ rectæ AC; eruntque prædictæ lineæ AC, GX, BD, ordinatim applicatæ ad diametrum FE, per def. 16. lib. 1. inter primas. Iam verò quia recta GX, bifariam secta est in S, & non bifariam in L; erit per propofit. 5. lib. 2. elem. rectangulum sub GL, LX, simul cum quadrato rectæ LS, æquale quadrato rectæ GS; ex quo si subtrahatur quadratum rectæ GS, relinquetur rectangulum sub GL, LX. Iam verò quia duo triangula BFR, GSP, habent angulos in F & S, æquales per prop. 29. lib. 1. elem. tùm angulos æquales in R & P, per eandem propof. cit. 29. reliquos tertios habebunt angulos æquales per coroll. nost. 3 ad prop. 32. lib. 1. elem. quare ipsa triangula erunt æquiangula, & per 4. propofit. lib. 6. elem. habebunt latera proportionalia. & per def. 1. libri eiusdem 6. elem. erunt similia: sed & per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. triangula GSP, LSF, erunt similia ob parallelas rectas LF, GP; ideoque per prop. 21. lib. 6. elem. tria triangula LSF, GSP, BFR, erunt similia. Quare per nost. coroll. ad lemma 9. & per prop. 16. lib. 5. element. erit vt quadratum rectæ BF ad triangulum BFR, sic quadratum rectæ GS, ad triangulum GSP, & quadratum rectæ LS ad triangulum LSF. Quod si ab totis, quadrato videlicet rectæ GS, & triangulo GSP, auferatur quadratum rectæ LS, & triangulum LSF; reliqua videlicet rectangulum sub GL, LK, & quadrilaterum GLFP, inter se erunt per prop. 19. lib. 5. elem. vt tota, nimirum vt quadratum rectæ GS ad triangulum GSP; & per prop. 11. lib. 5. elemento. quadratum rectæ BF ad triangulum BFR. Quadratum autem rectæ BF æquale est rectangulo sub BF, FD, rectis æqualibus probatis; triangulumque BFR, æquale est triangulo AHF per prop. 45. lib. 1. & per lemma 3. (nam per propofit. 4. triangulum BRF maius est quàm triangulum EHF, triangulo FAE; vnde sequitur per lemma 3. triangulum BRF, æquale esse duobus triangulis EHF, FAE, hoc est triangulo AFH esse æquale) & quadrilaterum GLFP est æquale triangulo ALN per prop. 5. Igitur per 7. & 11. propos. lib. 5. elemen. erit vt rectangulum sub BF, FD, ad triangulum AFH, ita rectangulum sub GL, LX, ad triangulum ALN. Sed propter parallelas rectas LN, FH, triangula ALN, AFH, erunt similia per coroll. prop. 4. lib. 5. elemen. igitur per coroll. nost. ad lemma 9. & propof. 16. lib. 5. element. erit vt triangulum AFH ad quadratum rectæ AF, ita triangulum ALN ad quadratum rectæ AL. Quare per propofit. 22. lib. 5. element. erit ex æquo, vt rectangulum sub BF, FD, ad quadratum rectæ AF, ita rectangulum sub GL, LX, ad quadratum rectæ AL. Quod erat concludendum.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem positis. Si in sectione duo puncta sumantur; & per ipsa ducantur rectæ lineæ, vna quidem contingenti æquidistans, altera verò lineæ tactus coniungenti: quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant. Erit vt rectangulum contentum lineis quæ interijciuntur inter occursum contingentium & sectiones, ad quadratum contingentis; ita rectangulum contentum lineis inter sectiones & linearum occursum interiectis, ad rectangulum quod lineis similiter sumptis continetur.

SVpposítis eisdem quæ in prop. 20. superiore. Sumpta sint in sectione AB, duo puncta G, & K, per quæ incedant duæ rectæ lineæ NXGOPR, KST, æquidistantes ipsi AF tangenti

genti sectionem eandem; & aliæ rectæ duæ G L M, K O ψ I x ψ ω, æquidistantes ipsi AC, rectæ nectenti puncta A, C, contactuum: porrò ex datis duæ primæ rectæ lineæ ductæ parallelæ tangenti AC, & aliæ duæ postremæ æquidistantes rectæ AC, debent sibi inuicem occurrere in punctis designatis in figura; tùm etiam diametro rectæ EFY, vti ostendimus in superiore propositione: & diameter transuersa ducta per E centrum, educta ex A puncto contactus, productaque vltra E centrum, debet occurrere per prop. 11. Procli, rectis GM, K ω, BD, parallelis ipsi AC, in punctis signatis M, ψ, H: tum producta infra punctum A contactus debet occurrere rectæ NXGR, parallelæ tangenti AF, in puncto X, per eandem proposit. Procli, & per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. bifariàm in X secabit rectam ipsam NG, eritque ipsa NG ordinatim applicata dictæ diametro transuersæ EAX. Porrò rectæ K ω, BD, bifariàm diuidentur ab diametro EF recta, in punctis I, & F, vti probauimus in præcedente propositione; resultabuntque diuersa triangula æquiangula AFH, ALM; tùm XGM, O X ψ, per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. Dico autem esse quadratum rectæ FA, sicut rectangulum sub BF, FD, ad quadratum rectæ FA, sicut rectangulum sub KO, O ω, ad rectangulum sub NO, OG.

Demonstratio. Quia sunt triangula AFH, ALM æquiangula, tùm etiam triangula XGM, O X ψ, æquiangula: erit per coroll. nost. ad lemma 9. & per propos. 16. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ AF ad triangulum AFH, sic quadratum rectæ AL ad triangulum ALM; & vt quadratum rectæ XO ad triangulum XO ψ, sic quadratum XG rectæ ad triãgulum XGM; ergo erit vt totum quadratum rectæ XO ad totum triangulum O X ψ, sic ablatum quadratum rectæ XG, ad ablatum triangulum GXM; igitur per prop. 19. lib. 5. elemen. erit reliquum ad reliquum sicut totum ad totum, hoc est sicut quadratum rectæ XO ad totum triangulum O X ψ; vel vt totum quadratum rectæ AF, ad totum triangulum AFH: nam cùm sint triangula AFH, O X ψ, æquiangula, ob parallelas AF, XO, tùm ob parallelas rectas FH, O ψ, erunt anguli eorum æquales per prop. 29. lib. 1. elem. quare per coroll. nostrum ad lemma 9. & per prop. 16. lib. 5. element. erit vt quadratum rectæ AF ad triangulum AFH, sic quadratum rectæ OX ad triangulum O X ψ: igitur per prop. 11. lib. 5. element. erit reliquum ad reliquum, sicut totum quadratum rectæ A F ad totum triangulum AFH. Iam verò probemus quod auferendo de toto quadrato rectæ XO, quadratum rectæ XG, relinquatur rectangulum NO, OG: & quod de toto triangulo O X ψ, subtrahendo GXM, relinquatur quadrilaterum G O ψ M. Hoc vltimum euidens est ex constructione: Primum autem sic ostendemus; quia recta NG bifariàm secta est in X, eique in directum addita est recta GO; erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub NO, OG, simul cum quadrato rectæ XG, æquale quadrato rectæ XO; ergo si ab quadrato rectæ XO subtrahatur quadratum rectæ XG, relinquetur rectangulum sub NO, OG. Igitur erit reliquum rectangulum sub NO, OG, ad reliquum quadrilaterum G O ψ M, sicut totum quadratum rectæ AF ad totum triangulum AFH. Sed per prop. 45. lib. 1. triangulum AFH æquale est triangulo BYF; & per prop. 12. quadrilaterum prædictum G O ψ M, æquale est quadrilatero KORT: igitur per prop. 7. & 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ AF ad triangulum BYF, ita rectangulum sub NO, OG, ad quadrilaterum KORT. Demonstrabimus autem vt in antecedente propositione, rectangulum sub KO, O ω, ad quadrilaterum KORT ita esse, vt quadratum rectæ BF, hoc est rectangulum sub BF, FD, ad triangulum BYF: igitur erit inuertendo iuxta coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt triangulum BYF ad rectangulum sub BF, FD, sic quadrilaterum KORT ad rectangulum sub KO, ω O. Quare cùm sit vt quadratum rectæ A F ad triangulum BYF, ita rectangulum sub NO, OG, ad quadrilaterum KORT; & sit vt triangulum BYF ad rectangulum sub BF, FD, sic quadrilaterum KORT ad rectangulum sub KO, O ω: erit ex æqualitate per prop. 22. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ AF ad rectangulum sub BF, FD, ita rectangulum sub NO, OG, ad rectangulum sub KO, O ω: ergo per coroll. propositio. 4. libri 5. element. inuertendo erit vt rectangulum sub BF, FD, ad quadratum rectæ A F, sic rectangulum sub K O, O ω, ad rectangulum sub N O, OG. Quomodo fuit propositum, & erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Si oppositas sectiones contingant duæ rectæ lineæ inter se æquidistantes; ducantur autem aliæ duæ lineæ, quæ sibi ipsis & sectionibus occurrant, vna quidem contingenti æquidistans, altera verò æquidistans ei quæ tactus coniungit: Erit vt transuersum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus coniungentem constituitur; ita rectangulum contentum lineis inter sectionem & linearum occur-

ſum interiectis, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

SVppoſitio. Sectiones A & B oppoſitas, contingant duæ rectæ lineæ AC, BD, parallelæ, vna vnam ſectionem; altera aliam; & puncta contactuum nectat recta AB. Tùm ducantur aliæ duæ rectæ lineæ KM, GXE, quæ ſibi ipſis occurrant in puncto E; & recta vna KM parallela ſit tangenti AC, ſecetque ſectionem A in duobus punctis K, M; & recta alia GE ſit parallela ipſi AB puncta contactuum vnienti, ſecetque ambas ſectiones in G & X. Dico eſſe vt AB tranſuerſum latus (nam per coroll. noſt. 1. ad prop. 32. lib. 2. recta AB incedet per 1 centrum datarum oppoſitarum ſectionum, ideoque per coroll. prop. 50. lib. 1. erit tranſuerſa earum diameter ſeu latus tranſuerſum) ad latus eius rectum, ita eſſe rectangulum ſub GE, EX, ad rectangulum ſub KE, EM.

Apparatus. Ex punctis G, & X, agantur verſus latus AB tranſuerſum duæ rectæ lineæ GFH, XNO, parallelæ ipſi tangenti AC, vel BD, per prop. 31. lib. 1. elem. erunt per prop. 30. libri eiuſdem 1. element. inter ſe parallelæ & rectæ etiam KM; ſecabuntque in F & N, tranſuerſum latus AB productum vltra ſua extrema, & recta KM ſecabuntur ab eodem producto tranſuerſo latere in L, per 11. prop. Procli; reſultabuntque parallelogramma GN, GL, EN: quare per prop. 34. lib. 1. elem. oppoſita eorum latera XN, EL, GF, erunt æqualia; tùm etiam GX, FN; tùm etiam GE, FL; tùm etiam XE, NL, eruntque per coroll. noſt. 7. ad prop. 48. lib. 1. rectæ GF, XN, KM, ordinatim applicatæ ad diametrum tranſuerſam AB, & recta KM bifariàm diuiſa in L. Et quia eſt per propoſit. 21. lib. 1. vt quadratum rectæ XN ad rectangulum BN, NA, ſic ſectionis A, rectum latus ad tranſuerſum AB; & in alia ſectione B, vt quadratum rectæ GF ad rectangulum ſub AF, FB, ſic ſectionis B, rectum latus, ad tranſuerſum AB; ſunt autem recta illa latera æqualia per prop. 14. lib. 1. & idem eſt tranſuerſum AB latus. Igitur per propoſit. 11. lib. 5. element. erit vt quadratum rectæ NX ad rectangulum ſub BN, NA, ſic quadratum rectæ GF ad rectangulum ſub AF, FG; & viciſſim, per prop. 16. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ XN ad quadratum rectæ GF, ſic rectangulum ſub BN, NA, ad rectangulum ſub AF, FG: ſunt autem per propoſ. 16. Procli, quadrata rectarum XN, GF, æqualium oſtenſarum, æqualia; ergo per coroll. noſt. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. rectangula ſub BN, NA, ſub AF, FG, erunt æqualia; & per lemma 13. recta NA erit æqualis rectæ FB. Sed & recta KL maior erit quàm recta XN, per coroll. noſt. 1. ad propoſitio. 22. lib. 1.

Demonſtratio. Quia recta KLM ordinatim applicata eſt diametro tranſuerſæ ABL, erit per prop. 21. lib. 1. & per coroll. prop. 4. lib. 5. element. vt AB latus tranſuerſum ad rectum eius, ſic rectangulum ſub BL, LA, ad quadratum rectæ KL: tùm vt latus tranſuerſum AB idem, ad rectum idem, ſic rectangulum ſub BN, NA, ad quadratum rectæ XN, vti oſtendimus in apparatu; vel ad quadratum æquale rectæ EL æqualis ipſi XN, per apparatum: Igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt maius ſeu totum rectangulum ſub BL, LA, ad totum ſeu maius quadratum rectæ LK, ſic ablatum rectangulum minus ſub BN, NA, vel ipſi æquale ſub FA, NA, cùm ſint æquales rectæ AN, BF, quæ additæ ad AB, efficient æquales FA, BN; ad ablatum minus quadratum rectæ minoris LE, vel XN æqualium: ergo per prop. 19. lib. 5. elem. erit reliquum rectangulum ſub FL, LN, ad reliquum rectangulum ſub KE, EM, ſicut totum rectangulum ſub BL, LA, ad totum quadratum rectæ KL; & per prop. 11. lib. 5. elem. vt AB latus tranſuerſum ad rectum eius. (Quod autem facta ſubtractione minoris rectanguli ſub BN, NA, ab maiore ſub BL, LA, reſiduum ſit rectangulum ſub FL, LN, conſtat ex lemmate 12. ſimiliter quod detrahendo rectangulum minus ſub FA, AN, æquale quadrato rectæ XN, vel LE oſtenſum, ab quadrato maiore rectæ XL, vel ei oſtenſo æquali rectangulo BL, LA, reliquum ſit rectangulum ſub KE, EM, conſtat ex eodem lemmate 12.) Verùm per prop. 1. lib. 6. element. rectangulum ſub FL, LN, æquale eſt rectangulo ſub GE, EX, ob æquales baſes & altitudines æquales oſtenſas; ergo per propoſitio. 7. & 11. lib. 5. element. vt AB tranſuerſum latus ad rectum; ſic rectangulum ſub GE, EX, ad rectangulum ſub KE, EM. Sicuti fuit propoſitum.

PROPOSITIO XXIII.

Si in oppoſitis ſectionibus quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes conueniant in quauis ſectione; ducantur autem aliquæ aliæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & alijs ſectionibus oppoſitis occurrant: Vt quadrata contingentium inter ſeſe; ita erit rectangulum contentum lineis, quæ inter ſectiones & occurſum interijciuntur, ad rectangulũ quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

Sup-

SVppositio. Sint AB, CD, EF, GH, oppositæ sectiones quæ coniugatæ appellantur. Sitque earum centrum K commune per coroll. nost. 27. prop. 49. lib. 2. repertum ex prop. 45. lib. 2. Sectiones verò oppositas AB, EF, contingant duæ rectæ EL, AL, lineæ, (vna vnam, altera aliam) conuenientes in puncto communi L, quod non erit centrum K, per coroll. nost. 1. ad prop. 32. lib. 2. sitque hoc L punctum concursus in sectione CD, vel intra eius locum. Sumpta autem sint puncta G & H, & ex illis rectæ lineæ transmissæ GO, HS parallelæ respectiuè dictis tangentibus, occurrentes sibi ipsis in X, & sectioni CD, in O & S, & sectioni GH oppositæ, in G & H. Dico, vt quadratum rectæ EL ad quadratum rectæ AL, ita esse rectangulum sub HX, XS, ad rectangulum sub GX, XO.

Apparatus. Ex punctis contactuum A, E, transmittantur per K centrum rectæ lineæ AK, EK, quæ erunt diametri per coroll. proposit. 50. lib. 1. & productæ vltra centrum, occurrent per prop. 29. lib. 1. sectionibus oppositis, in F, & B; erunt per prop. 30. lib. 1. æquales AK, KF, tùm æquales EK, KB: diameter EKB secabitur in V ab tangente AL, inter centrum K, & sectionem AB, per coroll. proposit. 31. lib. 1. & in N ab recta OG parallela ipsi AL, per propos. 11. Procli. Et similiter in puncto χ, diameter AKF secabitur, inter centrum K & sectionem EF, ab tangente EL; & in R ab recta HS; & in M ab recta GO; & in P ab recta HS parallela ipsi EL. Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto S agatur ad partes diametri BKE, recta linea ST parallela tangenti AL, occurrensque ipsi diametro BKE in T, iuxta prop. 11. Procli: tùm etiam ex puncto O ponatur alia recta OY ad partes diametri AKF, parallela tangenti EL, occurrensque in Y ipsi diametro AKF, per cit. proposit. Procli. Porrò per prop. 30. lib. 1. elem. erunt tres rectæ lineæ GMNO, TS, AVCL parallelæ, tùm aliæ tres parallelæ EχDL, HPRXS, OY. Sed & resultabunt triangula similia EVL, PTS, PNX, ob prædictas parallelas, per prop. 29. lib. 1. elem. tùm alia triangula æquiangula ALχ, MOY, MXR, ob eandem rationem.

Demonstratio. Quia oppositarum sectionum sunt communes diametri, erit recta BKE diameter sectionum oppositarum AB, EF, tùm etiam alia recta AKF erit earundem communis diameter; rectaque EL sectionem EF contingit in E; ipsique parallela recta ducta est HS; & ipsa EL sectionem deinceps CD, attingit seu secat in D actu, vel potestate si produceretur in infinitum, & in β sectionem alteram GH deinceps, per prop. 19. lib. 2. & per proposit. eandem in puncto E bifariàm diuidetur: igitur per corollarium nostrum 36. ad propos. 49. lib. 2. diuidetur bifariàm in P recta linea HPS ab diametro BKE diuidente in E bifariàm dictam tangentem βEL cui est parallela ipsa HPS. Ex eisdem principijs probabitur recta AL producta vltra A attingere in δ sectionem HG, quandoquidem iam attingit aliam deinceps CD; in C, & bifariàm diuidi in puncto A contactus ab diametro AKF; tùm etiam rectam GMO parallelam ipsi tangenti δAC, bifariàm diuidi in M ab dicta diametro AKF. Quoniam verò triangula EVL, PTS sunt ex apparatu æquiangula: erit per corollarium nostrum ad lemma 9. vt quadratum rectæ EL ad quadratum rectæ PS, sic triangulum EVL ad triangulum PTS; & per propsition. 16. libri 5. elementorum viscissim, vt quadratum rectæ EL ad triangulum EVL, sic quadratum rectæ PS ad triangulum PTS: simili modo ex eisdem principijs; quia sunt triangula æquiangula PTS, PNX, erit per coroll. nost. ad lemma 9. vt quadratum rectæ PS ad quadratum rectæ PX, sic triangulum PTS, ad triangulum PNX; & vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ PS ad triangulum PTS, sic quadratum rectæ PX ad triangulum PNX: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ EL ad triangulum EVL, sic quadratum rectæ PX ad triangulum PNX, vel sic quadratum rectæ PS ad triangulum PTS. Et quia etiam triangula ALχ, MOY, sunt æquiangula, erit per coroll. nost. ad lemma 9. vt quadratum rectæ AL ad quadratum rectæ MO, sic triangulum ALχ ad triangulum MOY; & vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ EL ad triangulum ALχ, sic quadratum rectæ MO ad triangulum MOY; tùm etiam quia sunt æquiangula triangula MOY, MXR, erit per coroll. nost. ad lem. 9. vt quadratum rectæ MO ad quadratum rectæ MX, sic triangulum MOY ad triangulum MXR; & vicissim per proposit. 16. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ MO ad triangulum MOY, sic quadratum rectæ MX ad triangulum MXR; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ AL ad triangulum ALχ, sic quadratum rectæ MO ad triangulum MOY, vel sic quadratum rectæ MX ad triangulum MXR. Age verò probemus quod subtrahendo ex quadrato rectæ PS, quadratum rectæ PX, relinquatur rectangulum sub HX, XS; & quod demendo de triangulo PTS, triangulum PNX, relinquatur quadrilaterum TNXS; hoc vltimum constat ex ipsa constructione: Primum verò sic ostenditur. Quia recta linea HPS diuisa est bifariàm in P, & non bifariàm in X; erit per propos. 5. lib. 2. elem. rectangulum sub PX, XS, simul cum quadrato rectæ PX, æquale quadratum rectæ PS; igitur si de quadrato rectæ PS auferatur quadratum rectæ PX, residuum erit per lemma 2. rectangulum sub HX, XS. Simili modo probemus quod si de quadrato rectæ MX, adiamamus quadratum rectæ MX, residuum sit rectangulum sub GX, XO; & quod auferendo

de triangulo MOY, triangulum MXR, residuum sit quadrilaterum XRYO; hoc vltimum patet ex ipsa constructione; ostendamus primum: Quia recta GMO bifariàm in M ostensa est diuisa, & non bifariàm diuiditur in X; erit per prop. 5. lib. 2. elemen. rectangulum sub GX, XO, simul cum quadrato rectæ MX, æquale quadrato rectæ MO; ergo si de quadrato rectæ MO subtrahamus quadratum rectæ MX, residuum erit per lemma a. rectangulum sub GX, XO. Igitur cùm probauerimus esse vt totum quadratum rectæ PS ad totum triangulum PTS, sicut ablatum quadratum rectæ PX, ad ablatum triangulum PNX; erit per prop. 19. lib. 5. elem. reliquum rectangulum sub HX, XS, ad reliquum quadrilaterum TNXS, sicut totum quadratum rectæ PS ad totum triangulum PTS; & quia probauimus esse quadratum rectæ PS ad triangulum PTS, sicut quadratum rectæ EL ad triangulum EVL; erit per prop. 11. lib. 5. elem. rectangulum sub HX, XS, ad quadrilaterum TNXS, sicut quadratum rectæ EL ad triangulum EVL. Cumque etiam demonstrauerimus esse vt totum quadratum rectæ MO ad totum triangulum MOY, sic ablatum quadratum rectæ MX, ad ablatum triangulum MXR; erit per propos. 19. lib. 5. elem. reliquum rectangulum sub GX, XO, ad reliquum quadrilaterum XRYO, sicut totum quadratum rectæ MO ad totum triangulum MOY: & quia ostendimus esse quadratum rectæ MO ad triangulum MOY, sicut quadratum rectæ AL ad triangulum ALX; erit per prop. 11. lib. 5. elem. rectangulum sub GX, XO, ad quadrilaterum XRYO, sicut quadratum rectæ AL ad triangulum ALχ: & iuxta coroll. prop. 4. lib. 5. elem. erit vt triangulum ALχ ad quadratum rectæ AL, sic quadrilaterum XRYO ad rectangulum sub GX, XO. Sunt autem duo triangula EVL, ALχ, æqualia per prop. 4. & duo quadrilatera TNXS, XRYO, æqualia per coroll. nost. ad prop. 15. ergo per prop. 7. lib. 5. elemen. erit vt quadratum rectæ EL ad triangulum EVL, sic quadratum rectæ EL ad triangulum ALχ: tùm etiam vt rectangulum sub XH, XS, ad quadrilaterum TNXS, sic rectangulum sub HX, XS, ad quadrilaterum XRYO: Erit igitur vt quadratum rectæ EL ad triangulum EVL, & rectangulum sub XH, XS, ad quadrilaterum TNXS; sic etiam quadratum rectæ EL ad triangulum ALχ, & rectangulum sub XH, XS, ad quadrilaterum XRYO; sed ostendimus antea esse triangulum ALχ ad quadratum rectæ AL, vt quadrilaterum XRYO ad rectangulum sub GX, XO; ergo ex æqualitate, per prop. 22. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ EL ad quadratum rectæ AL, sic rectangulum sub XH, XS, ad rectangulum sub GX, XO. Quod erat concludendum.

PROPOSITIO XXIV.

Si in oppositis sectionibus quas coniugatas appellamus, à centro ad sectiones ducantur duæ rectæ lineæ, quarum vna quidem sit transuersa diameter, altera verò recta; & ducantur aliæ duæ lineæ his diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant; ita vt occursus sit in loco inter quatuor sectiones intermedio: Rectangulum contentum portionibus lineæ diametro transuersæ æquidistantis, simul cum eo ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro proportionem habet eandem quam diametri rectæ quadratum ad quadratum transuersæ; æquale erit duplo quadrati quod à dimidia transuersæ diametri constituitur.

Supposítio. sint A, B, C, D, sectiones oppositæ coniugatæ; earumque diametri coniugatæ transuersa AC, & recta DB, se mutuò in E centro intersecantes per quod incedere debent. Tùm his ductæ sint rectæ lineæ duæ FL, MR, dictis diametris parallelæ, vna vni, altera alteri, singulæque sectiones oppositas secent, seu ijs occurrant, & se inuicem ambæ secent in puncto X sito in loco inter quatuor sectiones datas intermedio: recta FL secabit rectam diametrum DB in I, & recta MR secabit transuersam diametrum AC, in O, per propos. 11. Procli. Dico rectangulum sub FX, XL, simul cum eo ad quod rectangulum sub MX, XR, proportionem habet eandem quam quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC; æquale esse duplo quadrati rectæ AE, seu dimidiæ totius diametri transuersæ AC, quæ per propositión. 30. libri 1. bifariàm in centro E diuiditur.

Apparatus. Per coroll. nost. 6. ad propos. 2. lib. 2. datis duabus asymptotis oppositis, A, C, reperiantur vnius puta A, asymptoti duæ SET, VEY, quæ erunt etiam communes alteri sectioni C oppositæ, per prop. 15. lib. 2. tùm etiam communes datis quatuor coniugatis, per prop. 17. lib. eiusdem 2. quæ secabunt ductas omnes alias rectas in punctis designatis ab chara-

characteribus figurarum appositarum; rectam quidem FL in K & H; aliam verò rectam MR, in N & P, per prop. 11. Procli. Præterea per prop. 49. lib. 2. per punctum A ducatur recta linea SAV, sectionem A contingens; hæc occurret asymptotis SET, VEY, in punctis S & V, & bifariàm in A diuidetur, per prop. 3. lib. eiusdem 2. secabitque in G obuiam rectam FL, per cit. prop. 11. Procli. Porrò notandum quinque casus esse diuersos, respectu loci in quo concurrunt duæ rectæ FL, MR. Aut enim punctum X in quo concurrunt existit in angulo SEV continente alterutram hyperbolam A vel C oppositarum; qui erit primus casus, cui prima figura inseruit. Vel in vna asymptotarum, puta ST, tunc verò punctum X & H confluunt in vnum, & erit secundus casus, cui erit vsui figuratio secunda vel punctum X erit in alterutro angulorum deinceps, puta SEY, respectu prædicti anguli SEV, vt videre est in figuratione tertia huius tertij casus. Porrò hi tres casus pertinent ad hanc propositionem. Quartus casus est quando punctum X occursus dictarum rectarum FL, MR, est intra locum vnius è sectionibus datis D, B, qui explicabitur in prop. sequenti 25. aliud infert ab proposito in hac præsenti 24. Quintus verò casus est quando punctum X prædicti occursus est intra locum vnius sectionum A, C, datarum; pertinetque ad propos. 26. in qua aliud diuersum ab prædictis infertur.

Demonstratio primi casus, posito puncto X in angulo SEV continente Hyperbolam A. Quia recta SAV, sectionem in A contingit, & occurrit asymptotis in S & V, sectionis A contactæ, quadratum rectæ AS, vel AV, æqualium, æquale est quartæ parti figuræ ad AEC diametrum transuersam, per propos. 3. lib. 2. Quod si ex puncto D ponatur per prop. 49. lib. 2. recta linea contingens sectionem D, videlicet DS, attinget in puncto S, asymptotum SE, per prop. 21. lib. 2. Porrò quia dantur duæ diametri AC, DB, coniugatæ, & recta FL parallela diametro AC, ipsam FL diuidet bifariàm in I, alia diameter DB; similiter quia datur recta MR parallela diametro DB, diuidetur bifariàm in O ab alia diametro AC, per defin. 17. lib. 1. inter primas, eruntque per defin. 16. ordinatim applicatæ suis diametris à quibus diuiduntur. Sed & per propos. 5. lib. 2. recta SAV erit parallela rectæ MR, tùm etiam per prop. 30. lib. 1. elem. diametro DB; sicuti etiam recta DS erit parallela FL, & diametro AC, per easdem propositiones proximè citatas. Itaque parallelogramma erunt DA, DG, & alia his inclusa; & per propos. 34. lib. 1. elem. latera opposita habebunt æqualia, videlicet in exemplo latera AS, ED, vnde per 16. propos. Procli quadrata eorum erunt æqualia; Sed & per lemma 49. lib. 1. rectangulum sub AS, AV, æqualibus, erit æquale quadrato rectæ AS. Igitur per propositio. 7. lib. 5. coroll. nostrum, erit quadratum rectæ AS, seu rectangulum sub AS, AV, ad quadratum rectæ EA, ita quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA: rectangulum autem sub AS, AV, ad quadratum rectæ EA, per prop. 23. lib. 6. elemen. proportionem habet compositam ex ratione AS ad EA, & ex ratione AV ad EA. Et quia in triangulo SEV, vel triangulo SEA, vel triangulo VEA, est recta NP parallela rectæ SAV; resultabunt diuersa triangula similia per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. tùm etiam quia in triangulo ASE, est recta FH parallela ipsi AE, resultabunt etiam triangula similia; tùm etiam in triangulo DES, quia est parallela IH ipsi DS, resultabunt triangula similia. Ergo erit per lemma 50. lib. 1. vt SA ad AE, sic NX ad XH; & vt VA ad AE, sic PX ad XK; ideoque per lemma 7. lib. 1. proportio quadrati rectæ VA vel DE æqualibus ad quadratum rectæ EA, componetur ex ratione NX ad XH, & ex ratione PX ad XK. Proportio autem rectanguli sub PX, XN, ad rectangulum XK, XH, componitur per prop. 23. lib. 6. elem. ex eisdem rationibus prædictis, videlicet ex ratione PX ad XK, & ratione NX ad XH; ergo per lemma 7. ad lib. 1. erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, ita rectangulum sub PX, XN, ad rectangulum sub XK, XH. Igitur per prop 12. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, ita quadratum rectæ DE simul cum rectangulo sub PX, XN, ad quadratum rectæ EA simul cum rectangulo sub XK, XH; sed per prop. 11. lib. 2. quadratum rectæ DE æquale est rectangulo sub PM MN, hoc est rectangulo sub RN, NM; (nam per coroll. nost. ad prop. 20. lib. 6. elem. quadratum rectæ DE est quarta pars quadrati rectæ DEB; & per coroll. nost. 1. ad prop. 10. lib. 2. rectangula sub PM, MN, sub RN, NM sunt æqualia.) & quadratum rectæ AE æquale est rectangulo sub KF, FH, vel sub LH, HF, per citatas proposit. & coroll. citata proximè: igitur per prop. 7. & 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic triangulum sub PX, XN, simul cum rectangulo sub RN, NM, ad rectangulum sub XK, XH simul cum rectangulo sub LH, HF. Rectangulum autem sub PX, XN simul cum rectangulo sub RN, NM, æquale est rectangulo sub RX, XM, per lemma 15. igitur per 7. & 11. propos. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EA, ita rectangulum sub RX, XM, ad rectangulum sub XK, XH simul cum rectangulo sub KF, FH, vel LH, HF. Quia verò recta DB dupla est rectæ DE, & recta AC dupla rectæ AE, per proposition. 30. lib. 1. erit per coroll nost. ad prop. 20. lib. 6. elem. in ratione quadrupli, vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ DE, sic quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ EA; quare vicissim erit per proposition. 16. libri 5. elemenor. vt quadratum

dratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC, sic quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA: igitur per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC, sic rectangulum sub RX, XM, ad rectangula duo simul, sub XK, XH, sub KF, FH, quod est retinendum pro conclusione: rectangulum autem sub XK, XH, simul cum rectangulo LX, XF, est æquale per lemma 14. rectangulo sub KF, FH, id est quadrato rectæ AE per prop. 11. lib. 2. Ergo si his æqualibus commune addatur quadratum rectæ AE; fient per 1. axiom. lib. 1. elem. ex vna parte, hæc tria simul sumpta, rectangulum sub XK, XH, rectangulum sub FX, XL, & quadratum rectæ AE, hoc est rectangulum sub KF, FH, æqualia his duobus simul sumptis, rectangulo sub KF, FH, & quadrato rectæ AE, hoc est duplo quadrati rectæ AE. quod erat demonstrandum. Ostendimus enim paulò ante, rectangulum sub RX, XM, esse ad rectangula duo simul sub XK, XH, sub FX, XL, sicut quadratum diametri DB ad quadratum diametri AC.

Demonstratio in casu secundo, in quo duæ rectæ lineæ FL, MR, se mutuò secent in puncto H. asymptoti vnius, vel punctum X quod est sectio mutua ipsarum rectarum confluat in punctum H. Per prop. 11. lib. 2. Rectangulum sub FH, HL, vel sub FX, XL, est æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum sub MH, HR, vel sub MX, XR, est æquale quadrato rectæ DE per eandem cit. propos. Igitur erit in ratione æqualitatis, vt rectangulum sub FH, HL, vel sub FX, XL, ad quadratum rectæ AE, sic rectangulum sub MH, HR, vel sub MX, XR, ad quadratum rectæ DE; quare vicissim erit iuxta prop. 16. lib. 5. elemen. vt rectangulum sub FH, HL, vel sub FX, XL, ad rectangulum sub MH, HR, vel sub MX, XR, sic quadratum rectæ AE ad quadratum rectæ DE; sunt verò rectangula duo sub FH, HL, sub FX, XL, æqualia, per lemma 49. lib. 1. tùm etiam duo rectangula sub MH, HR, sub MX, XR, æqualia; etiamque est per prop. 15. lib. 5. elem. vt DE ad AE, sic DB ad AC; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit rectangulum sub MX, XR, ad rectangulum sub FX, XL, sicut quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC. Igitur cùm rectangula, sub FH, HL, sub FX, XL, sint æqualia ostensa, & seorsim sumpta æqualia quadrato rectæ AE: simul sumpta erunt dupla quadrato rectæ AE. quod erat concludendum. nam ostendimus rectangulum sub MX, XR, esse ad rectangulum sub FX, XL, sicut quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC.

Demonstratio in casu quo rectæ FL, MR, se mutuò secent in puncto X, in vno angulorum deinceps ad angulum SEV, verbi gratiâ in angulo YES. Assumantur omnia præcedentia quæ attulimus ad primi casus demonstrationem, vsque ad coniunctionem proportionum: erit vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA sic rectangulum sub PX, XN, ad rectangulum sub KX, XH: sed quadrato rectæ DE æquale est per prop. 11. lib. 2. rectangulum sub PM, MN; ergo etiam per 1. axiom. lib. 1. elemen. æquale etiam erit rectangulo sub RN, NM, æquali ipsi sub PM, MN per coroll. nost. 1. ad prop. 10. lib. 2. & quadrato rectæ AE est æquale rectangulum sub LH, HF, per cit. propos. 11. lib. 2. Igitur per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub RN, NM, ad rectangulum sub LH, HF: hoc est totum ad totum; sicut ablatum rectangulum sub PX, XN, ad ablatum rectangulum sub KX, XN: ergo per prop. 19. lib. 5. elem. reliquum ad reliquum erit vt totum rectangulum sub RN, NM, ad totum rectangulum sub LH, HF; vel per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ AE; vel vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC: (cùm sit per prop. 15. lib. 5. elem. vt DE ad AE, sic duplæ, DB ad AC.) Est autem in demonstratione primi casus ostensum quod rectangulum sub RX, XM, sit residuum facta subtractione rectanguli sub PX, XN, de rectangulo sub RN, NM. Igitur erit rectangulum sub RX, XM, ad residuum quo rectangulum sub LH, HF, vel quadratum rectæ AE excedit rectangulum sub KX, XH, erit vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC, quod est retinendum pro conclusione. Sed probandum est rectangulum sub FX, XL, simul cum excessu quo quadratum AE superat rectangulum sub KX, XH, æquale esse duplo quadrati rectæ AE. Ab his auferatur commune, nimirum quadratum rectæ AE, vel illi æquale rectangulum sub FH, HL; relinquetur etiam demonstrandum quod reliquum rectangulum sub KX, XH, simul cum excessu quo quadratum rectæ AE excedit rectangulum sub KX, XH, esse æquale quadrato rectæ AE. Quod hac ratione fiet, certum est per lemma tertium, differentiam minoris à maiore, adiunctam ipsi minori, efficere quantitatem ipsam maiorem; ergo etiam in hoc casu rectangulum residuum sub KX, XH, adiunctum cum excessu maioris videlicet quadrati rectæ AE, vel rectanguli sub FH, HL, supra minus quantum, efficient seu component simul sumpta maius quantum videlicet quadratum rectæ AE, vel rectangulum sub FH, HL, æqualia ostensa per prop. 11. lib. 2. Quod si reperiamus vnam quantitatem determinatam quæ contineat hunc excessum rectanguli sub LH, HF, supra rectangulum sub KX, XH, & simul ipsum rectangulum sub LH, HF; & ipsum rectangulum sub KX, XH: certè continebit bis ipsum rectangulum sub LH, HF; semel quidem manifestè, iterum verò per axio. 3. videlicet eius differentiam à minore detracta, & ipsam detractam minorem: ergo ista quantitas reperta simul cum rectangulo sub

KX,

KX, XH, erit dupla rectanguli sub LH, HF, vel quadrati rectæ AE. Sed per lemma 55. rectangulum sub FX, XL, excedit rectangulum sub FH, HL, rectangulo sub KX, XH: ergo continebit per lem. 3. ipsum rectangulum sub FH, HL, & rectangulum sub KX, XH; igitur si illi addamus prædictum excessum ad quod ostendimus rectangulum sub RX, XM habere eandem rationem quam habet quadratum rectæ diametri DB ad quadratum transuersæ diametri AC: erit rectangulum sub FX, XL; simul cum eo ad quod rectangulum RX, XM, duplum quadrati rectæ AE, seu semissis diametri transuersæ AC. Quod erat in hoc tertio casu concludendum.

PROPOSITIO XXV.

Iisdem positis. Sit linearum ipsis AC, BD, æquidistantium occursus in vna sectionum D, B, atque in puncto X, vt positum est. Dico rectangulum contentum portionibus lineæ, quæ transuersæ diametro æquidistat, videlicet OX, XN, maius esse quàm illud, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro, hoc est RX, XM, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ, duplo quadrati eius quod à dimidia transuersæ diametri constituitur.

Svpponuntur in hac propositione eadem quæ in superiore 24. & est quartus casus propositus in apparatu ad demonstrationem superioris propositionis 24.

Demonstratio. Ex demonstratis in antecedente propositione, est vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, ita rectangulum sub PX, XH, ad rectangulum sub SX, XL; quadratum verò rectæ DE per prop. 11. lib. 2. est æquale rectangulo sub PM, MH; & ex demonstratis in prop. 24. quadratum rectæ EA æquale est rectangulo sub LK, KS: igitur per propoſit. 7. & 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ DE ad quadratum rectæ EA, sic rectangulum sub PM, MH, ad rectangulum sub LK, KS; & vt rectangulum sub PX, XH, ad rectangulum sub SX, XL, sic rectangulum sub PM, MH, ad rectangulum sub LK, KS. Iam verò cùm recta RPHM secet vtrasque asymptotos in H & P, & sectiones oppositas B, D; erunt per propos. 16. lib. 2. rectæ RP, HM, æquales: & quia in producta RM vltra M, habemus punctum X; erit per lemma 12. rectangulum sub PX, XH, maius quàm rectangulum sub PM, MH, rectangulo sub RX, XM; ergo si de rectangulo sub PX, XH, auferatur rectangulum sub PM, MH, relinquetur rectangulum sub RX, XM. & quia recta linea LS, secat Hyperbolam D in K & T, & eius asymptotos in L & S; erunt per prop. 8. lib. 2. rectæ LK, TS, æquales; datur verò punctum X inter K & T; ergo per coroll. nost. ad lemma 15. rectangulum sub LX, XS, maius erit quàm rectangulum sub LK, KS, rectangulo sub TX, XK; igitur si de rectangulo sub LX, XS, auferatur rectangulum LK, KS, relinquetur rectangulum sub TX, XK. Insuper quia recta NO secat duas oppositas sectiones C, A, in punctis N, O, & asymptotos in L & S, etiam per eit. prop. 16. lib. 2. rectæ NL, OS, erunt æquales, quæ additæ ad rectas æquales ostensas LK, TS; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. rectæ NK, OT, æquales: considerando igitur totam rectam NO, quia sunt rectæ NK, OT, æquales, daturque punctum X inter K & T, erit per coroll. nost. ad lem. 15. rectangulum sub OX, XN, æquale duobus simul rectangulis, sub TX, XK, sub OT, TN; ergo si de rectangulo sub OX, XN, dematur rectangulum TX, XK, relinquetur rectangulum sub OT, TN; maiusque erit rectangulum sub OX, XN, quàm rectangulum TX, XK, rectangulo sub OT, TN. His explicatis redeamus ad superiora, quia est vt totum rectangulum sub PX, XH, ad totum rectangulum sub SX, XL, ita ablatum rectangulum sub PM, MH, ad ablatum rectangulum sub LK, KS, vel sub LT, TS, æqualia per prop. 16. lib. 2. coroll. nost. 2. erit per prop. 19. lib. 5. elem. reliquum rectangulum sub RX, XM, ad reliquum rectangulum TX, XK, vt totum rectangulum sub PX, XH, ad totum rectangulum sub SX, XL, vel vt quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EA, vel vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC, per prop. 11. & 15. lib. 5. elem. Itaque demonstrandum est ex datis, quod rectangulum sub OX, XN, sit maius quàm rectangulum sub TX, XK, (ad quod rectangulum sub RX, XM, eandem proportionem habet, quàm quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ AC,) duplo quadrati rectæ AE. Itaque duplum quadrati rectæ AE, simul cum rectangulo sub TX, XK, erit æquale rectangulo sub OX, XN, per 3. lemma; ex his igitur æqualibus si commune auferatur, videlicet rectangulum sub TX, XK; primum ex duobus simul sumptis, dictomet rectangulo, & duplo quadrati rectæ AE; & ex toto rectangulo sub OX, XN, quod fuit ostensum æquale duobus simul rectangulis, sub TX, XK, sub OT, TN; relinquentur æqualia per 3. axiom. lib. 1. elem.

HF, ſeu quadrato rectæ AE; ergo ſi maiori rectangulo ſub KX, XH, addatur differentia ipſa ſeu quadratum rectæ AE; rectangulum ſub LX, XF, minus erit quàm rectangulum ſub KX, XH, ſimul cum quadrato rectæ AE; duplo differentiæ, ſeu duplo quadrati rectæ AE. Igitur rectangulum ſub LX, XF, minus erit quàm illud (hoc eſt quàm rectangulum ſub KX, XH, ſimul cum quadrato rectæ AE, ad quod rectangulum ſub RX, XM, eandem habet rationem quàm quadratum diametri rectæ DB ad quadratum tranſuerſæ AC;) duplo quadrati rectæ AE. Sicuti fuit propoſitum.

PROPOSITIO XXVII.

Si in Ellipſi, vel circuli circumferentia coniugatæ diametri ducantur, quarum altera quidem ſit recta, altera verò tranſuerſa; & ducantur duæ lineæ rectæ diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & ſectioni occurrant. Quadrata ex portionibus lineæ æquidiſtantis tranſuerſæ diametro, quæ inter ſectionem & linearum occurſum interijciuntur, aſſumentia figuras ex portionibus lineæ quæ rectæ diametro æquidiſtat, inter linearum occurſum & ſectionem interiectis, ſimiles & ſimiliter deſcriptas ei, quæ ad rectam diametrum conſtituitur; quadrato diametri tranſuerſæ æqualia erunt.

SVppoſitio. In ellipſi, vel circuli circumferentia ABCD, ſint coniugatæ diametri, AEC, recta, BED tranſuerſa, ſe mutuò ſecantes in E centro: ductaque recta KFLM chorda parallela diametro AEC rectæ; & alia recta NFGH chorda parallela diametro BED tranſuerſæ: iſtæ verò duæ rectæ ductæ ſe mutuò ſecent in puncto F, & diametros in L & G, & occurrant vtrimque ellipſeos vel circuli circumferentiæ. Dico quadrata portionum NF, FH, rectæ NFH parallelæ diametro BD tranſuerſæ, aſſumentia figuras ex portionibus KF, FM, rectæ KFM parallelæ diametro AC rectæ, ſimiles ſimiliterque deſcriptas ei quæ fit ad AC diametrum rectam; quadrato tranſuerſæ diametri BD, eſſe æqualia.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. element. ex puncto N ducatur recta linea NXO parallela ipſi diametro rectæ AEC, quæ per propoſ. 30. lib. 1. elem. erit parallela datæ KM; eruntque per definit. 16. & 17. lib. 1. inter primas ordinatim applicatæ ad diametrum tranſuerſam BD, ab qua bifariàm in X & L diuidentur; & per eaſdem definitiones altera recta NH, erit etiam ordinatim applicata diametro AC rectæ, ab qua bifariàm in G diuidetur; quia dantur diametri AC, BD, coniugatæ. Sed & reſultabunt parallelogrammata diuerſa FX, GX, GL, quorum aduerſa latera NX, FL, GE, erunt æqualia per prop. 34. lib. 1. element. tùm alia duo æqualia NG, XE; tùm alia duo NF, XL æqualia; tùm alia duo FG, LE æqualia. Tùm etiam per lemma 49. ad lib. 1. quadratum rectæ AE, erit æquale rectangulo ſub AE, EC; & quadratum rectæ BE erit æquale rectangulo ſub AE, EC; quia per prop. 30. lib. 1. bifariàm in centro E diuiduntur diametri AC, BD. Denique per coroll. obſt. 4. ad propoſit. 15. lib. 1. ex datis in ellipſi duabus eius diametris coniugatis AC, BD, reperiatur rectum latus BP, reſpectu tranſuerſi BD; & in circulo ponatur ad vnam partem tranſuerſi lateris BD; recta linea BP perpendicularis & æqualis ipſi BD in extremo eius B, per prop. 11. & 3. lib. 1. elem. hæc recta BP erit rectum latus in circulo, per definit. 30. inter ſecundas libri primi.

Demonſtratio. Per definit. 4. lib. 1. inter ſecundas, eſt BP ad AC, ſicut AC ad BD; ergo per coroll. prop. 20. lib. 6. elemen. erit vt BP ad BD, hoc eſt latus rectum ad tranſuerſum, ſic quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD; quadratum autem rectæ BD eſt æquale figuræ quæ ad AC conſtituitur, per prop. 17. lib. 6. elem. quandoquidem per prop. 15. lib. 1. BD eſt media proportionalis inter figuræ latera quæ fit ad AC: igitur per prop. 7. & 11. lib. 5. elem. erit vt PB ad BD, ita quadratum rectæ AC ad figuram quæ ad AC conſtituitur. Ponatur autem ad rectam NX, figura ſimilis ſimiliterque conſtituta, ei quæ ad AC eſt, per prop. 18. lib. 6. elem. erit per prop. 20. eiuſdem lib. 6. elem. figura AC ad figuram NX, in duplicata ratione laterum homologorum; ſunt autem quadrata rectæ AC, & rectæ NX ſimiles figuræ, habentes rationem duplicatam laterum homologorum: igitur erit per prop. 11. lib. 5. element. vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ NX, ſic figura ad AC ad figuram NX ſimilem ſimiliterque conſtitutam ei quæ ad AC: quare per prop. 16. lib. 5. elem. viciſſim erit, vt quadratum rectæ AC ad figuram quæ ad AC, ſic quadratum rectæ NX ad figuram quæ ad NX poſita eſt ſimilis ei quæ ad AC: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt PB ad BD, ſic quadratum rectæ NX ad figuram quæ ad NX poſita eſt ſimilis ei quæ ad AC: eſt verò per prop. 21. lib. 1. vt PB ad BC, ſic quadratum rectæ NX ad rectangulum ſub BX, XD; ergo per prop. 11. lib. 5. elemen. erit vt

quadratum rectæ NX ad figuram quæ ad NX posita est similis ei quæ ad AC, sic quadratum rectæ NX ad rectangulum sub BX, XD. Igitur per prop. 9. lib. 5. elem. figura prædicta quæ ad NX, vel quæ ad FL, (sunt enim ostensæ æquales in apparatu rectæ NX, FL,) similis ei quæ ad AC, erit æqualis rectangulo sub BX, XD. Simili artificio, ex eisdem principijs probabitur figura constituta ad KL similis ei quæ ad AC, rectangulo sub BL, LD, esse æqualis. Et quia recta NH ostensa est in apparatu bifariàm diuisa in G, & non bifariàm diuiditur in F per coroll. nostrum ad prop. 1. lib. 3. elem. erunt per prop. 9. lib. 2. elem. quadrata simul sumpta rectarum HF, FN, dupla quadratorum simul sumptorum rectarum HG, GF, vel NG, GF, (nam ostensæ sunt rectæ HG, NG, æquales.) Ex eisdem principijs citatis, ostendentur quadrata simul sumpta rectarum MF, FK, dupla quadratorum simul sumptorum rectarum XL, LF: & per lemma 16. figuræ quæ fiunt ad MF, FK, similes ei quæ ad AC, duplæ erunt figurarum similium quæ ad KL, LF; figuræ autem quæ fiunt seorsim ad KL, LF, sunt æquales respectiuè rectangulis sub BL, LD, sub BX, XD, ex discursu simili antea facto in alijs supradictis figuris & rectangulis; & quadrata rectarum NG, GF, sunt æqualia quadratis XE, EL, per prop. 16. Procli, ob æquales rectas respectiuè probatas in apparatu: igitur per prop. 7. lib. 5. elem. & per 2. ax. lib. 1. elem. quadrata rectarum NF, FH, simul cum figuris quæ ad KF, FM, similibus ei quæ ad AC, dupla sunt rectangulorum sub BL, LD, & sub BX, XD, & simul quadratorum rectarum XE, EL. Insuper quia recta BD diuisa est bifariàm in E, & non bifariàm in X, per prop. 30. lib. 1. & per coroll. nost. ad prop. 1. lib. 3. elem. erit per prop. 5. lib. 2. elem. rectangulum sub BX, XD, simul cum quadrato rectæ XE, æquale quadrato rectæ BE; eodem modo rectangulum sub BL, LD, simul cum quadrato rectæ LE, æquale est quadrato rectæ BE: ergo per 1. axio. lib. 1. elem. rectangulum sub BX, XD, simul quadrato rectæ XE, erit æquale rectangulo sub BL, LD, simul cum quadrato rectæ LE. Igitur hæc omnia simul sumpta, rectangulum sub BX, XD, quadratum rectæ XE, rectangulum sub BL, LD, quadratum rectæ EL, erunt æqualia duplo quadrati rectæ BE, per 2. axio. lib. 1. elem. nam rectangula illa cum suis proprijs quadratis sunt ostensa æqualia quadrato rectæ BE; igitur si summa fiat illorum rectangulorum duorum & suorum propriorum quadratorum ex vna parte; & ex alia summa fiat duorum quadratorum rectæ BE; illa prior summa erit æqualis duplo quadrati rectæ BE, vel bis dupla quadrati rectæ BE. Ergo cùm ostenderimus quadrata simul sumpta rectarum NF, FH, simul cum figuris quæ ad KF, FM, similibus ei quæ ad AC, esse dupla rectangulorum simul sumptorum sub BL, LD, sub BX, XD, & simul quadratorum rectarum XE, EL; erunt prædicta quadrata simul sumpta rectarum NF, FH, simul cum figuris quæ ad KF, FM, similibus ei quæ ad AC, bis dupla duplò quadrati rectæ BE, hoc est quadrupla quadrati rectæ BE. (quod enim est duplum dupli est quadruplum eiusdem cuius dabatur duplum, vt aduertere est in his numeris 1, 2, 4, si enim 2 est duplum vnitatis, 4 erit duplum ipsius 2 dupli, & propterea quadruplum vnitatis:) Est verò per coroll. nost. ad prop. 20. lib. 6. elem. quadratum rectæ BD quadruplum quadrati rectæ BE: igitur per 6. axiom. lib. 1. elem. quadrata proposita sub NF, FH, simul cum figuris ad KF, FM, similibus ei quæ ad AC; erunt æqualia quadrato transuersæ diametri BD. quod erat concludendum.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in oppositis sectionibus quas coniugatas appellamus, coniugatæ diametri ducantur, ita vt earum altera sit recta, altera transuersa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant. Quadrata ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro, quæ inter linearum occursum & sectiones interijciuntur, ad quadrata ex portionibus alterius lineæ quæ transuersæ diametro æquidistat, inter sectiones & occursum linearum interiectis; eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.

SVppositio. Oppositarum coniugatarum sectionum A, B, C, D, sit centrum E repertum per propos. 45. lib. 2. vel datum; & recta diameter AEC, transuersa BED, se mutuò secantes in E centro: tùm rectæ diametro datæ parallela recta LN; & transuersæ diametro æquidistans recta FK. Porrò istæ duæ parallelæ LN, FK, se mutuò in G puncto secent; & recta LN occurrat in L & N, sectionibus oppositis A, C; & recta FK occurrat in F & K, sectionibus oppositis B, D. Dico quadrata rectarum LG, GN, portionum rectæ lineæ LN parallelæ diametro rectæ AC, esse ad quadrata rectarum FG, GK, portionum rectæ lineæ FK æqui-

æquidistantis diametro transuersæ BD; sicut diametri AC rectæ ad quadratum, ad quadratum diametri transuersæ BD.

Apparatus. Ex puncto L rectæ LN ponatur per prop 31. lib. 1. elem. recta linea LX parallela diametro transuersæ BD, occurret in X, diametro rectæ AC productæ vel non productæ, per prop. 11. Procli, eritque per prop. 30. lib. 1. elem. parallela etiam ipsi FK, & per def. 17. & 16. lib. 1. inter primas ordinatim applicata ad diametrum AC coniugatam ipsi BD. Similiter recta linea FO ex puncto F ducta parallela diametro AC, ex eisdem citatis principijs occurret in O, diametro transuersæ BD, eritque ad illam ordinatim applicata, & parallela rectæ LN. Porrò resultabunt diuersa parallelogramma LH, GE, FM, LE, quorum opposita latera erunt æqualia per prop. 34. lib. 1. elem. videlicet XH, LG; tùm LX, GH, ME; tùm FO, GM, HE. Denique datis duabus rectis hoc ordine BD, AC, quia sunt diametri coniugatæ in sectionibus oppositis, reperiatur per prop. 11. lib. 6. elem. tertia proportionalis BP, erit hæc rectum latus respectu transuersi BD: Cùm enim diameter AC sit ordinatim applicata coniugatæ sibi diametro BD, iuxta defin. 16. & 17. lib. 1. inter primas, mediam proportionem habeat recta AC, inter rectas BD, BP, ipsa BP erit alterum è lateribus figuræ, dato transuerso BD, iuxta defin. 4. lib. 1. inter secundas. Similiter datis hoc ordine duabus rectis AC, BD, reperiendo tertiam proportionalem CI; hæc erit rectum latus transuersi AC.

Demonstratio. Quia est per apparatum vt recta BD ad rectam AC, sic recta AC ad rectam BP; erit inuertendo iuxta coroll. prop. 4. lib. 5 elem. vt recta BP ad rectam AC, sic recta AC ad rectam BD: igitur per coroll. propos. 20. lib. 6. elem. erit vt recta BP ad rectam BD, sic quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD. Et quia per prop. 30. lib. 1. diametri AC, BD, bifariàm diuiduntur in E centro; erit per coroll. nost. ad prop. 20. lib. 6. elem. quadratum rectæ AC quadruplum quadrati rectæ AE; & quadratum rectæ BD, quadruplum quadrati rectæ BE: igitur erit per prop. 15. lib 5. element. vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD, sic quadratum rectæ AE ad quadratum rectæ BE; ostendimus autem esse vt recta BP ad rectam BD, sic quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt recta BP ad rectam BD, sic quadratum rectæ AE ad quadratum rectæ BE. Est autem per prop. 21. lib. 1. vt rectum latus BP ad transuersum BD, sic quadratum rectæ FO ad rectangulum sub BO, OD; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD, vel vt quadratum rectæ AE ad quadratum rectæ BE, sic quadratum rectæ FO ad rectangulum sub BO, OD. Quoniam verò ex apparatu sunt tres lineæ proportionales AC, BD, CI; erit inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt CI ad BD, sic BD ad AC; & per coroll. prop. 20. lib. 6. elem. erit vt recta CI ad rectam AC, sic quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ AC: est autem per prop. 21. lib. 1. vt CI rectum latus ad transuersum AC, sic quadratum rectæ LX ad rectangulum sub CX, XA; & quia ostendimus esse CI ad AC, sicut quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ AC: erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ AC, sic quadratum rectæ LX ad rectangulum sub CX, XA: & per coroll. propos. 4. lib. 5. elem. inuertendo vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD, sic rectangulum sub CX, XA, ad quadratum rectæ LX. Igitur colligendo factas comparationes, erit per propos. 12. lib. 5. sicut vnum, antecedentium ad vnum consequentium, sic omnia antecedentia simul sumpta ad omnia consequentia simul sumpta: hoc est vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD, vnum antecedentium ad vnum consequentium; sic omnia antecedentia simul sumpta, videlicet quadratum rectæ AE, & rectæ FO vel rectæ HE, & rectangulum sub CX, XA; ad omnia consequentia simul sumpta, nimirum quadratum rectæ BE, rectangulum sub BO, OD, & quadratum rectæ LX, vel rectæ ME. Et quia recta AC diuisa est bifariàm in E per prop. 30. lib. 1. eique in directum addita est recta AX; erit per prop. 6. lib. 2. elemen. rectangulum sub CX, XA, simul cum quadrato rectæ AE, æquale quadrato rectæ XE: tum etiam recta BD bifariàm diuisa est in E per cit. propos. 30. lib. 1. eique adiecta recta BO; erit per cit. prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub DO, OB, simul cum quadrato rectæ BE, æquale quadrato rectæ OE. Igitur per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD, sic quadrata simul sumpta rectarum XE, EH, ad quadrata simul sumpta rectarum OE, EM: hoc est quadrata rectarum LM, MG simul sumpta, ad quadrata simul sumpta rectarum FH, HG, propter æquales rectas respectiuè æquales ostensas in apparatu. Sed per prop. 9. lib. 2. elem. quadrata rectarum LM, MG, simul sumpta, sunt subdupla quadratorum simul sumptorum rectarum LG, GN; & per eandem propofit. quadrata simul sumpta rectarum FH, HG, sunt subdupla quadratorum simul sumptorum rectarum FG, GK: igitur erunt per prop. 15. lib. 5. element. quadrata rectarum LG, GN, simul sumpta, ad quadrata rectarum simul sumpta rectarum FG, GK; sicut quadrata simul sumpta rectarum LM, MG, ad quadrata simul sumpta rectarum FH, HG: sed ostendimus quadrata simul sumpta rectarum LM, MG, ad quadrata simul sumpta rectarum FH, HG, esse vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ AB: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. propositum

 erit

erit vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ AB; sic quadrata simul sumpta rectarum LG, GN, ad quadrata simul sumpta rectarum FG, GK.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem positis. Si linea recta diametro æquidistans secet asymptotos: Quadrata ex portionibus ipsius, quæ inter linearum occursum & asymptotos interijciuntur, assumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus lineæ quæ transuersæ diametro æquidistat, inter occursum linearum & asymptotos interiectis; eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transuersæ.

SVppositis iisdem quæ in præcedente propositione, insuper sint asymptoti XE, OE, quas secet recta LMN parallela rectæ diametro AC, in punctis X & O; tunc verò erunt huius recta LN, portiones LX, ON, æquales per prop. 8. lib. 2. Dico autem quod quadrata simul sumpta rectarum XG, GO, portionum rectæ LN, interiectarum inter asymptotos, & G punctum occursus datarum tectarum LN, FK, simul cum dimidio quadrati rectæ AC diametri, habeant ad quadrata simul sumpta rectarum FG GK, portionum adæquatarum totius rectæ FK parallelæ diametro transuersæ BD, eandem proportionem, quam habet quadratum rectæ AC diametri ad quadratum transuersæ BD.

Apparatus. Quia diameter AC bifariàm in E diuiditur per proposit. 30. lib. 1. quadratum totius rectæ AC erit quadruplum quadrati rectæ AE per coroll. nost. ad propofit. 20. lib. 6. elem. Quia verò possumus considerare solam hyperbolam A, cuius sit diameter AEC; & quia recta LN secat duas eius asymptotos in angulo deinceps ad angulum REX continentem dictam hyperbolam, erit per coroll. nostrum 1. ad propos. 11. lib. 2. rectangulum sub LX, XN, æquale quartæ parti quadrati diametri AC, hoc est æquale quadrato rectæ AE. Igitur si probauerimus quod quadrata simul sumpta rectarum LN, FK, simul cum dimidio quadrati rectæ AC, hoc est duplum rectanguli sub LX, XN, (nam duplum quadrati rectæ AE, est dimidium quadrati rectæ AC; vel duplum rectanguli sub LX, XN, est dimidium quadrati rectæ AC quadrupli quadrati rectæ AE, vel rectanguli sub LX, XN;) ad quadrata simul sumpta rectarum FG, GK, habeant eandem proportionem, quam habet quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ AB: demonstrauerimus propositum.

Demonstratio. Quandoquidem in recta LN, sunt æquales rectæ LX, ON; per lemmatis 18. coroll. nost. quadrata rectarum LG, GN, superabunt quadrata rectarum XG, GO, duplo rectanguli sub LX, XN ergo per lemma 3. quadrata rectarum XG, GO, simul cum duplo rectæ AE, vel rectanguli sub LX, XN, æqualia erunt quadratis LG, GN: sed per proposit. præcedent. quadrata rectarum LG, GN, ad quadrata rectarum FG, GH, eandem proportionem habent quàm quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ BD; ergo per 7. & 11. proposit. lib. 5. elem. quadrata rectarum XG, GO, simul cum duplo quadrati rectæ AE, vel rectanguli sub LX, XN, ad quadrata rectarum FG, GK, eandem proportionem habent, quàm quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ AB, sicut fuit propositum.

PROPOSITIO XXX.

Si Hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ sibi ipsis occurrant, & per tactus linea producatur; per occursum verò ducatur linea vni asymptotorum æquidistans, sectionemque & lineam coniungentem tactus secans: Quæ interijcitur inter occursum & lineam tactus coniungentem, à sectione bifariàm diuidetur.

SVppositio. Hyperbolen ABC, duæ rectæ lineæ AD, CD, contingentes sibi ipsis occurrant in D; & puncta contactuum A, C, recta linea AC coniungat: Tùm ex puncto D concursus transmissa sit recta linea DKL, vni FE asymptotorum FE, FG, procedentium ex centro F, parallela, sectionemque hoc est Hyperbolen secans in K, & rectam lineam AC, in L. Dico rectam lineam DKL interiectam inter punctum D occursus, & inter rectam AC nectentem puncta contactuum A, C, bifariàm in K ab linea curua Hyperboles diuidi.

Apparatus. Ex centro F Hyperboles, per punctum D concursus datarum tangentium ipsam, recta linea FD ducatur; quæ diuidet angulum EFG continentem Hyperbolam datam, (eò quòd punctum D sit intra locum ipsius

ipsius anguli iuxta coroll. nost. 1. ad prop. 25. lib. 2.) ideoque producta vltra D, secabit in B lineam curuam Hyperboles, procedetque intra locum eius, per coroll. nostrum 5. ad proposi. 2. lib. 2. quare obuiam rectam lineam AC, secabit in puncto M; eritque diameter Hyperboles per coroll. prop. 50. lib. 1. Igitur per prop. 30. lib. 2. recta AC bifariàm diuidetur in M ab dicta diametro FM, eritque ad ipsam ordinatim applicata iuxta coroll. nostrum 23. ad prop. 49. lib. 2. Tùm producta diametro MF vltra F, sumptaque recta FH æquali ipsi EB, per prop. 3. lib. 1. elem. tota recta HFB, erit diameter transuersa Hyperboles, iuxta defin. 1. inter secundas lib. 1. Insuper ex puncto B per prop. 31. lib. 1. elemen. agatur recta linea BE parallela rectæ AC, hæc per prop 17. lib. 1. continget in B punctō vnico Hyperbolam, & secabit asymptotum FE in E per prop. 3. lib. 2. tùm ex puncto K, ponatur alia recta KN parallela ipsi AC, occurret per prop. 11. Procli diametro HFM in N; eritque ipsa recta KN, ordinatim applicata diametro HFM, per coroll. nostrum 29. ad prop. 49. lib. 2. Portò per prop. 30. lib. 1. elem. rectæ lineæ EB, KN, AC, erunt parallelæ inuicem.

Demonstratio. Quia in rectas parallelas FE, KD, incidit recta FM, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli EFD, KDN, æquales; & quia in rectas parallelas EB, KN, incidit recta FN, erunt per eandem proposit. cit. anguli FBE, DNK, æquales: igitur per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. in triangulis EFB, KDN, reliqui tertij anguli erunt æquales; ideoque ipsa triangula æquiangula; & per 4. prop. lib. 6. element. erit vt DN ad NK, sic FB ad BE; & per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ DN, ad quadratum rectæ NK, sic quadratum rectæ FB ad quadratum rectæ BE: est autem ex demonstratis in prop. 1. lib. 2. vt quadratum rectæ FB ad quadratum rectæ BE, sic linea HB seu latus transuersum, ad eius latus rectum; ergo per proposi. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DN ad quadratum rectæ NK, sic transuersum latus HB ad rectum: Est verò per prop. 21. lib. 1. & coroll. prop. 4. lib. 5. elemen. vt transuersum HB latus ad rectum, sic rectangulum sub HN, NB, ad quadratum rectæ NK; ergo per prop. 11. lib. 5. elemen. erit vt quadratum rectæ DN ad quadratum rectæ NK, sic rectangulum sub HN, NB, ad quadratum rectæ NK: igitur per proposit. 9. lib. 5. elem. quadratum rectæ DN, & rectangulum sub HN, NB, erunt æqualia. Sed est per prop. 37. lib. 1. rectangulum sub MF, FD, æquale quadrato rectæ FB, eò quòd recta AD sectionem contingat, & recta AM sit ordinatim applicata diametro FM: igitur his æqualibus videlicet rectangulo sub MF, FD, & quadrato rectæ FB, addendo illa æqualia vtpote quadratum rectæ DN, & rectangulum sub HN, NB; erit per 2. axio. lib. 1. elem. rectangulum sub HN, NB, simul cum quadrato rectæ FB, æquale rectangulo sub MF, FD, simul cum quadrato rectæ DN. Cùm autem recta HB sit diuisa bifariàm in F per apparatum, eique adiecta sit recta BN; erit per 6. proposi. lib. 2. elem. rectangulum sub HN, NB, simul cum quadrato rectæ FB, æquale quadrato rectæ FN: igitur per 1. axio. lib. 1. elem. rectangulum sub MF, FD, simul cum quadrato rectæ DN, æquale est quadrato rectæ FN: ergo per lemma 19. recta DM bifariàm secta erit in N. Denique quia in triangulo LDM, recta KN parallela est basi LM, erit per 2. prop. lib. 6. elemen. vt DN ad NM, sic DK ad KL; prima autem DN æqualis est ostensa secundæ NM, ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. element. tertia DK erit æqualis quartæ KL: & sic vti propositum fuit, recta DL diuisa erit bifariàm in K.

PROPOSITIO XXXI.

Si oppositas sectiones duæ rectæ contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus linea producatur; per occursum verò ducatur linea asymptoto æquidistans, quæ sectionem & lineam tactus coniungentem secet: Linea inter occursum, & eam quæ tactus coniungit, interiecta, à sectione bifariàm diuidetur.

Suppositio. Oppositas sectiones A, B, duæ rectæ lineæ AC, CB, contingant in A, & B, vna vnam, altera aliam, concurrentes in C puncto, quod erit intra angulum deinceps ad continentes sectiones oppositas, per prop. 32. lib. 2. quod non erit centrum E ipsarum sectionum, neque in vlla asymptotorum propriarum, per coroll. nost. 1. ad cit. prop. Tùm ex puncto C concursus prædicti ducta sit recta linea CGH per prop. 31. lib. 1. elem. parallela asymptoto propriæ EF, quæ per defin. 3. lib. 2. ex centro E procedit; seceturque recta CGH illa, hyperbolam vnam puta A in puncto G, & rectam lineam AB puncta contactuum A, B, reiungentem, in puncto H secet. Dico hanc rectam CGH, bifariàm diuidi in puncto G.

Aduerte ex Eutocio notis suis ad hanc proposit. duos casus obtinere hanc propositionem. Primum quando duæ rectæ lineæ datæ contingentes, vna vnam contingit, altera aliam, vti in

in præsentia supposuimus. Alterum casum, quando ambæ contingunt vnam ex datis oppositis sectionibus. Huncque secundum casum non differre ab demonstratione propositionis præcedentis 30. Sufficiat igitur demonstrare propositionem præsentam in primo casu, cuius suppositionem præmisimus.

Apparatus. Puncta C, E, diuersa ostensa, traijciantur recta linea CE, producaturque vltra centrum E, occurret per axiom. 28. vel 29. lib. 1. elem. rectæ AB in puncto D ex intermedijs illius, quandoquidem resultat triangulum ACB factum ab tangentibus datis AC, BC, concurrentibus in C, & recta AB, vniente puncta A, B contactuum. Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. agatur per centrum E, recta linea KEN parallela ipsi AB. Porrò per prop. 39. lib. 2. bifariàm in D diuidetur recta AB, ab recta CED ducta; & per coroll. nost. ad ipsam prop. cit. 39. recta KEN erit diameter transuersa datarum oppositarum sectionum, & ei coniugata erit recta CED; quare transuersa KEN diameter ex natura sua occurret in K & N sectionibus, productaque intra earum loca procedet si fuerit necesse; igitur secabit in M puncto rectam CGH obuiam. Insuper per cit. prop. 31. lib. 1. elemen. ex puncto G ducatur alia recta GX parallela ipsi AB, occurrens in X rectæ CED iuxta prop. 11. Procli; & alia GL recta parallela ipsi CED diametro rectæ ostensæ, occurrens in L diametro transuersæ NEKM, per cit. prop. 11. Procli; quæque per defin. 16. & 17. lib. 1. inter primas erit ordinatim applicata ad diametrum transuersam NM, in puncto L: quare si ex puncto K recta alia agatur KF, parallela huic GL ordinatim applicatæ diametro NM, continget sectionem A per prop. 17. lib. 1. eruntque per prop. 30. lib. 1. elem. tres rectæ lineæ parallelæ CD, KF, GL; tùm etiam tres aliæ rectæ parallelæ GX, NM, HB. Denique recta KF occurret in F asymptoto EF, per prop. 3. lib. 2. His positis accedamus ad demonstrationem propositionis.

Demonstratio. Quandoquidem sunt parallelæ rectæ linea KF, GL, & in eas incidit recta EKL; erunt per propos. 29. lib. 1. elem. anguli EKF, MLG, æquales: sed & sunt parallelæ rectæ EF, GH, & in eas incidit recta EM, ergo per cit. prop. 29. lib. 1. elem. anguli FEK, GML, erunt æquales: Igitur in triangulis FEK, GML, reliqui tertij anguli æquales erunt per prop. 32. lib. 1. elem. coroll. nost. 3. æquiangula igitur erunt dicta triangula: vnde per prop. 4. lib. 6. elem. erit vt EK ad KF, sic ML ad LG; & per prop. 22. lib. 6. element. vt quadratum rectæ EK ad quadratum rectæ KF, sic quadratum rectæ ML ad quadratum rectæ LG: Sed in propos. præcedente trigesima probauimus, vt quadratum rectæ EK ad quadratum rectæ KF, sic esse rectangulum sub NL, LK, ad quadratum rectæ LG; ergo per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt rectæ ML ad quadratum rectæ LG, sic rectangulum sub NL, LK, ad quadratum rectæ LG: ergo per prop. 9. lib. 5. elem. rectangulum sub NL, LK, erit æquale quadrato rectæ ML. His æqualibus addatur commune quadratum rectæ KE, fient per 2. axiom. lib. 1. elemen. æqualia, ex vna parte rectangulum sub NL, LK, simul cum quadrato rectæ KE; & ex alia duo simul quadrata rectarum ML, KE. Quia verò est per prop. 50. lib. 1. recta KN diuisa bifariàm in E centro, eique addita recta KL; erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum sub NL, LK, simul cum quadrato rectæ KE, æquale quadrato rectæ LE, vel rectæ GX, æqualium inter se in parallelogrammo GE, per propos. 34. lib. 1. elem. igitur per 1. axiom. lib. 1. elem. quadratum rectæ GX, æquale erit duobus simul quadratis rectarum ML, KE. Quoniam autem in triangulis CXG, GLM, sunt parallela latera CX, LG, in quæ incidit recta CGM, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli XCG, LGM, æquales; tùm etiam quia sunt latera GX, ML, parallela, in qua incidit recta CGM, erunt per cit. prop. 29. lib. 1. elem. anguli XGC, LMG, æquales; ideoque per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elemen. reliqui dictorum triangulorum anguli erunt æquales; ideoque ipsa triangula CXG, GLM, æquiangula: quare per 4. propos. lib. 6. elem. & defin. 1. lib. eiusdem 6. erunt similia; sed & sunt similia triangula GLM, FKE, quia æquiangula probata, & per prop. 4. lib. 6. elem. obtinent latera proportionalia circum angulos æquales; ergo per prop. 21. lib. 6. elemen. triangula quatuor prædicta erunt similia. Igitur per lemma 50. lib. 1. erit vt GX ad XC, ita EK ad KF; & vt GX ad EK, sic XC ad KF; tùm vt ML ad LG, sic EK ad KF; tùm vt ML ad EK, sic LG ad KF; tùm vt ML, EK simul, ad EK, sic LG, KF simul, ad KF; tùm vt EK, ad ML, EK simul, ita KF, ad LG, KF simul. Quia verò probauimus vt GX ad EK, sic XC ad KF; & vt EK ad ML, EK simul, sic KF ad LG, KF simul; erit per prop. 22. lib. 5. elemen. ex æqualitate, vt GX ad ML, EK simul, sic XC ad LG, GK simul. ergo iuxta prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ GX, ad quadrata simul sumpta rectarum ML, EK; sic quadratum rectæ XC, ad quadrata sumpta simul, rectarum LG, GK. Sed antea ostendimus quadratum rectæ GX esse æquale duobus simul quadratis rectarum ML, EK, hoc est primam quantitatem esse æquale secundæ, è quatuor postremo comparatis; igitur per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. tertia quantitas erit æqualis quartæ, nimirum quadratum rectæ XC erit æquale duobus simul quadratis rectarum LG, GK: sed per proposit. 16. Procli, quadratum rectæ LG, est æquale quadrato rectæ XE, ob æqualitatem laterum LG, XE ostensam; & quadratum re-

ctæ

ctæ KF æquale eſt quadrato ſecundæ diametri: nam quadratum rectæ KF eſt æquale quartæ parti figuræ quæ fit ad diametrum KN, per prop. 1. lib. 2. demonſtrationem; cumque ſecunda diameter ſit per defin. 4. lib. 1. inter ſecundas, media proportionalis inter figuræ prædictæ latera, erit quadratum eius æquale dictæ figuræ per prop. 17. lib. 6. elem. quarta igitur pars illius quadrati, erit æqualis quartæ parti huius figuræ, per prop. 15. lib. 5. elemen. quarta autem pars illius quadrati eſt iuxta coroll. noſt. ad prop. 20. lib. 6. elem. eſt quadratum ſemiſſis illius diametri ſecundæ ſeu rectæ; rectangulumque ſub CE, ED, eſt per propoſ. 38. lib. 2. æquale quadrato dimidiæ dictæ diametri ſecundæ: Igitur per 1. axiom. lib. 1. element. quadratum rectæ KF erit æquale rectangulo ſub CE, ED. Ergo à primo ad vltimum, quadratum rectæ XC erit æquale quadrato rectæ XE, & ſimul rectangulo ſub CE, ED: per idem cit. 1. axiom. lib. 1. elem. quare per lemma 20. recta linea CD in æquales partes ſecta erit in puncto X. Verùm per apparatum recta GX eſt parallela rectæ DH in triangulo CDH, ergo per prop. 2. lib. 6. elem. ſecabuntur proportionaliter latera ab recta GX; probauimus autem latus CD eſſe ſectum in X in partes æquales ab recta GX; ergo etiam bifariàm in G puncto lineæ curuæ Hyperboles A, ſectum erit latus CH ab recta XG; quare vti propoſitum fuit recta CH parallela aſymptoto EF, diuidetur bifariàm in G ab puncto G lineæ curuæ Hyperboles A.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Eiſdem datis, & paratis Quadratum rectæ KF contingentis ſectionem A, in K, parallelæ diametro rectæ DEC, & occurrentis in F, aſymptoto EF; æquale eſt rectangulo ſub DE, EC, partibus diametri ſecundæ inter centrum E, & punctum C concurſus tangentium, & D punctum lineæ AB vnientis puncta contactuum A, B.

HOc demonſtratum eſt ſub finem huius demonſtrationis allatæ.

PROPOSITIO XXXII.

Si Hyperbolen duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant, & per tactus linea producatur; per occurſum verò contingentium ducatur linea, tactus coniungenti æquidiſtans; & per punctum quod coniungentem tactus bifariàm ſecat, ducatur linea æquidiſtans alteri aſymptotorum: Quæ inter dictum punctum & lineam æquidiſtantem interijcitur, à ſectione bifariàm diuidetur.

AB

SVppoſitio. Hyperbolen F, C contingant duæ rectæ lineæ AF, C in punctis A & C, ſibi ipſis occurrentes in F; ductaque linea AC recta vniens prædicta puncta contactuum. Ductaque ſit DF recta per centrum D & per punctum F concurſus datarum tangentium quod infra centrum D erit in angulo continenti ipſam Hyperbolen, per coroll. noſt. 1. ad propoſ. 25. lib. 2. hæc recta DF erit diameter tranſuerſa per coroll. prop. 50. lib. 1. Ideoque producta ſecabit lineam curuam Hyperboles in B, & incedet intra locum Hyperboles per coroll. noſt. 5. ad prop. 2. lib. 2. quare obuiam rectam AC ſecabit in H bifariàm per prop. 30. lib. 2. eritque per coroll. noſt. 23. ad prop. 49. lib. 2. ipſa AHC ordinatim applicata dictæ diametro DFBH; Dataque ſit aſymptotus DE procedens ex natura ſua ex centro D ipſius Hyperboles: & ex puncto B educatur recta linea BE parallela ipſi AC per prop. 31. lib. 1. elem. hæc per prop. 7. lib. 1. continget hyperbolen in B, quia parallela eſt ordinatim applicatæ AC ad diametrum DBH tùm occurret in E dictæ aſymptoto DE, per 3. prop. lib. 2. Sed & ex puncto F concurſus prædicti ponatur etiam recta linea FK parallela ipſi AC; & ex puncto H medio rectæ AC, ponatur alia recta linea HLK parallela aſymptoto DE, verſus verticem Hyperboles quam ſecabit in L puncto per ax. 28. lib. 1. elem. productaque vltra L procedet extra hyperbolam; & quia ei parallelam DE aſymptotum ſecat recta linea BE contingens, ſecabit etiam producta vltra B, iſtam HL productam, per prop. 11. Procli: & quoniam ſunt rectæ BE, FK, poſitæ parallelæ ipſi rectæ AC, erunt etiam ſibi inuicem parallelæ per prop. 30. lib. 1. elem. ſed modò probauimus vnam EB productam ſecari ab producta HL, ergo etiam altera FK ſecabitur in K ab recta HLK, per cit. propoſit. 11. Procli. Dico autem rectam iſtam HK, quæ interijcitur inter punctum medium H rectæ lineæ AC nectentis puncta contactuum, & inter æquidiſtantem FK prædictam, diuidi bifariàm in L ab linea curua Hyperboles.

Apparatus. Ex puncto L lineæ curuæ hyperboles agatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea LM parallela ipſi rectæ AC, occurret in M puncto diametri DBH, per prop. 11. Procli, & per coroll. noſt. 29. ad prop. 49. lib. 2. erit ordinatim applicata diametro DBH: eruntque per prop. 30. lib. 1. elem. quatuor lineæ parallelæ inuicem FK, EB, LM, AC, quia parallelæ eidem AC; eruntque per coroll.

propoſ. 4. lib. 6. element. duo triangula KFH, LMH, ſimilia. Et quoniam ſunt parallelæ DE, HK, in eaſque incidit recta DH; erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli BDE, FHK, æquales: ſimiliter quia ſunt parallelæ rectæ EB, FK, in eaſque incidit eadem recta DH; erunt per eandem prop. 29. lib. 1. elem. anguli DBE, HFK, æquales: igitur per coroll. noſt. 3. ad prop 32. lib. 1. elem. reliqui tertij anguli triangulorum DBE, HFK, erunt æquales; ideoque ipſa triangula æquiangula, & per prop. 4. & defin. 1. lib. 6. elem. ſimilia; cumque ſint oſtenſa ſimilia triangula LMH, KFH; erunt per prop. 21. lib. 6. elem. tria triangula ſimilia DBE, HFK, HML. Denique producta recta BD vltra D centrum hyperboles, ſumatur recta DG æqualis ipſi DB; erit tota GDB, diameter tranſuerſa datæ hyperboles, iuxta def. 1. lib. 1. inter ſecundas.

Demonſtratio. Quia ex apparatu ſunt triangula DBE, HML, ſimilia; erit per lemma 49. lib. 1. vt BD ad BE, ſic HM ad ML; quare per prop. 22. lib. 6. elemen. erit vt quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ BE, ſic quadratum rectæ HM ad quadratum rectæ ML: eſt verò ex demonſtratis in prop. 1. lib. 2. quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ BE, ſicut latus tranſuerſum GB ad eius rectum latus: ergo per prop. 11. lib. 5. elemen. erit vt tranſuerſum GB latus ad rectum, ſic quadratum rectæ HM ad quadratum rectæ ML: & eſt per prop. 21. lib. 1. & coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt tranſuerſum latus GB ad rectum, ſic rectangulum ſub GM, MB ad quadratum rectæ LM; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ BE, vel vt quadratum rectæ HM ad quadratum rectæ ML, ſic rectangulum ſub GM, MB, ad quadratum rectæ LM: igitur per prop. 9. lib. 5. elem. rectangulum ſub GM, MB, erit æquale quadrato rectæ HM. Eſt autem per prop. 37. lib. 1. rectangulum ſub HD, DF, æquale quadrato rectæ DB; eò quòd recta AF contingat ſectionem in A, & recta AH ſit ordinatim applicata diametro GDBH. Cumque recta GB biſariàm diuiſa ſit in D, eique adiecta recta BM; erit per prop. 6. lib. 2. elem. rectangulum ſub GM, MB, ſimul cum quadrato rectæ DB, æquale quadrato rectæ DM: ſed & probauimus rectangulum ſub GM, MB, æquale eſſe quadrato rectæ HM; & rectangulum ſub HD, DF, eſſe æquale quadrato rectæ DB; & quadratum rectæ DM eſſe æquale rectangulo ſub GM, MB, ſimul cum quadrato rectæ DB: erit per 1. axiom. lib. 1. elem. quadratum rectæ DM, æquale rectangulo ſub HD, DF, ſimul cum quadrato rectæ HM. Igitur per lemma 29. recta linea FH ſecta erit biſariàm in M. Denique cùm in triangulo FHK, ſit recta LM parallela baſi FK, diuidet recta LM, proportionaliter latera FH, HK; per propoſ. 2. lib. 6. elem. oſtendimus autem diuiſum eſſe latus FH biſariàm in M; ergo alterum HK, erit etiam diuiſum biſariàm in puncto L. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant, & per tactus linea extendatur; per occurſum verò contingentium ducatur linea tactus coniungenti æquidiſtans; & per punctum quod coniungentem tactus biſariàm ſecat, ducatur linea æquidiſtans alteri aſymptoto, conueniensque cum ſectione & cum linea æquidiſtante per occurſum ducta: Quæ inter dictum punctum & lineam æquidiſtantem interijcitur, à ſectione biſariàm diuidetur.

HÆc propoſitio duos caſus habet. Aut enim duæ datæ rectæ lineæ contingentes & in vnum conuenientes punctum, contingunt vnam ſolam ſectionem è duabus datis oppoſitis: Aut vna recta continget vnam ſectionem, & altera aliam. Si primum eſt caſus præcedentis propoſitionis 32. Si ſecundum accipe ſuppoſitionem, apparatum, & demonſtrationem.

Suppoſitio. Sectionem ABC contingat recta AG in puncto A; & ſectionem oppoſitam DEF, contingat alia recta DG in puncto D; conueniantque hæ duæ rectæ lineæ AG, DG, in puncto G: tùm recta linea AD vniat prædicta A, D, puncta contactuum: Sitque centrum H ſectionum datarum, & recta HK aſymptotus earum altera. Certum eſt punctum G concurſus eſſe in angulo deinceps ad angulos continentes datas ſectiones, per propoſ. 32. lib. 2. quodque erit diuerſum ab centro H, & non erit in ipſis aſymptotis, per coroll. noſt. 1. ad eit. propoſ. 32. lib. 2. Præterea per punctum G concurſus prædicti ducatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea CGF parallela ipſi AD nectenti puncta contactuum, quæ conueniet in C cum ſectione ABC, & in F cum ſectione oppoſita DFE; nam cùm in infinitum producantur Hyperbolicæ lineæ curuæ iuxta propoſ. 8. lib. 1. diuaricatis extremis earum in infinitum, prædicta recta linea CGF, ipſis occurret in punctis C & F aſſignatis. Diuiſa porrò recta linea AD biſariàm in L per prop. 10. lib. 1. elem. ponatur per prop. 31. lib. eiuſdem.

ex

ex puncto L tecta linea LN parallelă asymptoto HK assumptæ, conueniens cum sectione ABC in puncto M, & cum recta FGC in puncto N, producendo ipsas si opus sit vltra M & C. Dico rectam LMN, sitam inter punctum L medium rectæ AD coniugantis puncta contactuum, & rectam NCGF æquidistantem ipsi ALD, bifariàm in puncto M lineæ curuæ sectionis ABC, diuidi.

Apparatus. Per centrum H agatur iuxta prop. 31. lib. 1. elem. tecta linea BHE, parallela ipsi AD, quæ etiam erit per prop. 30. lib. eiusdem parallela alteri NCGF, occurretque in E & B. datis sectionibus intermedijs; eritque per coroll. propos. 51. diameter transuersa datarum sectionum; productaque vltra B, incedet intra locum sectionis ABC, per coroll. nostra 7. & 5. ad prop. 2. lib. 2. Ducantur autem duæ rectæ GH, LH; ipsæ erunt in directum, vnamque rectam LHG constituent per coroll. nost. 2. ad prop. 39. lib. 2. erunt duæ rectæ lineæ LHG, EHB, diametri coniugatæ datarum sectionum. per prop. 38. lib. 2. LHG quidem recta, EHB verò transuersa. Quod si ex punctis A & D, concipiamus rectas lineas parallelas ipsi diametro LEG rectæ & coniugatæ diametro EHB transuersæ, illæ erunt ordinatim applicatæ ad diametrum EHB; per defin. 16. & 17. lib. 1. inter primas; eruntque inter se parallelæ per prop. 30. lib. 1. element. Ergo si ex puncto E sectionis DEF, ponatur per prop. 31. lib. 1. elem. recta linea EK æquidistans ordinatim applicatæ diametro EHB, in sectione DEF. hæc recta EK sectionem ipsam continget per prop. 17. lib. 1. & occurret in K asymptoto HK per prop. 3. lib. 2. eritque per prop. 30. lib. 1. elem. parallela diametro rectæ LHG. Quod si etiam ex puncto M ponatur recta MX parallela ipsi diametro rectæ LHG, occurret in X, diametro transuersæ EHB productæ infra B, per prop. 11. Procli, eritque per defin. 16. & 17. lib. 1. inter primas ordinatim applicata diametro transuersæ; & per prop. 30. lib. 1. elem. erit parallela etiam rectæ EK. Denique ex puncto M ponatur recta MP æquidistans transuersæ diametro EHB, occurret per prop. 11. Procli, in P diametro LHG rectæ; eruntque per prop. 30. lib. 1. elem. rectæ lineæ quatuor AD, EHB, MP, CF, parallelæ. Sed & resultabit parallelogrammum HPMX, cuius duo latera opposita HX, PM, sunt æqualia per propos. 34. lib. 1. elem. & eorum quadrata æqualia per prop. 16. Procli. Verùm triangula KEH, LPM, probanda sunt similia, hac ratione: quia sunt parallelæ rectæ KE, LH, & in eas incidit recta EHX, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli KEH, LHX, æquales; & propter eandem prop. quia in rectas parallelas HX, PM, incidit recta LHP; erunt anguli LHX, LPM, æquales; quare per 1. axiom. lib. 1. elem. anguli KEH, LPM erunt æquales: quoniam verò sunt parallelæ rectæ EK, LH, in quas incidit recta KH, erunt anguli EKH, LHK æquales per ipsam prop. 29. lib. 1. element. Denique quia sunt rectæ KH, LM, parallelæ, in easque incidit recta LH, erunt per eandem prop. 29. lib. 1. elem. anguli LHK, PLM æquales; igitur per 1. axio. lib. 1. elem. anguli EKH, PLM, æquales: quare per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui tertij anguli dictorum triangulorum erunt æquales: ideoque per 4. prop. & defin. 1. lib. 6. elem. dicta triangula KEH, LPM, erunt similia. Denique aduertendum est ex prop. 30 lib. 1. rectam EHB bifariàm in H centro diuidi; ideoque per prop. 16. Procli quadrata rectarum EH, BH erunt æqualia.

Demonstratio. Per lem. 50. ad lib. 1. in triangulis KEH, LPM, erit vt HE ad EK, sic MP ad PL; ergo per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ HE ad quadratum rectæ EK, sic quadratum rectæ MP ad quadratum rectæ PL; est verò ex demonstratis in prop. 1. lib. 2. vt quadratum rectæ HE ad quadratum rectæ EK, sic transuersum latus EHB ad eius rectum latus; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ MP ad quadratum rectæ PL, sic transuersum EHB latus ad rectum: est autem per prop. 21. lib. 1. & per coroll. propos. 4. lib. 5. elem. vt transuersum latus EHB ad rectum, sic rectangulum sub EX, XB, ad quadratum rectæ MX: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ HE ad quadratum rectæ EK, sic rectangulum sub EX, XB, ad quadratum rectæ MX: quare per prop. 12. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ HE ad quadratum rectæ EK, sic quadratum rectæ HE simul cum rectangulo sub EX, XB, ad quadrata simul rectarum EK, MX. Sed rectangulum sub EX, XB, simul cum quadrato rectæ HE, æquale quadrato rectæ HX per propos. 6. lib. 2. elem. (ob rectam EHB sectam bifariàm in H, eique adiectam rectam BX.) est verò probatum quadratum rectæ PM æquale quadrato rectæ HX: Tùm quadratum rectæ KE est per coroll. nost. ad prop. 3 r. æquale rectangulo sub GH, HL: & quadratum rectæ XM æquale quadrato PH ostensum, igitur per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ HE ad quadratum rectæ EK, sic quadratum rectæ XH, vel rectæ MP, ad rectangulum sub GH, HL, simul cum quadrato rectæ HP. Et quia ostendimus initiò esse vt quadratum rectæ HE ad quadratum rectæ EK, sic quadratum rectæ MP ad quadratum rectæ PL; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ MP ad quadratum rectæ PL, sic quadratum rectæ MP ad rectangulum sub GH, HL simul cum quadrato rectæ HP: quare per prop. 9. lib. 5. elemen. quadratum rectæ LP erit æquale rectangulo sub GH, HL, simul cum quadrato rectæ HP: igitur per lemma 20. recta LG diuisa erit bifariàm in P. Denique quia in triangulo GLN, recta PM est parallela basi

basi GN, recta PM diuidet proportionaliter latera LG, LN, ostendimus autem diuisum esse latus LG in P æqualiter; ergo etiam diuidetur in M, æqualiter latus LN; hoc est bifariàm. Sicuti fuit propositum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Eisdem positis. Recta linea MP ducta ex puncto M rectæ LMN, parallela rectæ AD vnienti puncta contactuum A, D, diuidet bifariàm in P, rectam LHG.

Hoc in fine demonstrationis allatæ conclusum est, ante demonstrationem propositi in hac præsenti 33. propositione.

PROPOSITIO XXXIV.

Si in vna asymptoto Hyperbolæ aliquod punctum sumatur; ab eoque recta linea sectionem contingat, & per tactum ducatur æquidistans asymptoto: Quæ per dictum punctum transit, alteri asymptotorum æquidistans; à sectione bifariàm diuidetur.

Sppositio. Ex centro D, Hyperboles AB, defluant eius asymptoti duæ DC, DE; & recta CBE contingat sectionem in puncto B, proueniens ex puncto sumpto C in asymptoto DC, alteri asymptoto DE occurret in E, & bifariàm in B secabitur per 3. propos. lib. 2. & ex puncto dicto B sit recta GBF parallela asymptoto dictæ DC, quæ tota sectionem procedet partim, partim verò extra, occurretque in F alteri asymptoto DE, per propofit. 11. Procli, sectionemque secabit in vnico tantùm puncto B per coroll. nost. 8. ad prop. 13. lib. 2. Insuper ex puncto assumpto C sit alia recta CAG parallela alteri DE asymptoto; hæc secare debet hyperbolam in vno tantum puncto per coroll. nost. cit. 8. prop. 13. lib. 2. igitur non transibit per B seu eam non secabit in puncto B, coincideret enim cum portione tangentis datæ CB, & sic ipsam tangeret sectionem, & alteram asymptotum secaret vt CBE; primũ est contra cor. nost. 8. cit. alterũ destruit datum, ergo secabit sectionem in alio puncto A infra B ad partes C, non autem E, alioqui intersecaret intermediam rectam CBE, & sic duæ rectæ lineę spatium clauderent contra 14. axio. lib. 1. elem. sed & hæc recta CAG secabit in G rectam FBG, per prop. 11. Procli, intra locum ipsius Hyperboles intra quem ostensa est ipsa recta FBG procedere ab B puncto sectionis ad partes contrarias vertici. Dico autem rectam CAG bifariàm diuidi in A in puncto sectionis prædicto.

Apparatus. Duo puncta A & B, lineæ curuæ hyperboles datæ vniantur recta AB, hæc erit intra sectionem per prop. 10. lib. 1. & occurret producta vtrimque asymptotis DC, DE, illi in puncto H, huic in puncto K, per prop. 8. lib. 2. eruntque per hanc eandem proposit. rectæ AH, BK, æquales. Cumque in triangulis CAH, GAB, sint per prop. 15. lib. 1. anguli in A vertice æquales; tùm æquales anguli ACH, AGB, per prop. 29. lib. 1. elem. ob incidentiam rectæ CAG in parallelas CH, BG; erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui tertij eorum anguli æquales; ideoque per prop. 4. & defin. 1. lib. 6. elemen. ipsa triangula similia. Sed etiam quia in triangulis ABC, KBE, anguli ad verticem B sunt æquales per propos. 15. lib. 1. elemen. & anguli CAB, EKB, sunt æquales per prop. 29. lib. eiusdem, incidente recta ABK in parallelas CA, KE; erunt etiam eorum reliqui tertij anguli æquales per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. element. vnde dicta triangula erunt per prop. 4. & def. 1. lib. 6. elem. similia.

Demonstratio. Cùm sint similia triangula CBA, EBK, erit per lem. 50. lib. 1. vt CB ad BA, sic EB ad BK; & sic in suppositione probatæ æquales rectæ CB prima & EB tertia: erit per prop. 14. lib. 5. elemen. secunda BA æqualis quartæ BK: BK autem in apparatu est probata æqualis rectæ HA; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. rectæ BA, AH, erunt æquales, diuisaque bifariàm in A, recta HB. Præterea quia probata sunt triangula HAC, BAG, similia; erit per lemma 50. ad lib. 1. vt HA ad AC, sic BA ad AG; prima HA & tertia AB sunt ostensæ æquales, ergo secunda AC erit æqualis quartæ AG, per cit. prop. 14. lib. 5. elem. quare tota CAG diuisa erit bifariam in A, sicuti fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM. I.

Eisdem datis. Si puncta A, B, vniantur recta linea: recta linea transmissa per illa puncta, & producta vtrimque conueniens cum asymptotis DC, DE, in punctis H & K, diuidetur in tres partes æquales HA, AB, BK.

Probauimus enim portionem BK esse æqualem BA, & ipsi BA aliam portionem tertiam AH; vnde per 1. ax. lib. 1. elem. intulimus esse tres portiones æquales HA, AB, BK, totius rectæ HK.

COROL-

COROLL. NOSTRVM II.

Eisdem positis. Recta FG parallela asymptoto vni DC, transmissa per punctum B contactus rectæ lineæ CBE, & terminata in G puncto alterius rectæ CAG parallelæ alteri asymptoto DE, deducta ex eodem puncto B; bifariàm diuiditur in puncto B.

NAm per prop. 29. lib. 1. elem. quandoquidem recta ABK incidit in parallelas FK, AG, erunt anguli AGB, KFB æquales; sunt verò anguli ad verticem B recti per prop. 15. lib. 1. elem. ergo per coroll. nost. 3. ad propos. 32. eiusdem lib. 1. elem. reliqui tertij anguli triangulorum ABG, KBF, erunt æquales, ipsaque triangula æquiangula. Igitur per propos. 4. lib. 6. elem. erit AB ad AG, sicut KB ad BF; prima AB & tertia KB sunt æquales ostensæ in demonstratione huius propositionis 34. ergo per prop. 14. lib. 5. element. secunda AG erit æqualis quartæ BF. igitur tota recta FBG bifariàm diuiditur in puncto B, sicuti fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM III.

Eisdem positis. Triangula resultantia CAH, GAB, sunt æqualia; tum alia triangula HCB, GBC, æqualia.

CVm enim in triangulis CAH, GAB, sint anguli ad verticem A æquales per prop. 15. lib. 1. element. latusque CA æquale lateri GA, per hanc propositionem; tùm latus AH æquale lateri AB ostensum in demonstratione eiusdem proposit. manifestum per prop. 4. lib. 1. element. esse totum triangulum CAH, toti triangulo GAB æquale, sicuti fuit primò propositum; & per eandem prop. 4. cit. reliqua latera CH, BG erunt æqualia. His verò æqualibus triangulis probatis si addatur commune triangulum CAB, fient per 2. axioma libri 1. elementorum tota triangula HCB, GBC, æqualia, quomodo fuit secundo loco propositum.

COROLL. NOSTRVM IV.

Eisdem positis. Si puncta H, G, coniunctantur recta linea HG; Parallelogrammum erit BCHG.

SVnt enim per constructionem seu suppositionem, latera HC, GB, parallela, & æqualia probata in demonstratione corollarij 3. præcedentis: ergo per propositio. 33. lib. 1. elementorum rectæ lineæ CB, HG, erunt æquales & parallelæ, ideoque parallelogrammum BCHG.

COROLL. NOSTRVM V.

Eisdem positis. Triangula resultantia tria FBK, GBA, CHA, sunt æqualia; tum alia tria æqualia EBK, CBA, HAG. tum alia FBE, CBG, CHG, HCB; HGB quinque æqualia: si ducatur recta linea HG.

PEr hanc propositionem recta CG diuisa est bifariàm in A; ergo cùm triangula FBK, GBA, sint ostensa æquiangula in apparatu ad demonstrationem propositionis, erit per 4. prop. lib. 6. elem. vt BK ad KF, sic BA ad AG; prima verò BK & tertia BA sunt æquales per coroll. nostrum 1. ergo per propos. 14. lib. 2. element. secunda KF erit æqualis quartæ AG; sed & per coroll. nost. 2. recta FB est æqualis ipsi BG: ergo cum triangula FBK, GBA, habeant tria latera respectiuè æqualia, erunt per coroll. ad propos. 8. lib. 1. elem. æqualia inter se: ostendimus autem in coroll. 3. triangula CAH, GBA esse æqualia; ergo per 1. axiom. lib. 1. elemen. tria triangula FBK, GBA, CHA, erunt æqualia inter se, sicuti primùm proposuimus. Præterea, quia in triangulis EBK, CBA, anguli ad verticem B sunt æquales per prop. 15. lib. 1. elemen. comprehensi ab lateribus æqualibus respectiuè, EB, CB. per 3. prop. lib. 2. KB, AB, per coroll. 1. erunt per 4. propos. lib. 1. elem. ipsa triangula EBK, CBA, æqualia: Quoniam verò parallelogrammum est BCHG per coroll. 4. illud bifariàm diuidet diagonalis CG in duo triangula æqualia CBG, CHG, per prop. 34. lib. 1. elem. ex quibus æqualibus si triangula CAH, GAB, auferantur, æqualia per coroll. 3. relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. æqualia triangula CBA, HAG; igitur per 1. axio lib. 1. elem. tria triangula EBK, CBA, HAG, erunt æqualia, sicuti fuit secundò propositum. Denique quia in triangulis FBE, CBG, sunt anguli ad verticem B æquales per prop. 15. lib. 1. elem. comprehensi ab lateribus respectiuè æqualibus FB, BG, per coroll. 2. tùm EB, CB, per propos. 3. lib. 2. erunt dicta triangula æqualia per prop. 4. lib. 1. element. & quia triangulum CHG est æquale triangulo CBG in parallelogrammo BCHG, per prop. 34. lib. 1. elem. vtpote dimidia totius parallelogrammi, cuius etiam sunt dimidia triangula HCB, HGB, per eandem proposit. cit. 34. & omnia dimidia eiusdem sunt inter se æqualia per 7. axio. lib. 1. element. erunt per 1. axiom. libri eiusdem, proposita quinque triangula FBE, CBG, CHG, HCB, HGB, inter se æqualia.

PROPOSITIO XXXV.

Iisdem positis. Si à sumpto puncto recta linea ducatur, sectionem in duobus punctis secans: erit vt tota ad eam quæ extra sumitur, sic inter sese portiones illius quæ intra sectionem continetur.

SVppositio. Hyperboles AB; sit centrum D, & duæ asymptoti DC, DE. Sumptumque C punctum in asymptoto DC, ex quo ducta sit recta CAGH secans ipsam hyperbolen in duobus punctis A & G, hæc per propos. 8. lib. 2. occurret in H puncto alterius asymptoti DE. Sit verò vt in antecedente propositione, recta linea CBE contingens in B Hyperbolen datam deducta ab C puncto prædicto assumpto; hæc recta CBE, per propos. 3. lib. 2. occurret alteri asymptoto DE in E, & bifariàm diuiderur in puncto B. Denique per punctum B contactus procedat recta KBF parallela asymptoto DC, hæc secabitur in K ab asymptoto DE per prop. 11. Procli, & solùm in vno puncto B secabit lineam curuam sectionis, procedetque intra ipsam, per coroll. nost. 8. ad prop. 13. lib. 2. quare obuiam rectam AG secabit in puncto aliquo F. Dico esse vt tota recta CAG, ad CA portionem eius externam, sic GF ad FA, hoc est portiones eiusdem sitæ intra sectionem, ad se inuicem.

Apparatus. Duo puncta A, B, lineæ curuæ Hyperboles iungantur recta linea AB, hæc tota erit intra sectionem per prop. 10. lib. 1. & producta vtrimque semper procedet extra sectionem, ex eadem prop. 10. cit. secabitque asymptotos in L & M, eruntque huius rectæ portiones AL, BM, æquales, per propos. 8. lib. 2. Præterea ex puncto E agatur per prop. 31. lib. 1. elementor. recta linea EN æquidistans ipsi HGAC; occurret in N rectæ LABM, per prop. 11. Procli, & quidem intra triangulum CDH, quandoquidem per lemma 31. debet occurrere vni puncto ex intermedijs lateris CD; quare occurret in N intermediæ rectæ AM. Quoniam verò in rectas parallelas EN, CF, incidit recta CBE, erit per prop. 29. lib. 1. elem. angulus NEB æqualis angulo ACB; sunt autem anguli ACB, NBE ad verticem B æquales per prop. 15. lib. 1. elem. igitur in triangulis ABC, NBE, reliqui tertij anguli æquales erunt per prop. 32. lib. 1. elem. coroll. nost. 5. ideoque dicta triangula æquiangula. Denique quia recta CAF incidit in rectas parallelas CL, FB, erunt anguli ACL, AFB æquales per prop. 29. lib. 1. elem. sed & per propos. 15. lib. 1. elem. anguli in A vertice sunt æquales; ergo per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui tertij anguli triangulorum CAL, FAB, erunt æquales; ideoque ipsa triangula æquiangula.

Demonstratio. Quia triangula ABC, NBE, sunt æquiangula per apparatum, erit per prop. 4. lib. 6. elem. vt BC ad CA, sic BE ad EN; prima BC, est æqualis tertiæ BE ex dictis in suppositione: ergo per prop. 14. lib. 5. elemen. secunda CA erit æqualis quartæ EN. Sed etiam per cit. prop. 4. lib. 6. element. est CB ad BA, sicut EB ad BN; prima CB æqualis est ostensa tertiæ EB; ergo per cit. prop. 14. lib. 5. elem. secunda BA erit æqualis quartæ BN. Verùm ex apparatu rectæ LA, BM, sunt æquales; quibus si addatur communis recta AB, fient per axiom. 2. lib. 1. elem. æquales rectæ AM, LB. igitur NM est excessus rectæ LA supra rectam AB, sicuti NM est excessus rectæ BM supra ipsam BN, per lemma 2. Quoniam verò in triangulo AMH, ducta est recta EN parallela lateri HA; erunt per coroll. propos. 4. lib. 6. elem. duo triangula AMH, NME similia; ideoque per lem. 50. lib. 1. erit vt AM ad AH, sic NM ad NE; & vt AM ad NM, sic AH ad NE; ostendimus autem ipsi NE esse æqualem CA; ergo per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. erit AM ad NM, sic AH ad AC: hoc est vt AH ad AC, sic AM ad NM excessum lineæ rectæ BM supra rectam AB; vel sic LB ad NM excessum rectæ LA supra rectam AB. Quia verò per prop. 8. lib. 2. & coroll. nost. ad illam, sunt rectæ HA, CG, æquales, rũm CA, GH, æquales; erit per coroll. nost. ad prop. 7. lib. 5. elem. vt HA ad AC, sic GC ad CA: ostendimus autem esse vt AH ad AC, sic AM vel LB ad NM excessum rectæ LA supra rectam AB; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt GC ad CA, sic LB ad NM excessum rectæ LA supra rectam AB. Cùm autem triangula CAL, FAB, sint ostensa in apparatu æqui angula; erit per lemma 50. lib. 1. vt LA ad AC, sic BA ad AF; & vt LA ad AB, sic CA ad AF; & diuidendo per prop. 17. lib. 5. elem. vt excessus quo LA excedit AB, ad ipsam AB, ita excessus quo CA excedit AF ad ipsam AF; & in vertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt AB ad excessum quo LA excedit AB, sic AF ad excessum quo excedit CA ipsam AF. Præterea quia probauimus esse LA ad AB, vt CA ad AF; erit componendo per propos. 18. lib. 5. elem. vt LAB ad AB, ita CAF ad AF; ostendimus autem esse AB ad excessum quo LA excedit AB, vt AF ad excessum quo CA excedit AF; erit ex æqualitate iuxta prop. 22. lib. 5. element. vt LAB ad excessum linearum LA, AB, sic CAF ad excessum linearum CA, AF. Denique quia probauimus esse LAB seu LB ad excessum linearum LA, AB, sicut est CAF vel CF ad excessum linearum CA, AF; & ostendimus esse GC ad CA, sicut LAB vel LB ad excessum linearum LA, AB; erit per prop.

prop. 11. lib. 5. elem. vt GC ad CA, sic CF ad excessum linearum CA, AF. Quod si concipiamus vt tota aliqua GC, CA, & ab GC ablatam CF; & ab CA, ablatum excessum linearum CA, AF; ab prima subtractione relinquetur recta GF, & ab secunda subtractione relinquetur recta FA: cùm demonstrauerimus esse vt GC ad CA, totum ad totum, sic CF ablatum ad ablatum excessum linearum CA, AF; erit per prop. 19. lib. 5. elem. residuum GF, ad residuum FA, sicut totum GC, ad totum CA. Igitur erit vti propositum fuit, vt tota recta CAG vel CG, ad eius portionem CA, sic GF recta ad FA.

PROPOSITIO XXXVI.

Iisdem positis. Si à puncto ducta linea, neque sectionem duobus in punctis secet, neque æquidistans sit asymptoto; sed cum opposita sectione conueniat. Erit vt tota linea ad lineam, quæ inter sectionem & æquidistantem per tactum ductam interijcitur; ita quæ est inter oppositam sectionem & asymptotum, ad eam quæ inter asymptotum & alteram sectionem.

Svppositio. Præter ea quæ ponuntur in præcedente propositione. sit huius propositionis suppositio huiusmodi. Sint oppositæ sectiones A, L, earumque centrum C, & asymptoti duæ KCB, DCE; recta verò EAB contingat in A sectionem A, conueniens in E & B cum asymptotis, & in A puncto contactus bifariàm diuisa, iuxta prop. 3. lib. 2. deducta ab puncto E asymptoti ECD, assumpto; per quod punctum E recta linea emissa sit LKEGF, nulli asymptotorum parallela, sed eas secans in K & E, & secans in vnico solùm puncto G, sectionem A, & ei oppositam L in puncto L. sit verò recta linea FAN emissa per punctum A contactus prædicti, parallela asymptoto ECD in qua fuit assumptum E; hæc occurret in N alteri asymptoto KCB, & in F, rectæ LKEGF, per propos. 11. Procli. Dico esse LE ad DG, sicut LF ad FG. hoc est linea EL, ex puncto E assumpto ad oppositam L sectionem transmissa, ad lineam EG sitam inter sectionem A, & dictum punctum E; sicut est recta linea tota LF inter sectionem oppositam L & F punctum lineæ parallelæ asymptoto ECD per A punctum contactus ductæ, ad lineam FG sitam inter dictum F, & sectionis A punctum G.

Apparatus. Puncta A, G, in sectione A, vniantur recta linea AG, quæ tota intra sectionem A erit per propos. 10. lib. 1. productaque vtrimque procedet extra illam, secabitque per propos. 8. lib. 2. asymptotos in H, & I. eruntque rectæ AH, GI, portiones æquales, per cit. prop. 8. & per nostrum coroll. ad illam, erunt rectæ GH, AI, æquales. Tum per propos. 31. lib. 1. elem. ex puncto E agatur recta linea EM parallela asymptoto KCB, occurret per proposit. 11. Procli rectæ IGAH; & quidem in puncto M inter puncta G & A, vti probabimus. Non enim occurret in punctis A vel G, congrueret enim cum recta EA, vel EG, per axio. 21. lib. 1. quæ productæ secant asymptotum KCB; & sic etiam recta EM ducta parallela asymptoto KCB, eam secaret, quod destruit datum, vel duæ rectæ lineę segmentum haberent commune contra 10. axiom. lib. 1. elem. sed neque dictam rectam lineam IGAH, secabit vltra puncta A, vel G, vt in P, vel Q punctis disiunctiuè sumptis; nam fieret angulus CEP, minor angulo CEB, vel angulus GEQ minor angulo GEI, ideoque minor angulo CEL æquali ipsi GEI per prop 15. lib. 1. elem. vnde producta recta QE vltra E, diuideret angulum CEK, secundum rectam QER; si primum quandoquidem per prop. 17. lib. 1. elem. duo anguli BCE, BEC, in triangulo ECB, sunt minores duobus rectis, erunt multò minores duobus rectis duo anguli BCE, CEB; igitur per 13. axiom. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ EP, KCB, concurrerent, parallelæ positæ: si secundum similiter per prop. 17. lib. 1. elem. in triangulo CEK, duo anguli CEK, CKE, sunt minores duobus rectis; ergo multò minores duobus rectis erunt duo anguli CEK, REK; igitur duæ rectæ KCB, QER, concurrent per 13. axiom. lib. 1. elem. hoc est duæ rectæ positæ parallelæ. hæc absurda indicant rectam EM positam parallelam asymptoto KCB, non posse occurrere rectæ IGAH, in alijs punctis, præterquam in vno M sito inter puncta G & A. Quia verò in triangulis HAB, MAE, anguli in A vertice sunt æquales per propos. 15. lib. 1. tùm anguli AEM, ABH æquales per prop. 29. lib. 1. elem. ob rectam EAB incidentem in rectas parallelas EM, BH; tùm etiam anguli AME, AHB, per cit. prop. 29. ob rectam MAH incidentem in easdem rectas parallelas EM, BH; erunt dicta triangula æquiangula, HAB, MAE. Et quoniam in triangulo KGH, est recta EM parallela lateri KB, erunt duo triangula KGH, EGM, similia, ideoque per defin. 1. lib. 6. elem. æquiangula.

Demonstratio. Quia triangula HAB, MAE, sunt æquiangula per apparatum, erit per 4. propos. lib. 6. elemen. vt BA ad AH, sic EA ad AM; prima BA est æqualis tertiæ EA, vsi osten-

ostendimus in suppositione: ergo per propos. 14. lib. 5. element. secunda AH erit æqualis quartæ AM. Cumque sint in apparatu rectæ lineæ AH, GI, æquales ostensæ, & nunc ostensæ æquales AH, AM; erunt per 1. axiom. lib. 1. elem. rectæ tres lineæ AH, AM, GI, æquales: est autem duarum rectarum AG, AM, excessus recta GM; ergo per lemma 3. erit etiam GM recta, excessus duarum rectarum AG, GI. & quoniam triangula sunt æquiangula KGH, EGM, ex apparatu; erit per prop. 4. lib. 6. elem. vt HG ad GK, sic MG ad GE; vicissimque per prop. 16. lib. 5. elem. vt HG ad MG, sic GK ad GE; & in apparatu ostendimus esse æquales rectas HG, AI; tùm est per prop. 16. lib. 2. recta LE æqualis ipsi GK: erit per nostrum coroll. propos. 7. lib. 5. elem. vt AI ad MG, sic LE ad GE, excessum linearum LF, FG: sed ex demonstratione allata in superiore prop. 35. vt AI ad excessum linearum AG, GI, sic est recta EF ad excessum linearum EG, GF, qui excessus additus ipsi EG, efficiet summam FG, per 3. axiom. igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt LE ad GE, sic EF ad excessum linearum EG, GF; igitur per prop. 12. lib. 5. elem. adiungendo antecedentia LE, EF, in vnam summam LF; & summam faciendo FG, consequentium GE, & excessus prædicti rectarum EG, GF; erit vt LE ad EG, sic LF ad FG. quomodo fuit propositum.

PROPOSITIO XXXVII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, vel sectiones oppositas contingentes duæ rectæ lineæ, sibi ipsis occurrant; & per tactus linea producatur; ab occursu verò contingentium ducatur linea sectionem in duobus punctis secans: Erit vt tota ad eam quæ extra sumitur; ita portiones inter sese, quæ à linea tactus coniungente fiunt.

Suppositio. Sit coni sectio, vel circuli circumferentia AB, vel sectiones oppositæ A, B; quam vel quas contingant duæ rectæ lineæ AC, BC, concurrentes in puncto C: rectaque linea sit AB, vniens puncta contactuum A, C: & ab puncto C concursus egrediatur recta linea CDEF, secans in duobus punctis D, F, sectionem vel circuli circumferentiam, & prædictam rectam AB in puncto E. Dico vt tota secans CF ad CD portionem eius extra sectionem, ita esse FE ad ED, inter sese, portiones videlicet eius sitæ intra sectionem, & factæ ab recta AB coniungente puncta A, B, contactuum.

Apparatus. Inuento S centro ellipseos & hyperbolæ, per prop. 45. lib. 2. & oppositarum sectionum per coroll. nost. 1. ad cit. propos. & circuli per prop. 1. lib. 3. elem. & in parabola reperiatur quæcumque eius diameter per prop. 44. lib. cit. 2. In datis sectionibus & circulo, per puncta A & C, disiunctiuè, & per centrum repertum, ducantur rectæ lineæ quæ erunt diametri per coroll. prop. 51. lib. 1. sed in Parabola, per puncta C & A, ducantur ex præscripto prop. 51. lib. 1. elem. rectæ lineæ æquidistantes diametro repertæ; hæ duæ ductæ rectæ per A & C disiunctiuè erunt diametri Parabolæ, per coroll. nost. 1. ad prop. 46. lib. 1. & secabunt lineam curuam eius in vnico tantùm puncto, per coroll. nost. 1. ad propos. 26. lib. 1. quod etiam intelligendum est de transuersa diametro Hyperboles; non autem de recta; producendo verò has diametros in Parabola, & transuersam in Hyperbola & sectionibus oppositis versus sectionem, incedent intra illam ex natura sua: at verò in ellipsi & circulo ductæ dictæ diametri per puncta C & A disiunctiuè, & centrum proprium repertum secabunt in duobus punctis lineam curuam earum figurarum propriam. Itaque in datis sectionibus sint diametri huiusmodi CH, AK; prima CH, educta ex puncto C concursus datarum rectarum tangentium, rectam lineam AB vnientem puncta contactuum bifariam in H diuidet seu secabit, tam in parabola ipsa, quàm hyperbola, & in ellipsi, & circulo, per prop. 30. lib. 2. at verò in oppositis sectionibus per propos. 39. lib. 2. in quibus tamen erit recta, non transuersa diameter: AK autem in ellipsi & circulo erit chorda terminata in A & K vtrimque in circumferentijs, procedentque per centra propria, sicuti etiam in hyperbola in qua vti in Parabola solummodò secabit in vno puncto A lineas curuas proprias, iuxta prop. 26. lib. 1. Insuper per punctum D agantur per prop. 31. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ DNO, DP; illa quidem æquidistans rectæ AH, quæ per 11. prop. Procli occurret rectæ KA productæ vltra A in puncto N, & in X rectæ contingenti AC, & rectæ CH in O; alia verò recta parallela tangenti CADP occurret in P, rectæ CH, per cit. 11. propos. Procli producendæ si opus sit. Ad hæc ex puncto F transmittantur aliæ duæ rectæ lineæ æquidistantes alijs designandis: prima quidem FR, æquidistans ipsi tangenti AC, occurrensque per prop. 11. Procli in puncto R, rectæ CH, & in G diametro AK; altera verò recta FKQ æquidistans ipsi AHB, occurrens per prop. 11. Procli, rectæ tangenti CA productæ in puncto L, & rectæ CH in M, & rectæ AK in K. Porrò resultabunt diuersa quadrilatera, & triangula: inter quæ triangula multa erunt similia. Imprimis qui-

quidem iſta tria LCM, ACH, XCO, per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. ob parallelas rectas XO, LFK, poſitas ipſi AHB. quæ ideo erunt inter ſe parallelæ per propoſit. 30. lib. 1. elem. ſed & ex eiſdem principijs tria alia triangula erunt ſimilia LCF, ACE, XCD: tùm alia tria ſimilia FCM, ECH, DCO. Tùm alia duo ſimilia LAK, XAN, ob parallelas baſes NX, LK, & rectas NK, LX, ſe mutuò decuſſantes; nam per prop. 15. lib. 1. elem. anguli ad verticem A erunt æquales, tùm per propoſ. 29. lib. 1. elem. anguli N, X, K, L. æquales reſpectiuè, ob incidentes rectas NK, LX, in rectas parallelas NX, LK. Tùm alia tria GND, GAE, FGK, prima quidem duo per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. ob rectas ND, AE parallelas; medium verò & vltimum, ob rationem allatam in duobus triangulis LAK, XAN; quare per propoſ. 21. lib. 6. elem. dicta tria triangula erunt ſimilia. Sed & hæc duo FCR, DCP, per coroll. prop. 4. lib. 6. element. erunt ſimilia, ob parallelas rectas DP, FR. Denique alia duo ſimilia erunt triangula DPO, FRM, ob parallelas rectas DP, FR, per cit. coroll. propoſ. 4. lib. 6. elem. Itaque in omnibus his triangulis ſimilibus licebit per lemma 56. lib. 1. comparare latera, quod retinendum erit, ne toties repetere cogamur dicta triangula & citationes lemmatis 50.

Demonſtratio. Quia in triangulis LCM, XCO, eſt recta XO parallela baſi LM, & recta CDF ſecat dictas parallelas in D & F; erit per coroll. noſt. 4. ad prop. 4. lib. 6. elem. vt LF ad FM, ſic XD ad DO; & per prop. 18. lib. 5. elem. componendo, vt LM ad FM, ſic XO ad DO; ergo viciſſim erit per prop. 16. lib. 5. elem. vt LM ad XO, ſic FM ad DO: quare per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ XO, ſic quadratum rectæ FM ad quadratum rectæ DO: quadratum autem rectæ LM ad quadratum rectæ XO habet duplicatam rationem lateris LM ad latus XO per prop. 20. lib. 6. elem. & triangulum LCM ad triangulum XCO, habet per prop. 19. lib. 6. elem. duplicatam rationem lateris LM ad latus XO; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ XO, ſic triangulum LCM ad triangulum XCO. ex eiſdem principijs erit vt quadratum rectæ FM ad quadratum rectæ DO, ſic triangulum FRM ad triangulum DPO: & per prop. 11. lib. 5. elem. vt triangulum LCM ad triangulum XCO, totum ad totum, ſic triangulum ablatum FRM, ad triangulum ablatum DPO; igitur per prop. 19. lib. 5. elem. reliquum quadrilaterum LCRF, ad reliquum quadrilaterum XCPD erit ſicut totum triangulum LCM ad totum triangulum XCO; vel per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ XO. & quia datæ duæ rectæ lineæ AC, BC, contingentes, concurrunt in vnum punctum C: imprimis recta linea AB nectens puncta contactuum non incedet per centrum in Parabola, quo caret in quo ſe mutuò ſecent eius diametri quæ ſunt omnes rectæ parallelæ per coroll. noſt. 3. ad prop. 27. lib. 1. In ellipſi autem & circulo eadem recta AB non tranſibit per centrum, iuxta coroll. noſt. 1. ad prop. 27. lib. 2. In Hyperbola verò cùm ipſa recta AB ſit per prop. 10. lib. 1. tota intra ipſam, & centrum eius ſit commune punctum communis ſectionis diametrorum eius, ſitque extra ipſam, per coroll. noſt. 4. ad prop. 27. lib. 1. non tranſibit per dictum centrum. Denique in oppoſitis ſectionibus eadem recta linea AB nulla ratione per centrum incedet, vti demonſtrauimus in coroll. noſtro 2. ad prop. 32. lib. 2. Igitur cùm oſtenderimus in apparatu rectam AB biſariàm diuidi ab diametro CH, in puncto H; erit ipſa AHB recta ordinatim applicata ad diametrum CHM, in parabola quidem per coroll. noſt. 28. ad prop. 49. lib. 2. in hyperbola per coroll. noſt. 29. in oppoſitis ſectionibus per coroll. noſt. 30. in ellipſi per coroll. noſt. 31. in circulo denique per coroll. noſt. 32. ad citatam prop. 49. lib. 2. quare ex demonſtratis in prop. 49. & 50. lib. 2. in omni ſectione & circulo, ſed in oppoſitis ſectionibus per prop. 12. lib. huius, quadrilaterum XCPD, triangulo ANX erit æquale; & quadrilaterum ACRG æquale triangulo FGK: igitur ſi his poſtremis æqualibus commune adijciatur quadrilaterum LAGF; fiet per ax. 2. lib. 1. elem. ex vna parte totum quadrilaterum LCRF æquale toti triangulo LAK. Erit igitur reſumendo prædicta per 7. & 11. propoſ. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ XO, ſic triangulum ALK ad triangulum ANX. Cumque in triangulis MLC, OXC, ſimilibus ſit LM ad LC, ſicut XO ad CX; & viciſſim per prop. 16. lib. 5. elem. vt LM ad XO, ſic LC ad CX; & per prop. 2. lib. 6. elem. ſit LX ad XC, ſicut FD ad DC, ob parallelam rectam XD ipſi LF; erit per prop. 18. lib. 5. elem. componendo vt LC ad CX, ſic FC ad CD: igitur per propoſ. 11. lib. 5. elem. vt LM ad XO, ſic FC ad CD: & per prop. 22. lib. 6. elem. vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ XO, ſic quadratum rectæ FC ad quadratum rectæ CD: & per propoſ. 11. lib. 5. element. vt triangulum ALK ad triangulum ANX, ſic quadratum rectæ FC ad quadratum rectæ CD. Cumque per propoſ. 2. lib. 6. elem. ob rectam AE parallelam ipſi LF, & rectam XD parallelam ipſi AE & AF; erit vt AX ad XO, ſic ED ad DC; tùm vt XC ad LX, ſic DC ad FD: ergo per prop. 22. lib. 5. element. ex æquo erit vt AX ad LX, ſic ED ad FD; & per diuiſionem rationis contrariam, iuxta coroll. 2. prop. 17. lib. 5. elem. vt AX ad LA, ſic ED ad FE; igitur inuertendo erit per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt LA ad AX, ſic FE ad ED. Quare per prop. 22. lib. 2. elemen. erit vt quadratum rectæ LA ad quadratum

rectæ AX, ſic quadratum rectæ FE ad quadratum rectæ ED: ſed per prop. 19. & 20. lib. 6. elem. & prop. 11. lib. 5. elem. eſt vt triangulum ALK ad triangulum ANX, ita quadratum rectæ LA ad quadratum rectæ AX; & oſtendimus eſſe quadratum rectæ FE ad quadratum rectæ ED, ſicut quadratum rectæ LA ad quadratum rectæ A X: ergo per prop 11. lib. 5. elem. erit vt triangulum ALK ad triangulum ANX, ſic quadratum rectæ FE ad quadratum rectæ ED: Denique cùm probauerimus antea eſſe vt triangulum ALK ad triangulum ANX, ſic quadratum rectæ FC ad quadratum rectæ CD, erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ FC ad quadratum rectæ CD, ſic quadratum rectæ FE ad quadratum rectæ ED: igitur per propoſ. 22. lib. 6. elem. erit vt FC ad CD, ſic FE ad ED, quod erat concludendum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Iiſdem poſitis. Si per contingentium occurſum ducatur recta linea tactus coniungenti æquidiſtans; & per punctum quod coniungentem tactus bifariàm diuidit, ducatur linea ſecans, & ſectionem ipſam duobus in punctis, & lineam æquidiſtantem per occurſum ductam: erit vt tota ad eam quæ extra ſumitur inter ſectionem & lineam æquidiſtantem, ita portiones inter ſeſe, quæ à linea tactus coniungente efficiuntur.

SVppoſitio. Sectionem vel circuli circumferentiam AB, vel ſectiones oppoſitas A, B, contingant duæ rectæ lineæ AC, BC, conuenientes in puncto C; rectaque linea AB vniat puncta contactuum A, B, & per C punctum ducta ſit recta linea CO æquidiſtans ipſi rectæ AB vnienti puncta contactuum: tùm alia recta ex puncto E medio rectæ AB tactus coniungentis tranſmittatur FEDO, ſecans ſectionem, vel circuli circumferentiam, vel ſectiones oppoſitas in duobus punctis F, D, & rectam CO æquidiſtantem ipſi AB, in puncto O. Dico eſſe vt FO tota iſta recta linea, ad OD eius portionem extra locum ſitam datæ ſectionis, vel circuli, vel extra locum intermedium datarum oppoſitarum ſectionum; ſic FE ad ED, portiones inter ſe quæ ab linea AB coniungente tactus efficiuntur.

Apparatus. Ex dictis in apparatu ſuperioris propoſitionis ducantur diametri ANI, CMI, per centrum I, in Hyperbola, ſectionibus oppoſitis, ellipſi & circulo: manifeſtum per propoſ. 30. lib. 2. diametrum CEM, tranſituram per E punctum medium rectæ AB, in ſectione & circulo; at verò in oppoſitis ſectionibus per prop. 39. lib. 2. Aliam verò AN in Parabola eſſe parallelam ipſi CEM; in ellipſi verò & circulo ſecare duobus in punctis circumferentias; in Parabola denique & Hyperbola ſolùm in vno puncto A interſecare ipſarum lineas curuas, vti oſtendimus in apparatu ſuperioris propoſitionis 37. Prætereà ex punctis F & D, per prop. 31. lib. 1. element. rectæ lineæ LFKM, DHGXN, æquidiſtantes ipſi rectæ AB, quæ ſecabunt datas & ductas alias rectas lineas in punctis in figurationibus deſignatis, per prop. 11. Procli. Denique per puncta F. G, agantur aliæ rectæ æquidiſtantes ipſi L A C, ſintque FR, GP, occurrentes in R & P punctis diametri EC productæ ſi opus ſit, per propoſ. cit. 11. Procli. producendæ donec occurrant in S & T, rectæ CO, per cit. propoſitio. Procli, & recta FR occurrat in V & Y rectis intermedijs AB, XGD.

Demonſtratio ſupponet analogiam demonſtratorum in ſuperiore propoſit. Eodem igitur diſcurſu, & ex eiſdem principijs allatis in demonſtratione ſuperioris propoſitionis oſtendetur, vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ HX, ſic eſſe triangulum ALK ad triangulum ANX; & vt triangulum ALK ad triangulum ANX, ſic eſſe quadratum rectæ LA ad quadratum rectæ AX; nam per prop. 19. & 20. lib. 6. elem. habent rationem duplicatam lateris LA ad latus AX: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ HX, ſic quadratum rectæ LA ad quadratum rectæ AX. Cumque ſint parallelæ rectæ XGD, CO, ipſi AB, erunt inter ſe parallelæ; ſed etiam ſunt parallelæ poſitæ LAC, FVYRS; reſultabunt parallelogrammata LS, AS, XS, AY, cuius oppoſita latera per prop. 34. lib. 1. elem. erunt æqualia; videlicet LC, FS; tùm XC, YS; tùm LX, FY; tùm AX, VY: erit igitur per propoſ. 7. lib. 5. coroll. noſtrum, vt LC ad CX, ſic FS ad FY; tùm vt LX ad AX, ſic FY ad VY: & quia in triangulo OFS, eſt recta YD parallela ipſi SO; erit per 2. prop. lib. 6. elemen. vt FY ad YS, ſic FD ad DO; & componendo per prop. 18. lib. 5. elem. vt FS ad SY, ſic FO ad OD; oſtendimus autem eſſe LC ad CX vt FS ad SY; ergo per propoſ. 11. lib. 5. elem. erit vt LC ad CX: ſic FO ad OD. eſt autem in triangulo LCM, recta XH parallela lateri LM; ergo per propoſ. 4. coroll. lib. 6. elem. erunt triangula LCM, XCH, ſimilia: quare per defin. 1. lib. 6. elem. erit vt LM ad LC, ſic XH ad XC; & viciſſim per prop. 16. lib. 5. elemen. vt LM ad XH, ſic LC ad CX, ſed oſtendimus eſſe vt LC ad CX, ſic FO ad OD; ergo per propoſ. 11. lib. 5. elemen. vt LM ad XH, ſic FO ad OD:

igitur

igitur per prop. 22. lib. 1. elemen. erit vt quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ XH, sic quadratum rectæ FO ad quadratum rectæ OD: probauimus autem antea esse quadratum rectæ LM ad quadratum rectæ XH, sicut quadratum rectæ LA ad quadratum rectæ AX; ergo per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ LA ad quadratum rectæ AX, sic quadratum rectæ FO ad quadratum rectæ OD: igitur erit per prop. 22. lib. 6. elem. vt FO ad OD, sic LA ad AX; est autem in triangulis XFD, AFE, similibus per coroll. propos. 4. lib. 6. elem. ob rectas parallelas XD, AE, & per definit. 1. eiusdem lib. 6. erit vt LA ad AX, sic FE ad ED: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. vt FO ad OD, sic FE ad ED. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

Si oppositas sectiones duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant; & per tactus linea producatur; ab occursu verò contingentium ducta linea, & vtramque sectionem, & lineam tactus coniungentem secet: Erit vt tota ad eam quæ extra sumitur inter sectionem & coniungentem tactus; ita portiones inter sese, quæ inter sectiones & contingentium occursum interijciuntur.

Suppositio. Sectionum oppositarum A, B, sit centrum C repertum per prop. 45. coroll. nost. 1. lib. 2. easque contingant duæ rectæ lineæ, vna vnam, altera aliam, AD, BD, conuenientem in D; rectaque linea AB per tactus transmittatur; & alia DC ex puncto D concursus tangentium diuerso ab C centro iuxta coroll. nost. 1. ad prop. 32. lib. 1. per ipsum centrum C, quæ producta diuidet in R rectam AB vnientem tactus, per medium, iuxta propos. 39. lib. 2. Insuper per D punctum concursus tangentium egrediatur quæuis recta linea EDFG, secans sectiones in E & F, & in G, rectam AB vnientem tactus. Dico esse vt EG ad GF, sic ED ad DF; hoc est vt tota recta EG inter sectionem A, & rectam AB vnientem tactus, ad rectam GF portionem illius totius EG, sitam extra locum duabus sectionibus contentum, & sectionem alteram B & rectam AB coniungentem tactus: sic ED, ad DF, hoc est portiones dictæ totius sitas inter datas sectiones, & factas ab puncto D occursus.

Apparatus. Recta linea ex puncto A per C centrum, producenda vltra C sic enim occurret obuiæ rectæ EDFG, in puncto N: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex punctis E & F, emittantur rectæ lineæ EHSK, FLMXO, æquidistantes ipsi AB; prima occurret in H rectæ RCD productæ vltra D; tum in S tangenti AD productæ vltra D; tum in K rectæ AC productæ vltra C; idque per prop. 51. Procli: per quam etiam altera ducta occurret in L rectæ BD tangenti, & in M rectæ CD, & in X rectæ AD tangenti, & in O alteri sectioni A oppositæ obuiæ. Insuper per eandem prop. 31. lib. 1. elem. ex eisdem punctis E, F, agantur aliæ duæ rectæ lineæ EP, FT, parallelæ tangenti AD, prima occurret in P rectæ CDH productæ vltra H, altera occurret in T, eidem productæ si opus fuerit vltra CR, per cit. propos. 51. Procli. Rectaque AD producatur vltra D donec occurrat in S rectæ EK, per eandem cit. prop. Procli. Porrò per prop. 30. lib. 1. elem. duæ rectæ FO, EK, erunt parallelæ, quia parallelæ positæ ipsi AB; tùm etiam erunt parallelæ duæ EP, FT, quia parallelæ eidem tertiæ rectæ AD. Sed & resultabunt diuersa triangula similia EDS, FDX, ob parallelas rectas ES, FX, & duas rectas FDE, XDS, se mutuò in D decussantes, per lemma 50. lib. 1. tùm per idem lemma, alia duo triangula similia SDH, MDX; tùm alia duo triangula similia EDH, FDM; tùm alia duo similia KNE, ANG; tùm alia tria similia FMT, EHP, SHD, vltima quidem duo EHP, SHD, per cit. lemma 50. lib. 1. primum verò FMT simile tertio SHD, vti nunc ostendam; cùm sint parallelæ rectæ SD, FT, in easque incidat recta TDH, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli FTM, SDH, æquales; similiter quia eadem recta TMH, incidit in rectas parallelas FM, SH, erunt anguli TMF, DHS, æquales: igitur in dictis triangulis FMT, SHD, reliqui tertij anguli æquales erunt per coroll. nost. 3. ad propos. 32. lib. 1. elem. ideoque per 4. prop. & defin. 1. lib. 6. elem. dicta triangula FMT, SHD, similia: ostendimus autem triangulum SHD esse simile triangulo EHP; ergo per prop. 21. lib 6. elem. dicta postrema triangula FMT, EHP, SHD, erunt similia. Quare poterimus in dictis triangulis similibus argumentari iuxta 50. lemma cit. lib. 1.

Demonstratio. In triangulis EDH, FDM, similibus, erit per lemma 50. lib. 1. vt EH ad HD, sic FM ad MD; tùm etiam in triangulis similibus SDH, MDX, vt HD ad HS, sic MD ad MX: igitur ex æquo erit per prop. 22. lib. 5. elem. vt EH ad HS, sic FM ad MX; & vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. vt EH ad FM, sic HS ad MX. quare per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ EH ad quadratum rectæ FM, sic quadratum rectæ HS ad quadratum rectæ MX: est autem per propos. 20. lib. 6. elemen. quadratum rectæ EH ad quadratum

rectæ FM in duplicata ratione lateris EH ad latus FM; & per prop. 19. lib. 6. elem. est triangulum EHP ad triangulum FMT simile, in duplicata ratione lateris EH ad latus FM: ergo per prop. 11. lib. 5. elemen. erit vt quadratum rectæ EH ad quadratum rectæ FM, sic triangulum EHP ad triangulum FMT. ex eisdem principijs concludemus esse triangulum DHS ad triangulum DMX, sicut quadratum rectæ HS ad quadratum rectæ MX: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt triangulum EHP ad triangulum FMT, sic triangulum DHS ad triangulum DMX: sed per demonstrationem prop. 11. triangulum EHP est æquale triangulis ASK, HDS; & triangulum FMT est æquale triangulis AXN, DMX: ergo per 7. & 11. prop. lib. 5. elem. erit vt triangulum DHS ad triangulum DMX, sic triangula simul ASK, DHS, ad triangula simul AXN, DMX; igitur per prop. 19. lib. 5. elem. reliquum triangulum ASK ad reliquum triangulum AXN, erit vt triangulum DHS ad triangulum DMX. Eodem quo paulò antè, concludemus esse vt triangulum ASK ad triangulum AXN, sic quadratum rectæ KA ad quadratum rectæ AN; id est quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ GF, ob triangulorum KNE, ANG similitudinem; & vt triangulum DHS ad triangulum DMX sic quadratum rectæ HG ad quadratum rectæ DM, hoc est quadratum rectæ ED ad quadratum rectæ DF: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ EG ad quadratum rectæ GF, sic quadratum rectæ ED ad quadratum rectæ DF. Quare per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt EG ad GF, sic ED ad DF. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XL.

Iisdem positis. Si per occursum contingentium ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidistans; & à puncto quod coniungentem tactus bifariàm diuidit, ducatur linea secans vtramque sectionem, & æquidistantes ei quæ tactus coniungit. Erit vt tota ad eam quæ extra sumitur inter æquidistantem & sectionem; ita portiones inter sese; quæ inter sectiones & coniungentem tactus interijciuntur.

SVppositio. Oppositas sectiones A, B. tangant duæ rectæ lineæ AD, BD, vna vnam, alia aliam, concurrentes in D. Sitque centrum earum C repertum per coroll. nost. 1. ad prop. 45. lib. 2. Rectaque AB voiat puncta A, B, contactuum, hanc diuidet bifariàm in E, recta DC producenda vltra C centrum; per prop. 39. lib. 2. Tùm per E punctum ducatur recta linea quæcumque HEKL, secans vtrasque sectiones in H & K, & in L rectam FDG ducendam parallelam ipsi AB, ex puncto D concursus, quæ secabit vtrasque sectiones in G & F; quia per prop. 8. lib. 1. produci possunt in infinitum diuaricando extrema propria ab inuicem in infinitum. Dico vt tota recta HL ad eius portionem KL inter sectionem B & rectam FDGL; ita esse portiones eiusdem, hoc HE ad EK, sitas inter rectam AB & sectionem B.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. element. ex punctis H & K, agantur rectæ lineæ HNMX, KYOP, parallelæ ipsi AB; prima secabit in M tangentem MAD; tùm in N, rectam DE productam si opus sit: altera verò secabit in O rectam DCE, & in P, tangentem AD. Insuper ex punctis eisdem H, K, ponantur aliæ duæ rectæ HR, KS, parallelæ ipsi AD tangenti; prima secabit in I, rectam AB, & in Q rectam KOYPQ, & in V rectam LF, & in R rectam ED productam; secunda verò occurret in S rectæ DEN. Denique ex puncto A transmittatur recta XACT, parallela ipsi HEKL vtrimque producenda, quæ occurret in X rectæ NMHX, & in Y rectæ KP, & in T, rectæ LGDF. & quia rectæ XN, QK, FL, sunt positæ parallelæ ipsi AB, erunt per prop. 30. lib. 1. elem. parallelæ inter se: similiter quia rectæ KS, HR, sunt positæ parallelæ tangenti AD, erunt parallelæ inter se. quare per proposit. 11. Procli sectiones assignatæ rectarum datarum & ductarum fient in punctis assignatis. Ex hoc apparatu resultabunt parallelogramma MI, AQ, QD, HP, HD, XE, AK, YL, HK, HL, AI. Tum diuersa triangula similia, ob parallelas sectas ab alijs rectis, per prop. 15. & 29. lib. 1. elem. prop. 2. & coroll. propos. 4. & defin. 1. & prop. 4. & 21. lib. 6. elem. videlicet XAM AYP; tùm HEN, KEO; tùm HRN, MDN, EDA, ODP, KSO.

Demonstratio. In triangulis similibus MAX, PAY, erit per lemma 50. lib. 1. vt XA ad MA, sic AY ad AP; & vt XA ad AY, sic MA ad AP: est autem in parallelogrammis XE, AK, per coroll. nost. ad prop. 7. lib. 5. element. vt XA ad AY, sic HE ad EK, videlicet per propos. 34. lib. 1. elem. æquales rectæ ad æquales; & in triangulis similibus HEN, KEO, vt HE ad EK, sic HN ad KO: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt HN ad KO, sic MA ad AP, quare per prop. 22. lib. 6. elem. erit vt quadratum rectæ HN ad quadratum rectæ KO, sic quadratum rectæ MA ad quadratum rectæ AP. Sed per prop. 19. & 20. lib. 6. elemen. & 11. lib. 5. elem. ob duplicatam rationem laterum homologorum HN, KO, est vt quadratum

tum rectæ HN ad quadratum rectæ KO, sic triangulum HRN ad triangulum KSO; & ob duplicatam rationem laterum homologorum MA, AP, est vt quadratum rectæ MA ad quadratum rectæ AP, ita triangulum XMA ad triangulum AYP: ergo per proposit. 11. lib. 5. elem. erit vt triangulum HRN ad triangulum KSO, sic triangulum XMA ad triangulum AYP: est verò per prop. 11. coroll. nost. 2. triangulum HRN æquale triangulis simul sumptis XAM, MND; & triangulum KSO æquale triangulis simul sumptis AYP, POD: ergo per 7. & 11. prop. lib. 11. element. erit vt triangula simul sumpta XAM, MND, ad triangula simul sumpta AYP, POD, sic triangulum XAM, ad triangulum AYP; igitur per prop. 19. lib. 5. elem. erit reliquum triangulum MND, ad reliquum triangulum DOP, vt totum triangulum HRN, ad totum triangulum KSO. Verùm per prop. 19. & 20. lib. 6. elem. & 11. prop. lib. 5. elem. in triangulis similibus XAM, AYP, in ratione duplicata laterum homologorum XA, AY, est vt triangulum XAM ad triangulum AYP, sic quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AY; & ob eandem rationem, est vt triangulum MND ad triangulum DOP, sic quadratum rectæ MN ad quadratum rectæ PO, duplicatam nimirum lateris MN ad latus PO: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ MN ad quadratum rectæ PO, sic quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AY. Vt autem per prop. 22. lib. 6. elem. quadratum MN ad quadratum PO, sic ND quadratum ad quadratum DO; quia in triangulis similibus MDN, PDO, est per lemma 50. lib. 5. vt DN ad NM, sic DO ad OP; & vt DN ad DO, sic MN ad PO, & quia initiò probauimus esse XA ad AY, sicut HE ad EK; erit per prop. 22. lib. 6. elem. vt quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AY, sic quadratum rectæ HE ad quadratum rectæ EK. Præterea quia in triangulis similibus MDN, PDO, est per lemma 50. lib. 1. vt ND ad DO, sic MD ad DP; & est in parallelogrammis HD, HP, per prop. 34. lib. 1. elem. & coroll. nost. ad prop. 7. lib. 5. elem. vt MD ad DP, sic HV ad VQ; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt ND ad DO, sic HV ad VQ: sed in triangulis similibus HLV, KHQ, est per lemma 50. lib. 1. vt HV ad VQ, sic HL ad LK; igitur per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt ND ad DO, sic HL ad LK; & per propos. 22. lib. 6. elem. vt quadratum rectæ ND ad quadratum rectæ DO, sic quadratum rectæ HL ad quadratum rectæ LK: & quia probauimus esse quadratum rectæ MN ad quadratum rectæ PO, sicut quadratum rectæ XA ad quadratum rectæ AY, erit per prop. 22. lib. 6. element. vt XA ad AY sic MN ad PO; & etiam ostendimus esse XA ad AY sicut HE ad EK; erit per prop. 11. lib. 5. element. HE ad EK vt MN ad PO: Insuper demonstrauimus esse quadratum rectæ MN ad quadratum rectæ PO, vt quadratum rectæ ND ad quadratum rectæ DO; erit per prop. 22. lib. 6. elem. vt MN ad PO, sic ND ad DO; igitur per prop. 11. lib. 5. element. erit HE ad EK vt ND ad DO: ad hæc notum est ex antedictis esse ND ad DO vt HV ad VQ; ergo erit per prop. 11. lib. 5. elem. HE ad EK vt HV ad VQ: Denique probauimus esse HV ad VQ, vt HL ad LK; ergo erit per prop. 11. lib. 5. elem. HE ad EK, vt HL ad LK. quod erat concludendum.

PROPOSITIO XLI.

Si Paraboleń contingentes tres rectæ lineæ, inter se conueniant: in eandem proportionem secabuntur.

SVpposito, Parabolen ABC contingant tres rectæ lineæ ADE, EFC, DBF, inter se conuenientes hac ratione; duæ quidem AE, CE, in vno E puncto; alia verò tertia DBF, secet in D rectam AE, & in F rectam CE: nam constat ex corollarijs nostris 2. & 3. ad prop. 49. lib. 2. ex vno puncto extra Parabolam eiusque lineam curuam sumpto duas solum tangentes ipsam rectas egredi posse; igitur duæ solùm concurrent in vnum punctum: Tertia verò si ducatur ex aliquo puncto puta B, arcus Paraboles siti inter alia duo puncta A & C contactuum, tangens ipsammet Parabolam; cùm ex natura sua semper procedat extra ipsam, producta vtrimque, occurret in D & F, punctis aliarum datarum tangentium rectarum; per axiom. 18. lib. 1. elem. & sic tres datæ rectæ concurrent seu conuenient inter se ex datis; duæ quidem in vno puncto, & non plures; alia verò has duas concurrentes in vno puncto, secabit vnam in vno puncto, aliam in alio. Dico autem ita esse CF ad FE, sicut ED ad DA, & FB ad BD.

Pro demonstratione huius propositi; apparatur duos patietur casus, ideoque etiam duæ demonstrationes afferentur, prima primi casus, altera secundi.

Apparatur. Recta AC ducatur vniens puncta A, C, contactuum duarum rectarum tangentium AE, CE conuenientium in vnum E punctum; quæ recta tota erit intra Parabolam per prop. 10. lib. 1. Hæc verò recta AC bifariàm in G diuidatur per prop. 10. lib. 1. elem. & recta EG transmittatur, quæ necessariò lineam curuam Paraboles in vno puncto intersecabit, eritque diameter eius per prop. 29. lib. 2. Porrò hoc punctum intersectionis lineæ curuæ Paraboles & diametri eius EG, vel erit punctum B contactus tertiæ rectæ lineæ DBE, vel aliud puta H. Esto primum seu

primus casus huius apparatus. En demonstrationem.

Demonstratio. Quia in Parabola data, diameter eius EBG, rectam AGC bifariàm diuidit, & in vertice B diametri recta DBF datur contingere ipsam Parabolam; erit per 5. propos. libri 2. recta DBF, parallela ipsi AGC. Igitur quia in triangulo AEC, recta DF est parallela basi AC, & ex vertice E recta linea EBG, diuidit basim AC, & rectam DF; erit per coroll. nostrum ad prop. 4. lib. 6. element. vt AG ad GC, sic DB ad BF; prima autem AG æqualis est posita secundæ GC: ergo per coroll. nostrum 2. ad propos. 14. lib. 5. element. tertia DB erit æqualis quartæ BF. Verùm quia recta AC est parallela ostensa tangenti DBF, in extremo diametri BG; erit recta AGC ordinatim applicata diametro EBG, per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. vel quia recta AGC bifariàm in G secatur ab diametro BG Paraboles quæ centro caret in quo se mutuò secent eius diametri iuxta coroll. nostrum 3. ad propos. 45. lib. 2. ideoque recta AGC extra centrum prædictum est; tunc per coroll. nostrum 2. ad propos. 6. lib. 2. erit ipsa recta AGC ordinatim applicata diametro EBG: Igitur quia recta AE Parabolam in A contingit conueniens in E cum aius diametro GBE extra ipsam Parabolam, & ab puncto contactus A ad prædictam diametrum EBG, est ordinatim applicata recta AG: erit per propos. 35. lib. 1. recta EB æqualis rectæ BG. Quare cùm in triangulis AEG, CEG, sint rectæ DB, FB, parallelæ basibus AG, CG, ostensæ; erunt per prop. 2. lib. 6. elem. rectæ lineæ AE, CE, sectæ proportionaliter in D & F, sicuti secta est recta EG in B: sed paulò antè probauimus esse sectam rectam EG in B, in partes æquales; ergo etiam recta AE secta erit in D in partes æquales, & recta CE in F in partes æquales. Quare erit vt CF ad FE, sic ED ad DA, & FB ad BD, sicuti fuit propositũ.

Apparatus secundi casus, suppositis ijs quæ diximus in primo. Esto diameter EG secans bifariàm in G, rectam AC non transeuntem per centrum Paraboles quo caret vti ostendimus in præcedente demonstratione, ideoque ordinatim applicatam dictæ diametro EG per coroll. nostrum 2. ad propos. 6. lib. 2. non secet lineam curuam Paraboles intermediam in puncto B contactus rectæ DBF, sed in alio puncto H, ex quo per prop. 31. lib. 1. element. educatur recta linea KHL parallela ordinatim applicatæ rectæ AGC ad diametrum EHG; hæc recta KHL continget in H Parabolam, per propos. 32. lib. 1. Tunc verò per demonstrationem præcedentem, erunt rectæ KH, HL æquales; tùm rectæ CL, LE æquales; tùm rectæ EK, KA æquales; & rectæ GH, HE. Insuper ex præscripto propos. 31. lib. 1. element. ex puncto B contactus dati, agatur recta linea MNBXP, parallela diametro EG, quæ occurret in M, rectæ CEM; & in N tangenti AE; & in X rectæ AC, per prop. 11. Procli: Tùm etiam ex punctis A & C, ponantur rectæ lineæ AO, CP, parallelæ tangenti DBF, quæ per propos. 30. lib. 1. element. erunt parallelæ inter se; & occurrunt in O & P, rectæ MBP, per propos. cit. 11. Procli. Sed & per corollarium nostrum 1. ad prop. 46. lib. 1. recta MBP, parallela diametro EG, erit etiam diameter datæ Paraboles. Tùm etiam quia rectæ AO, OP, sunt parallelæ tangenti DBF parabolam in vertice B diametri BP, erunt, & non incedunt per centrum Paraboles quo caret iuxta coroll. nostrum 3. ad propos. 45. lib. 2. erunt per coroll. nost. 2. ad prop. 6. lib. 2. ordinatim applicatæ ad diametrum BP prædictam.

Demonstratio secundi casus. Quandoquidem Parabolam datam recta CM contingit in C, conueniens cum diametro MBP, & recta CP est ordinatim applicata dictæ diametro MBP; erit per propos. 35. libri 1. recta MB æqualis ipsi BP, ideoque tota MP diuisa bifariàm in B: & quia in triangulo CMP, est recta BF, parallela basi PC iuxta apparatum; erit per propos. 2. lib. 6. elem. recta CM diuisa bifariàm in F; ideoque recta CF æqualis ipsi FM. Ergo erit in ratione æqualitatis vt EL ad LC sic MF ad FC; quia in apparatu ostendimus esse æquales rectas EL, LC: igitur per propos. 18. libri 5. elementorum componendo erit vt MC ad CF, sic EC ad LC; & vicissim per propos. 16. libri 5. elementorum vt MC ad CE, sic CF ad LC. & quia recta EG est æquidistans basi MX in triangulo MCX, erit per propositio. 2. libri 6. elementorum vt ME ad EC, sic XG ad GC; & componendo per propos. 18. lib. 5. elemento. vt MC ad EC, sic XC ad GC: igitur per proposit. 11. lib. 5. element. erit vt CF ad LC, sic XC ad GC: Verùm per propos. 15. lib. 5. element. vt GC ad CL, sic CA ad CE; ergo vicissim per proposit. 16. libri eiusdem, erit vt CL ad CE, sic GC ad CA; igitur per prop. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate erit, quandoquidem ostenderimus esse CF ad LC, sicut XC ad GC; & esse LC ad CE, sicut GC ad CA: vt CF ad EC, sic CX ad AC; ergo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. erit inuertendo, vt EC ad CF, sic AC ad CX; & iuxta prop. 19. lib. 5. elem. per conuersionem rationis, vt EC ad EF, sic AC ad AX; & per prop. 17. lib. 5. ele. diuidendo, vt CF ad FE, sic CX ad XA. Præterea quia MBO est diameter Paraboles, eamque recta ANE contingit in puncto A, conueniens in N cum dicta diametro MBO, cui ordinatim applicata est recta AO, iuxta apparatum; erit per proposit. 35. libri 1. recta NB æqualis rectæ BO: cùm igitur in triangulo ANO

sit

sit recta DB parallela basi AO. diuidentur per prop. 2. lib. 6. element. latera eius ON, AN, proportionaliter ab prædicta recta DB; ostendimus autem rectam NO diuisam esse in partes æquales NB, BO; ergo etiam recta NA; diuidetur in D, in partes æquales ND, DA: sed ostendimus rectam EK esse æqualem rectæ KA; ergo per prop. 15. lib. 5. elem. erit vt EA ad NA, sic AK ad AD; sed vt EA ad NA, sic GA ad AX, per 2. prop. lib. 6. elem. (ob rectam NX parallelam basi EG, trianguli EAG.) ergo per proposit. 11. lib. 5. element. erit vt KA ad AD, sic GA ad AX: sed in ratione dupli est CA ad AG, vt EA ad AK; & nunc probauimus esse GA ad AX, vt KA ad AD; igitur per propositio. 22. lib. 5. elem. ex æquo erit vt CA ad AX, sic EA ad AD; & diuidendo per proposit. 17. lib. 5. element. vt CX ad XA, sic ED ad DA: Demonstrauimus autem anteà, vt CX ad XA, sic esse CF ad FE; ergo per prop. 11. lib. 5. element. erit vt CF ad FE, sic ED ad DA. & quia sunt triangula CPX, XAO, similia per lemma 10. lib. 1. erit per idem lemma vt XC ad CP, sic AX ad AO; & vt XC ad AX, sic CP ad AO; estque in triangulis similibus CMP, FMB. per citatum lemma, vt MC ad CP, sic MF ad FB; & vt MC ad MF, sic CP ad FB; estque ostensa MC dupla ipsius MF, ergo CP dupla erit ipsius FB: simili modo quia in triangulis similibus ANO, DNB, erit per cit. lemma, vt NA ad AO, sic ND ad DB; & vt NA ad ND, sic AO ad DB; estque dupla NA ipsius ND, ergo etiam AO dupla erit ipsius DB, ergo per prop. 15. lib. 5. element. erit vt CP ad AO, sic FB ad DB: igitur cum probauerimus esse CP ad AO, sicut XC ad AX; erit per prop. 11. lib. 5. element. vt XC ad AX. sic FB ad BD. Demonstrauimus igitur vt XC ad AX, esse sic CF ad FE, & sic esse FB ad BD; tùm esse ED ad DA, sicut CF ad FE: erit per prop. 11. lib. 5. elem. verum quod propositum est, videlicet vt CF ad FE, sic ED ad DA, & FB ad BD.

PROPOSITIO XLII.

Si in Hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremis diametri ducantur lineæ æquidistantes ei quæ ordinatim applicata est; & alia quædam quomodocumque contingens ducatur: abscindet ex ipsis lineas continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

SVpposirio. Sit AB diameter transuersa datarum sectionum, ad quam sit aliqua recta linea ordinatim applicata extra centrum: tùm ab extremis A & B, dictæ diametri sint rectæ lineæ AC, BD, æquidistantes illi rectæ lineæ ordinatim applicatæ, hæ per propos. 30. lib 1. elem. erunt parallelæ inuicem. & per prop. 32. lib. 1. erunt contingentes; hyperbolam quidem vna ex illis; sectiones oppositas ambæ, sed vna vnam, alia alteram; ellipsim ambæ; & circuli circumferentiam etiam ambæ per coroll. nost. 4. ad cit. prop. 32. lib. 1. Insuper data sit alia recta tertia quærumque CED, contingens dictas sectiones in puncto E. secansque alias duas AC, BD, primam quidem AC in C, & aliam BD in D. quod hæc recta CED, alias duas AC, BD, secet sic probabitur. Quæsito centro F in ellipsi & hyperbola per propos. 45. lib. 2. in oppositis sectionibus, per coroll. nostrum 1. ad cit. prop. 45. & in circulo per propos. 1. lib. 3. elem. ponatur recta linea FG, ex centro F parallela ordinatim applicatæ; hæc erit ordinatim applicata diametro datæ AB transuersæ, in hyperbola quidem per coroll. nost. 29. ad prop. 49. lib. 2. in oppositis sectionibus per coroll. nost. 30. in ellipsi per coroll. nost. 31. & in circulo per coroll. nost. 32. ad cit. prop. 49. lib. 2. & sic de alijs omnibus huiusmodi rectis parallelis: hæc recta transiens per centrum erit diameter per coroll. prop. 51. lib. 1. quare hæ duæ diametri AB, & FG, erunt coniugatæ, in ellipsi quidem & circulo per coroll. nost. 49. ad prop. 49. lib 2. & in hyperbola verò & oppositis sectionibus per coroll. nost. 50. ad cit. propos. Iam verò vel punctum G extremum diametri FG in circulo & ellipsi concurrit cum puncto E contactus rectæ CED tangentis; vel aliud est at diuersum: si diuersum, existet inter diametros coniugatas AB, FG; igitur per propos. 25. lib. 1. & per coroll. nost. 1. ad illam, recta CED, occurret in dictis diametris coniugatis AB & FG extra sectionem; & quidem in K diametro AB, & in H diametro FG; ergo etiam per prop. 11. Procli occurret in C & D, rectis AC, BD, parallelis ipsi FG: at verò in Hyperbola & oppositis sectionibus occurret diametro AB in puncto K inter centrum F & verticem B, per coroll. propos. 31. lib. 1. ideoque obuiæ tangenti BD, occurret in D, & alteri FG in H, parallelæ ipsi BD, per prop. 11. Procli. Quod si punctum G idem sit cum puncto E, vt spectare est in secundis figuris; quia recta CED occurrit in G vel E cum recta FG, occurret etiam per 11. propos. Procli, rectis AC, BD parallelis ipsi FG; & quidem in C, rectæ AC, & in D, rectæ BD. Dico autem rectangulum sub rectis AC, BD, esse æquale quartæ parti figuræ quæ ad

AB

A B diametrum constituitur.

Apparatur. In Hyperbola & oppositis sectionibus ex puncto E quod semper est diuersum ab puncto G; nam E existit in linea curua Hyperboles, eò quòd sit contactus mutuus illius & recta CED tangentis datæ; & G est in diametro recta FG coniugata ipsi AB, quæ ex natura sua semper incedit extra lineam curuam hyperboles: ponatur, inquam, per propos. 31. lib. 1. elemen. ex E puncto recta linea EL parallela positæ rectæ GF hæc occurret coniugatæ diametro AB per prop. 11. Procli; eritque ordinatim applicata ipsi diametro AB, per defin. 17. & 16. lib. 1. inter primas. In circulo autem & ellipsi si punctum E sit diuersum ab G, ponatur eodem modo recta EL parallela diametro rectæ GF; ex eisdem principijs occurret diametro coniugatæ AB, & erit ordinatim applicata illi. Porrò erunt rectæ lineæ AC, LE, FG, BD, parallelæ inuicem per propos. 30. lib. 1. elem. quia parallelæ dictæ diametro rectæ FG; quæ in ellipsi & circulo in casu quo punctum E diuersum sit ab G, si producatur vltra G, occurret in H, rectæ DEK tangenti. Insuper in ellipsi & circulo in hoc eodem casu, & in hyperbola & oppositis sectionibus absolutè, agatur per eandem prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto E recta linea EM parallela diametro AB transuersæ; hæc recta EM conueniet per prop. 11. Procli cum diametro FG coniugata ipsi AB; eritque per def. 17. & 16. lib. 1. inter primas ordinatim applicata diametro rectæ FG. Iam verò in ellipsi & circulo in casu quo puncta E & G confluant in vnum, ponatur etiam recta linea ex puncto G, vel E, parallela transuersæ diametro AB; hæc congruet cum recta DEC data tangente: resultat enim parallelogrammum CABD, ob parallelas AC, BD, ostensas in suppositione, & ob parallelas positas AB, CD; quòd si recta posita parallela ipsi AB, non congrueret cum recta DCE, sed se intersecarent in communi puncto E vel G; quandoquidem AB diameter transuersa AB est ordinatim applicata diametro coniugatæ FG, per defin. 16. lib. 1. inter primas, eique AB ponitur recta parallela in vertice E vel G, hæc parallela continget ellipsim vel circulum per prop. 32. lib. 1. & coroll. nost. 4. ad illam. igitur in eodem puncto G vel E, duæ rectæ lineæ contingerent ellipsim vel circulum, contra coroll. nost. 3. ad cit. prop. 32. lib. 1. congruent igitur, & parallelogrammum prædictum resultabit CABD, continent duo parallelogramma CF, FD, ob parallela latera ostensa: quare per prop. 34. lib. 1. element. eorum latera opposita erunt æqualia CA, EF vel GF, DB; tùm opposita CE, vel CG, AF, tùm opposita ED vel GD, FB; tùm opposita CD, AB. & quia per prop. 30. lib. 1. diameter AFB bifariàm secatur in centro F in omni sectione coni, & in circulo ex natura sua; rectangulum AF, FB, erit æquale quadrato dimidiæ AF, vel FB, per lemma 49. lib. 1. & in circulo erit quadratum semidiametri AF, vel FB, vel FG æqualium ex natura sua; quarta pars quadrati totius diametri AB, per coroll. nost. ad prop. 20. lib. 6. element. ideoque quarta pars figuræ quæ ad diametrum constituitur, quæ est æqualis quadrato diametri illius, vti diximus in explicatione def. 2. lib. 2.

Demonstratio. Cùm sint æquales F A & FB, ostensæ; erunt per prop. 16. Procli, quadrata earum æqualia. Iam verò quia per propos. 37. lib. 1. Rectangulum sub KF, FL, æquale est quadrato rectæ AF, vel FB; erit per propos. 14. lib. 6. elem. vt KF ad FA, sic AF ad FL. Igitur quia est KF ad FA, sic AF ad FL; erit diuidendo in ellipsi & circulo per prop. 17. lib. 5. element. & componendo in oppositis sectionibus, & hyperbola, per propos. 18. lib. 5. elem. vt KA ad FA seu ad FB, sic AL ad FL; & vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. vt KA ad AL, sic AF ad FL: ergo cùm ostenderimus esse KF ad FA, sicut AF ad FL; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt KF ad FA seu FB, sic KA ad AL; & inuertendo per propos. 4. lib. 5. coroll. vt FB ad KF, sic AL ad AK; & componendo per prop. 18. lib. 5. element. in ellipsi & circulo, vt BK ad KF, sic LK ad KA; diuidendo verò per prop. 17. libri eiusdem 5. elem. erit etiam vt BK ad KF, sic LK ad KA: sed per lemma 50. lib. 1. est in triangulis BKD, FKH, vt KB ad BD, sic KF ad FH; & vt KB ad KF, sic BD ad FH: tùm etiam in triangulis LKE, AKC, erit per cit. lem. 50. ad lib. 1. vt KL ad LE, sic KA ad AC; & vt LK ad KA, sic EL ad CA; ostendimus autem LK ad KA esse vt BK ad KF; ergo erit per prop. 11. lib. 5. vt BK ad KF, sic EL ad CA; & probauimus esse BK ad KF sicut BD ad FH: ergo per cit. prop. 11. lib. 5. elem. erit vt BD ad FH, sic EL ad CA. Quare cùm istæ quatuor rectæ sint proportionales, erit per prop. 16. lib. 6. elem. rectangulum sub BD, CA, æquale rectangulo sub FH, EL. Iam verò cùm resultet parallelogrammum ELFM, ex rectis EL, FM parallelis ostensis vel ductis in apparatu; tùm ex alijs LF, EM, etiam parallelis; erunt per prop. 34. lib. 1. elem. latera dicti parallelogrammi opposita EL, FM, æqualia; ideoque per lemma 49. lib. 1. rectangulum sub FH, EL, erit æquale rectangulo sub FH, FM: quare per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum sub BD, CA, æquale ostensum rectangulo sub FH, EL, erit etiam æquale rectangulo sub FH, FM: sed rectangulum sub FH, FM, æquale est per prop. 38. lib. 1. quadrato rectæ FG; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. rectangulum sub BD, CA; erit æquale quadrato rectæ FG. Quod si concipiamus totam diametrum rectam GFI ductam, coniugatam diametro AB transuersæ, seu secundam respectu AB, erit per defin. 4. lib. 1. inter secundas, media proportionalis inter figuræ latera, quorum vnum erit AB; igitur quadratum totius

GFI,

GFI, erit æquale dictæ figuræ constitutæ ad AB, sub AB & recto eius latere, per prop. 17. lib. 6. elem. quadratum autem dimidiæ FG, totius GFI, quæ per prop. 30. lib. 1. bifariàm diuiditur in centro, est quarta pars quadrati totius GFI diametri, per coroll. nost. ad prop. 20. lib. 6. elem. igitur etiam erit quarta pars dictæ figuræ constitutæ ad AB, æqualisque ostensæ quadrato totius diametri GFI. rectè igitur demonstrauerimus rectangulum sub BD, CA, æquale esse quartæ parti figuræ constitutæ ad AB, cùm sit ostensum quadrato rectæ FG æquale, quod est quarta pars dictæ figuræ. Quare etiam in secundis figuris ellipseos & circulo ex dictis manifestum erit.

COROLL. NOSTRVM. I.

In ellipsi & circulo, & sectionibus oppositis quadratum diametri vnius è coniugatis: est æquale figuræ quæ constituitur ad aliam diametrum coniugatam.

HOc enim probauimus in fine demonstrationis allatæ ad hanc præsentem propositionem 42. quod etiam verum erit in Hyperbola, si opposita describatur.

COROLL. NOSTRVM II.

Quadratum semissis diametri vnius è coniugatis duabus, ellipseos, vel circuli, vel sectionum oppositarum; est æquale quartæ parti figuræ quæ constituitur ad alteram coniugatam diametrum.

IStud etiam probauimus in fine demonstrationis allatæ ad hanc eandem propositionem 42. quod etiam verum erit in Hyperbola, si opposita describatur.

COROLL. NOSTRVM III.

Datis duabus diametris coniugatis in ellipsi, circulo, & sectionibus oppositis; inuenire latus rectum cuiuscumque è datis illis diametris coniugatis; vel reperire latera propria dictis diametris recta.

SInt ACB, DCE, diametri coniugatæ: oporteatque inuenire latera illis propria recta.

Apparatus. Per prop. 11. lib. 6. elemen. datæ primæ diametro ACB, & secundæ DCE; reperiatur tertia proportionalis AF: Dico rectam AF esse latus rectum diametri ACB. Data autem prima diametro DCE, & secunda ACB, reperiatur tertia proportionalis recta DG: Dico rectam DG esse latus rectum diametri DCE.

Demonstratio. Per defin. 4. lib. 1. inter secundas, secunda diameter est media proportionalis inter figuræ latera constitutæ ad alteram diametrum datam coniugatamque alteri quæ secunda dicitur; & inuenimus datis duabus hoc ordine diametris coniugatis ACB, DCE, tertiam AF proportionalem; rectangula fiet figura sub ACB & AF extremis, æquale quadrato mediæ DCE: si tertia AF inuenta non sit latus rectum diametri ACB, sit si fieri possit alia diuersa inæqualis; nihilominus cùm sit diameter alia DCE media proportionalis inter ACB & aliam inæqualem dictæ AF adstructam ab aduersario pro latere recto diametri ACB; erit iuxta positionem aduersarij vt ACB ad DCE, sic DCE ad inæqualem rectam ipsi AF: verum etiam est per apparatum vt ACB ad DCE, sic DCE ad AF; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt DCE ad AF, sic DCE ad introductam aliam ab AF, quare per 9. prop. lib. 5. elem. recta AF, & introducta inæqualis ipsi AF, æquales. Quod absurdum est: igitur positio vnde procedit erit impossibilis, videlicet quòd alia recta diuersa & inæqualis respectu AF, sit latus rectum diametri ACB. Eodem modo probabitur recta DG esse latus rectum diametri DCE. Atque ita fecerimus ac demonstrauerimus propositum.

COROLL. NOSTRVM IV.

Data diametro transuersa quacumque in ellipsi, circulo, sectionibus oppositis, & Hyperbola: inuenire latus eius rectum aliter quàm tradiderimus in corollarijs nostris ad prop. 51. lib. 1.

DAtæ diametro transuersæ reperiatur altera ei coniugata; in ellipsi per coroll. nost. 16. in circulo per coroll. nost. 17. in oppositis sectionibus, (& in hyperbola si descripta sit ei opposita,) per coroll. nost. 18. Præterea datis hisce duabus diametris coniugatis per coroll. nost. præcedens, reperiatur latus rectum proprium transuersæ datæ diametro; fecerimus imperatum aliter quàm in coroll. nostris citatis ad prop. 51. lib. 1.

COROLL. NOSTRVM V.

Data diametro transuersa, in ellipsi, circulo, sectionibus oppositis, & Hyperbola: inuenire quadratum æquale quartæ parti figuræ constitutæ ad dictam diametrum transuersam.

REperiatur diameter coniugata datæ diametro transuersæ, per coroll. nostra citata in explicatione præcedentis nostri corollarij quarti. & fiat quadratum sub semisse diametri coniugatæ inuentæ; hoc erit per nostrum 2. æquale quartæ parti figuræ quæ constituitur ad datam diametrum transuersam.

COROLL. NOSTRVM VI.

Data diametro transuersa in ellipsi, circulo, Hyperbola, & sectionibus oppositis: aliter reperire latus eius rectum.

COnsule figuras propositionis huius 42. si Hyperbola sola detur, fiat alia ei opposita: & per prop 49. lib. 2. ab extremis A & B. diametri transuersæ AB datæ, ponantur rectæ lineæ tangentes AC, BD; in sectionibus quidem oppositis ad partes diuersas diametri AB; in alijs verò sectionibus, ad easdem partes: tum assumpto quocumque alio puncto in linea curua sectionum datarum ad partes rectæ BD, puta E, ducatur alia recta linea EDKC, tangens sectionem, per prop. 49. lib. 2. hæc necessariò occurret in Hyperbola & oppositis sectionibus, diametro transuersæ in K inter centrum & verticem B, per coroll. propos. 31. lib. 1. quare occurret obuiæ tangenti BD in puncto D, per coroll. nost. 1. ad prop. 25. lib. 2. vel per axiom. 28. lib. 1. elem. & alteri tangenti BC in C, per 11. propos. Procli; sunt enim duæ prædictæ tangentes parallelæ inuicem, per prop. 31. lib. 2. At verò in circulo & ellipsi, hæc recta EDC, vel erit parallela diametro AB datæ, vel eam secabit productis ambabus, in puncto K; si primum, secabit etiam per prop. 11. Procli alias duas rectas tangentes AC, BD, in C & D; si secundum, secabit obuiam tangentes AC in C, per ax. 28. lib. 1. elem. & alteram BD in D, per cit. prop. 11. Procli. Iam verò concipiatur factum rectangulum sub duabus rectis AC, BD, per lemma 5. lib. 2. elem. quod reducatur ad quadratum per propos. 14. lib. 2. elem. cuius latus duplicetur, voceturque N. Denique per prop. 11. lib. 6. elemen. datis duabus rectis AB diametro, & recta N inuenta, reperiatur tertia proportionalis M. Dico rectam M esse latus rectum diametri AB transuersæ datæ.

Demonstratio. Si concipiamus rectam lineam EL parallelam cuilibet è tangentibus DB, AC, positam per prop. 31. lib. 1. elem. ipsæ tres rectæ EL, AC, BD, erunt parallelæ, per prop. 30. lib. 1. elem. & recta EL erit ordinatim applicata ad diametrum AB, per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. Quare per hanc propos. 43. rectangulum sub AC, BD, erit æquale quartæ parti figuræ ad AB diametrum constitutæ ac definitæ def. 1. ad lib. 2. hoc est factæ sub latere AB transuerso & recto proprio tranuersi AB: igitur etiam quadratum factum sub latere subduplo lateris N, erit etiam æquale dictæ quartæ parti figuræ. per ax. 1. lib. 1. elem. Cùm autem per coroll. nost. ad propos. 20. lib. 6. elem. quadratum lateris N sit quadruplum quadrati subduplæ rectæ ipsius lateris N; erit quadratum lateris N æquale figuræ sub AB diametro, & recta M, per prop. 9. lib. 5. elem. vel per prop. 17. lib. 6. elem. & quadratum rectæ subduplæ lateris N, seu rectangulum sub AC, BD, sit æquale quartæ parti figuræ sub AB diametro, & recta M; erunt latera figuræ constitutæ ad AB, ipsamet diameter AB transuersa, & recta M: Igitur per def. 1. lib. 2. recta M erit latus rectum respectu transuersi AB dati. Atque ita fecerimus imperatum, & rectè factum esse demonstrauerimus.

PROPOSITIO XLIII.

Si Hyperbolen recta linea contingat; abscindet ab asymptotis ad sectionis centrum, lineas continentes rectangulum æquale ei quod continetur lineis ab altera contingente abscissis ad verticem sectionis, qui est ad axem.

SVppositio. Hyperboles AB, sint duæ asymptoti DC, DE, procedentes ex natura propria ab centro D, ipsius Hyperboles; & axis eius DB procedens etiam ex centro D; vertex verò Hyperboles sit B in axe DB. Tùm duæ rectæ lineæ CAH, FBG, tangentes ipsam Hyperbolen, secunda quidem in puncto B prędicti verticis, prima verò in alio puncto A; quæ duæ rectæ lineæ tangentes occurrent vtrimque datis asymptotis per 3. propos. lib. 2. FBG quidem in F & G, & alia CAH in C & H, singulæque bifariàm diuidentur in punctis contactuum proprijs per cit. 3. propos. lib. 2. Dico autem rectangulum sub CD, DH, esse æquale rectangulo sub FD, DG; quæ rectangula fiunt ab portionibus asymptotorum sectarum ab dictis tangentibus.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. element. ex punctis A & B contactuum, agantur rectæ lineæ AK, BL, versus asymptotum AC, illam secantes in K & L, parallelæ alteri asymptoto DE; tùm aliæ duæ rectæ AM, BN parallelæ asymptoto AC, occurrentes in M & N alteri asymptoto DE; per prop. 31. Procli; erunt per prop. 30. lib. 1. parallelæ rectæ AK, BL inter se; tùm etiam parallelæ inter se, rectæ AM. BN. & parallelogrammum KDMA resultabit.

Demonstratio. In triangulo DCH, quia recta AK est parallela rectæ DH; erit per propos. 2. libri elem. recta CD proportionaliter in K, vti recta CA secta est; sed ex dictis in suppositione recta CAH diuisa est bifariàm in A, ergo etiam recta CKD diuisa erit bifariàm in K; ideoque CD dupla ipsius CK vel KD, sicuti CA dupla est ipsius AH. Porrò in parallelogrammo KDMA, per propos. 34. lib. 1. elem.

elem. sunt latera opposita KD, AM, æqualia; tùm etiam latera opposita AK, MD: igitur per prop. 7. lib. 5. elem. erit vt CD ad KD, sic CD ad AM; CD autem fuit ostensa dupla ipsius KD; ergo etiam CD dupla erit ipsius AM. Præterea quia in dicto triangulo DCH, recta AK parallela est rectæ DH, erit per coroll. prop. 4. & per def. 1. & per ipsam prop 4. lib. 6. element. vt CD ad DH, sic CK ad KA; ostendimus autem CD rectam esse duplam rectæ CK, ergo per prop. 14. lib. 5. elem. recta DH erit dupla rectæ KA: & per coroll. nostrum ad propos. 20. lib. 6. elem. rectangulum sub CD, DH, quadruplum erit rectanguli sub CK vel KD, & sub KA vel AM. Eodem artificio ex eisdem principijs, considerando in triangulo DFG, rectam BL parallelam basi DG, diuidentem latus FG bifariàm in B vti ostendimus in apparatu; & considerando parallelogrammum L D N B: probabimus rectangulum sub FD, DG, esse quadruplum rectanguli sub LB, BN. Verùm per prop. 12. lib. 2. rectangulum sub AM, KA, æquale est rectangulo sub LB, BN: ergo per 6. axiom. lib. 1. elem. rectangulum sub CD, DH, æquale erit rectangulo sub FD, DG. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Si Hyperbolen, vel oppositas sectiones, contingentes duæ rectæ lineæ, asymptotis occurrant: quæ ad occursus ducuntur, lineæ tactus coniungenti æquidistantes erunt.

SVppositio. Hyperbolen AB, vel duas oppositas sectiones A, B, contingant duæ rectæ lineæ CAHF, EBHG, in punctis A, B, asymptotis DC, DE profluentibus ex D centro sectionum datarum, occurrentes in G & F; E & C. Dico rectas GF, CE, nectentes puncta occursuum prædictorum, esse parallelas rectæ AB vnienti puncta contactuum A, B, prædicta.

Apparatus. In sectionibus oppositis duo erunt casus. Primus si recta linea AB, vniens puncta contactuum A, B, intersecerit per centrum D; tunc enim per prop. 31. lib. 2. datæ contingentes rectæ lineæ CAH, EBH, erunt æquidistantes; & prima occurret asymptotis in C & H; altera verò asymptotis in E & H, iuxta prop. 3. lib. 2. & bifariàm diuidentur, prima quidem in A, altera verò in B, per cit. prop. 3. Ducantur autem duæ rectæ lineæ EC, HH: resultabit quadrilaterum EHHC. Alter casus erit, si recta linea AB, vniens prædicta puncta A, B, contactuum non intersecerit per centrum D: tunc datæ rectæ lineæ contingentes conuenient in vnum punctum, puta H, per prop. 31. lib. 2. quod per coroll. nost. s. ad prop. 32. lib eiusdem 2. non erit centrum D, neque existet intra locum angulorum EDG, CDF continentium sectiones oppositas, neque in ipsis asymptotis: Iam verò per prop. 31. lib. 1. elem. ex centro D ponatur recta linea LDK parallela rectæ AB vnienti puncta contactuum, hæc per coroll. nost. ad prop. 37. lib. 2. occurret ambabus sectionibus, vni in L, alteri in K: per quæ puncta transmittendæ erunt rectę lineæ XLO, MKN, contingentes datas sectiones in L & K, per prop. 49. lib. 2. hæ duæ rectæ lineæ XLO, MKN, occurrent asymptotis in X & O, & in M & N, & bifariàm diuidentur in punctis L & K tactuum, per prop. 3. lib. 2. sed & erunt eædem rectæ lineæ XLO, MKN, parallelæ inuicem per prop. 31. lib. 2. eò quòd tactus L & K vniens recta LDK, incedat per centrum D. In Hyperbola autem vnica, datæ per duæ rectæ lineæ CAF, EBG, contingentes ipsam in A & B, & occurrentes asymptotis vtrimque in C & F, & in E & G, concurrent in punctum H, extra ipsam, & intra angulum CDE continentem ipsam, non autem in centro eius D, neque in eius asymptotis DC, DC, per coroll. nost. 1. ad prop. 25. lib. 2. Tùm per prop. 47. lib. 2. ducatur axis DL qui cùm sit diameter transibit per D centrum hyperboles, & secabit in L lineam eius curuam.

Porrò per propos. 49. lib. 2. ponatur recta linea ILK tangens in L ipsam Hyperbolam puncto verticis eius; occurret recta ILK, ambabus asymptotis in I & K, per 3. prop. lib. 2. Denique ductis AG, BF, resultabunt triangula AGF, CGF, quæ se habebunt vt bases CAF, AF, quarum CAF dupla est ostensa ipsius AF, ergo triangulum CAF duplum trianguli AGF. Eodemmodo probabitur triangulum EFG duplum trianguli BFG

Demonstratio in primo casu sectionum oppositarum. Quia sunt rectæ EBH, CAH, parallelæ ostensæ in apparatu, & duæ rectæ EDH, ADB, se mutuò decussant in centro D; erit per lemma 50. lib. 1. vt DB ad BE, sic DA ad AH; prima verò DB est æqualis tertiæ DA per prop. 30. lib. 1. ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secunda BE erit æqualis quartæ AH: ostendimus autem in apparatu rectam EBH diuisam esse in B bifariàm, & rectam CAH sectam esse bifariàm in A; ergo tàm dupla erit recta EBH, suæ semissis EB, quàm dupla recta CAH suæ semissis AH: ergo per prop. 15. lib. 5. elem. erit EBH ad CAH, sicut EB ad AH; EB autem probata est æqualis ipsi AH, ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. erunt æquales rectæ EBH, CAH, earum ergo semisses EB, BH, CA, AH, erunt æquales per axiom. 7. lib. 1. elem. sed sunt oppositæ EB, CA, tum BH, AH, parallelæ ostensæ

ostensæ in apparatu: ergo per prop. 33. lib. 1. elem. erunt rectæ EC, HH, parallelæ ipsi AB quod erat probandum.

Demonstratio in secundo casu sectionum oppositarum. Demonstrabuntur rectæ XLO, MKN, æquales vti in primo casu, cùm parallelæ sint ex apparatu. Sed & triangula XDO, MDN, erunt æquiangula ob parallelas XO, MN, & duas rectas XN, OM, se mutuò decussantes in D. per lem 50. lib. 1. per quod etiam erit vt XO ad OD, sic NM ad MD; tùm etiam vt XO ad XD, sic MN, ad ND; in his duabus comparationibus semper prima XO est æqualis tertiæ MN; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. secunda XD erit æqualis quartæ ND. tùm secunda OD erit æqualis quartæ MD: ergo propter æquales longitudines & æquales altitudines per lemma 49. lib. 1. rectangulum sub XD, DO, erit æquale rectangulo sub ND, DM: est autem per præcedentem propositionem rectangulum sub ED, DG, æquale rectangulo sub XD, DO; & rectangulum sub CD, DF æquale rectangulo sub ND, DM: ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. rectangulum sub CD, DF, æquale erit rectangulo sub ED, DG: quare per prop. 14. lib. 6. element. erit CD ad DE, sicut GD ad DF; & quia duo triangula EDC, GDF, habent latera proportionalia prædicta, circa æquales angulos ad verticem D iuxta prop. 15. lib. 1. elem. erunt per prop. 6. lib. 6. elem. dicta triangula æquiangula; ideóque angulus DGF, æqualis angulo ECD: quare per prop. 27. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ EC, GF, parallelæ. Cùm igitur in triangulo EHC, recta GF sit parallela basi EC, erit per 2. prop. lib. 6. elem. vt HG ad GE, sic HF ad FC; vt autem GE ad GB in ratione dupli, sic FC ad FA, (ostendimus enim in apparatu rectam GE duplam esse semissis suæ GB, & rectam FC duplam esse semissis suæ FA;) igitur ex æqualitate per prop. 22. lib. 5. elem. erit vt HG ad GB, sic HF ad FA: quare per 2. prop. lib. 6. elemen. recta GF erit parallela ipsi AB: cùmque sint ostensæ parallelæ rectæ GF, CE, erit per prop. 30. lib. 1. elem. recta CE parallela ipsi AB. Atque ita ostenderimus rectas CE, GF, esse parallelas rectæ AB in hoc casu secundo sectionum oppositarum.

Demonstratio in Hyperbola. Per propositionem præcedentem rectangulum sub CD, DF, æquale erit rectangulo sub ID, DK; & rectangulum sub ED, DG, æquale rectangulo sub ID, DK; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. rectangulum sub CD, DF, æquale erit rectangulo sub ED, DG: quare per propos. 14. lib. 6. elem. erit vt CD ad DE, sic GD ad DF; ergo quia in duobus triangulis CDE, GDF, circa communem angulum D, sunt latera proportionalia prædicta, erunt per prop. 6. lib. 6. element. anguli DEC, DFG, æquales, homologis lateribus hoc est antecedentibus suppositi; CD, GD: quare per prop. 28. lib. 1. element. erunt parallelæ rectæ lineæ GF, CE. Quoniam autem duo triangula GCF, FEG, sunt inter duas parallelas GF, CE, & supra basim communem ipsa erunt æqualia per prop. 37. lib. 1. elemen. & quia in apparatu probauimus triangulum AGF esse semissem trianguli GCF, & triangulum BFG esse semissem trianguli FEG; erunt triangula AGF, BFG, æqualia: sed sunt supra communem basim GF, & ad easdem partes; ergo per prop. 39. lib. 1. elemen. erunt inter parallelas easdem GF, AB. Probauimus autem rectam CE esse æquidistantem rectæ GF; ergo per prop. 30. lib. 1. elem. etiam recta CE erit parallela rectæ AB. Atque ita demonstratum erit propositum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Si Hyperbolen vel sectiones oppositas duæ rectæ lineæ contingentes, asymptotis occurrant vtrimque: rectangula duo sub asymptotorum partibus inter tangentes & centrum, sunt æqualia.

DVo sunt casus in sectionibus oppositis, vt in propositione; aut enim recta BDA nectens puncta A & B contactuum rectarum CAH, EBH, tangentium datas oppositas sectiones, & occurrentium vtrimque in E & H, & C & H, asymptotis EDH, CDH procedentibus è centro D sectionum, transit per ipsum centrum D, vt in prima figura videre est, aut non transit, per centrum D: si primum dico rectangulum sub CD, DE, esse æquale rectangulo sub HD, DH. si secundum vt in secunda figura spectare licet: dico rectangulum sub CD, DF, esse æquale rectangulo sub ED, DG. At verò in hyperbola sola: dico rectangulum sub CD, DF, esse æquale rectangulo sub ED, DG, consulendo tertiam figuram.

Demonstratio. in primo casu sectionum oppositarum. Quia ostendimus in demonstratione huius propositionis in hoc casu, duas tangentes EBH, CAH, esse parallelas, tùm parallelas esse alias duas rectas EC, HH; erit parallelogrammum EHHC; eiusque diagonales duæ EDH, CDH, rectæ, se mutuò bifariàm in D intersecabunt per lemma 5. ad lib. 2. quare per lemma 49. lib. 1. rectangulum sub CD, DE, erit æquale rectangulo sub HD, DH.

Demonstratio in secundo casu sectionum oppositarum, & in sola Hyperbola. Quia per hanc propositionem duæ rectæ GF, CE, sunt parallelæ rectæ AB, erunt parallelæ inter se: ergo triangula FEG, GCF, habentia communem basim GF, & existentia intra easdem parallelas GF, CE, erunt per prop. 37. lib. 1. element. æqualia: habent autem in secundo casu sectionum oppositarum æquales angulos ad verticem D, iuxta prop. 15. lib. 1. elem. & in hyperbola sola habent communem angulum D; igitur

D; igitur per prop. 15. lib. 6. elemen. erit vt CD ad DE, sic GD ad DF: quare per prop. 16. lib. 6. elem. rectangulum sub CD, DF, erit æquale rectangulo sub DE, DG. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLV.

Si in Hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel. oppositis sectionibus; ab extremo axis, lineæ ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ad axem, ex vtraque parte; quod in Hyperbola quidem & sectionibus oppositis excedat figura quadrata; in ellipsi verò deficiat; & ducatur linea sectionem contingens, occurrensque eis quæ sunt ad rectos angulos. Lineæ quæ ab occursibus ducuntur ad puncta ex comparatione facta, angulos rectos ad ea efficient.

Suppositio. Singularum sectionum propositarum, sit axis AB; ad cuius extrema A, B, sint ipsi perpendiculares rectæ AC, BD, sed in hyperbola & oppositis sectionibus sint ad oppositas partes axeos; in alijs verò ad easdem partes: & ex vtraque parte per lemmata ab 21. ad 22. inclusiuè comparetur rectangulum sub AF, FB, & aliud sub AG, GB, æquale parti figuræ, ad dictum axem, iuxta naturam ipsarum sectionum; excedens quidem figura quadrata in Hyperbola, & oppositis sectionibus; deficiens verò figura quadrata in ellipsi: notenturque puncta comparationum F, G, in ipso axe AB, iuxta lemmata particularia dictis sectionibus, ab 24. vsque ad 26. inclusiuè. Deinde sit alia recta contingens CED vel EDC in singulis sectionibus, contingens, inquam, in puncto E, occurrensque dictis AC, BD, rectis perpendicularibus axi in punctis D & C: ex quibus ad puncta F & G, comparationum, rectæ lineæ CF, CG; DF, DG, transmittantur. Dico has rectas efficere angulos rectos in punctis F & G comparationum, nimirum angulos rectos CFD, CGD.

Demonstratio. Ex suppositione rectangulum sub AF, FB, est æquale quartæ parti figuræ ad axem AB; & per prop. 42. rectangulum sub AC, BD, est æquale eidem quartæ parti dictæ figuræ ad axem: igitur per 1. axio. lib. 1. elem. rectangulum sub AF, FB, erit æquale rectangulo sub AC, BD. Quare per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt CA ad AF, sic FB ad BD; sunt verò ex suppositione anguli CAF, DBF, recti, ideoque æquales per 12. ax. lib. 1. elem. comprehensi ab assignatis lateribus proportionalibus: ergo per prop. 6. lib. 6. elem. erunt triangula CAF, DBF, æquiangula; ideoque anguli CFA, BDF, suppositi lateribus homologis æquales; tùm alij duo ACF, BFD, æquales. Et quia in dictis triangulis anguli in A & B, sunt recti, reliqui duo simul sumpti erunt æquales vni recto per propos. 32. lib. 1. element. in quolibet dictorum triangulorum; quare in triangulo rectangulo FAC, duo simul anguli in F & C, erunt æquales vni recto; probauimus autem angulum BFD esse æqualem angulo ACF; bis æqualibus addendo communem angulum CFA, in hypetbola & oppositis sectionibus; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. duo simul anguli CFA, ACF, æquales duobus simul angulis CFA, BFD, seu toti CFD composito adæquatè ex duobus postremis angulis; constat autem duos priores CFA, ACF, esse simul sumptos æquales vni recto: ergo etiam per 1. ax. lib. 1. elem. totus angulus CFD rectus erit. At verò in ellipsi, quandoquidem per coroll. nost. 2. ad propos. 13. lib. 1. elem. tres anguli CFA, CFD, BFD, simul sumpti sunt æquales duobus rectis, si ex illis detrahamus duos simul angulos CFA, BFD, æquales vni recto, (sunt enim in triangulo CAF rectangulo probati anguli CFA, ACF, æquales vni recto; & angulo ACF ostensus angulus æqualis BFD; & angulo CAF demonstratus angulus BDF: ergo si æqualibus angulis ACF, BFD, addatur communis angulus CFA, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. duo simul anguli ACF, CFA, æquales duobus simul angulis BFD, CFA; sed duo primi simul sumpti sunt probati æquales vni recto; ergo etiam alij simul sumpti CFA, BFD, erunt æquales vni recto) an non relinquetur per 3. ax. lib. 1. elem. angulus CFD rectus. Ex eisdem principijs, eodem discursu facto probabitur angulus CGD etiam rectus: quare propositum demonstratum erit, in Hyperbola, ellipsi & oppositis sectionibus.

Suppositio in circulo. Sit axis AB qui est diameter ex eius natura; sintque perpendiculares CA, DB ad eius extrema A, B: tùm facta comparatione iuxta propositionem, puncta duo comparationum concurrent in centro O per lemmata 23. & 27. Ductaque sit recta CED contingens circulum in E, & occurrens dictis rectis AC, BD, illi in C, huic in D. Denique ductæ sunt rectæ CO, DO, ab dictis occursibus C, D, ad punctum seu centrum O, quod æquiualet duobus punctis comparationum. Dico rectas CO, DO, efficere angulum rectum COD.

Demonstratio. Per coroll. propos. 16. lib. 3. elem.

elem. rectæ CA, DB, contingent circulum in A & B: & si ducatur recta OE, ipsa erit perpendicularis tangenti rectæ CED per propos. 18. lib. 3. element. Habemus autem ex eodem extremo puncto C, duas rectas CA, CE, tangentes circulum, ergo per coroll. 2. prop. 36. lib. 3. elem. istæ duæ rectæ CA, CE, erunt æquales: eodem modo erunt æquales duæ rectæ DE, DB. Quare cùm in triangulis CAO, CEO, sint duo latera CA, AO, respectiuè æqualia duobus lateribus CE, EO, & contineant æquales angulos rectos in A & E; habebunt per 4. prop. lib. 1. elem. angulos ACO, ECO æquales; tùm alios angulos AOC, EOC æquales. Ex eisdem principijs in triangulis OBD, OED erunt anguli EOD, BOD, æquales, tùm anguli EDO, BDO. Iam verò quia ex suppositione rectangulum sub AO, OB est æquale quartæ parti figuræ; & per prop. 42. rectangulum sub AC, BD, est eidem quartæ parti æquale; erunt duo dicta rectangula æqualia per 1. axiom. lib. 1. elem. quare per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt CA ad AO, sic OB ad BD; ergo cùm in triangulis CAO, OBD, sint circa rectos angulos æquales latera proportionalia, erunt per 6. propos. lib. 6. elem. eorum anguli AOC, BDO, æquales, tum alij duo anguli æquales BOD, ACO: ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. angulus EOC æqualis ostensus angulo AOC, æqualis erit angulo EDO probato æquali ipsi BDO. Quod si his duobus angulis æqualibus EOC, EDO, addatur communis ECO, fient per 2. axiom. lib. 1. elem. duo anguli simul sumpti ECO, EOC, æquales duobus angulis simul sumptis ECO, EDO, hoc est duobus simul sumptis DCO, CDO; sed duo primi existente recto angulo in E, sunt simul sumpti æquales vni recto per propos. 32. lib. 1. elemen. ergo duo simul postremi etiam DCO, CDO, erunt æquales vni recto per 1. ax. lib. 1. elemen. igitur in triangulo COD, angulus COD, reliquus rectus erit, per prop. 32. lib. 1. elem.

PROPOSITIO XLVI.

Iisdem positis. lineæ coniunctæ, æquales facient angulos ad contingentes.

SVppositio sit eadem quæ in superiore propositione, in hyperbole & ellipsi: sintque lineæ rectæ CF, CG, coniungentes occursum C tangentis rectæ DEC vel EDC, & perpendicularis CA ad axem AB, cum puncto comparationis F: tùm etiam aliæ duæ rectæ DF, DG, coniungentes punctum D occursus dictæ rectæ CED vel CDE tangentis, & perpendicularis DB ad eundem axem AB, cum alio puncto G comparationis. Quia verò recta omnis linea perpendicularis axi sectionum & circuli in extremo eius, contingit sectionem vel circulum, iuxta coroll. nost. 11. ad prop. 42. lib. 2. ideo Apollonius in hac propositione supponit rectas lineas AC, BD, positas in superiore propositione perpendiculares axi AB, in extremis eius punctis, sectiones vel circulum contingere, quod explicare à nobis oportebat; vocatque eas tangentes. Proponit autem demonstrandum quod rectæ prædictæ CF, CG, efficiant cum tangentibus DEC, AC, angulos æquales; videlicet FCA, GCD; tùm etiam quod duas rectas alias DG, DF, cum tangentibus CED, BD, efficiant angulos æquales CDF, BDG.

Apparatus in hyperbola & ellipsi positis iisdem figuris superioris propositionis. Quia in superiore propositione demonstrauimus angulos CFD, CGD, esse rectos, suppositos eidem lateri communi DC, si bifariàm diuidatur hoc latus DC, in H, per prop. 10. lib. 1. elem. centroque H describatur circulus occultus, transibit per extrema C, D, dicti lateris, & puncta F & G, dictorum angulorum rectorum, per coroll. nost. ad prop. 33. lib. 3. elem.

Demonstratio. Probauimus in antecedente propositione angulos ACF, BFD esse æquales; Iam verò quia angulus BCD, vel GCD, est in eodem segmento circuli facti, cum angulo BFD seu GFD, erunt per prop. 21. libri 3. elemen. æquales: ergo per axiom. 1. lib. 1. element. duo anguli FCA, GCD, erunt æquales inter se. Similiter quia in demonstratione superioris propositionis, duo anguli BDG, AGC sunt æquales ostensi; & per propositio. 21. libri 3. element. duo anguli CDF, FGC vel AGC, sunt æquales: erit per 1. axiom. lib. 1. element. angulus CDF, æqualis angulo BDG.

Suppositio in circulo sit eadem quæ in præcedente propositione. Dico angulos OCA, OCE esse æquales; tùm angulos ODE, ODB esse æquales; factos nimirum ab tangentibus CA, CE, tum ED, BD, & coniungentibus CO, DO.

Hoc verò probauimus in circulo cùm demonstraremus in circulo propositionem superiorem.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Iisdem positis. Angulus in ellipsi & hyperbola, AGC vel CGF, est æqualis angulo BDG: & in circulo angulus AOC, æqualis angulo BDO.

HOc enim demonstratum est; primum quidem in hac propositione; alterum verò in superiore propositione quoad circulum.

PROPOSITIO XLVII.

Iisdem positis. Linea ab occursu coniunctarum, ad tactum ducta, perpendicularis est ad contingentem.

Suppo-

SVppositio in datis sectionibus si excipias circulum; sit eadem quæ in præcedēte propos. 46. tùm de nouo rectæ lineæ CG, FD, coniungentes puncta F & G comparationum cum occursibus C & D, rectarum AC, BD, & tangentis DEC, sibi mutuò occurrant in puncto H: rectaque HE ab hoc occursu H ad E punctum contactus sectionum & circuli datarum ab tangente DEC. Dico hanc rectam HE esse perpendicularem rectæ tangenti DEC in puncto E.

Apparatus, excipiendo circulum. Si ita non sit, poterimus per prop. 12. lib. 1. ele. ex puncto H demittere rectam lineam HL perpendicularem ad rectam EDC. Iam verò quia per propos. 46. superiorem, angulus CDF est æqualis angulo GDB, & per prop. 15. lib. 1. ele. in hyperbola & oppositis sectionibus, angulo LDH; erit per ax. 1. lib. 1. ele. angulus GDB æqualis angulo LDH; sunt autem duo anguli recti DBG, DLH, primus ex suppositione superioris propositionis, alter per aduersarij constructionem; ergo per 12. ax. lib. 1. ele. illi duo anguli recti erunt æquales; reliqui igitur anguli DHL, DGB, erunt æquales per 3. coroll. nost. ad prop. 32. lib. 1. elem. in triangulis DBG, DLH; ideoque æquiangula ipsa triangula; quare per lem 50. lib. 1. erit vt GD ad DB, sic DH ad DL; & vt GD ad DH, sic DB ad DL. At verò in ellipsi; quia per suppositionem sunt duo anguli recti HLD, GBD in eisdem triangulis DBG, DLH; & per propos. sup. duo alij anguli CDF vel LDH, BDG, sunt æquales; reliqui eorum anguli tertij LHD, DGB, erunt æquales per cit. nost. coroll. 3. ad propos. 32. lib. 1. element. ideoque dicta triangula æquiangula; & per lemma 50. vt GD ad DB, sic DH ad DL; & vt GD ad DH sic DB ad DL. Et quia etiam in triangulis FCH, GDH, anguli CFH, HGD, sunt recti per prop. 45. ideoque æquales per 12. ax. lib. 1. ele. & in ellipsi ac circulo anguli CHF, DHG, sunt æquales per 15. prop. lib. 1. ele. & in hyperbola seu oppositis sectionibus angulus CHF est idē cum angulo DHG: erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui tertij anguli dictorum triangulorum æquales; ideoque ipsa æquiangula; & per lem. 50. lib. 1. vt GD ad DH, sic FC ad CH, & quoniam in triangulis AFC, LCH, anguli FAC, CLH, ponuntur recti æquales, & anguli FCA, LCH sunt æquales per superiorem propositionem; reliqui eorum tertij anguli æquales erunt per coroll. nost. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. ideoque ipsa triangula æquiangula; quare per lem. 50. lib. 1. erit vt FC ad AC, sic CH ad CL; & vt FC ad CH, sic AC ad CL; ostendimus autem esse GD ad DH, vt FC ad CH; tùm esse vt GD ad DH, sic DB ad DL; quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt FC ad CH, sic DB ad DL; & per eandem prop. 11. vt DB ad DL, sic AC ad CL; & vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. vt DB ad AC, sic DL ad CL. Præterea quia in Hyperbola & oppositis sectionibus, & in ellipsi & circulo, duæ rectæ lineæ CA, DB, sunt perpendiculares axi AB, erunt per prop. 28. lib. 1. elem. duo anguli DBA, CAB, recti duo, & propterea parallelæ ipsæ rectæ: igitur per lemma 50. ad lib. 1. duo triangula DBK, CAK, æquiangula & similia; eritque vt DB ad BK, sic AC ad KA; & vt DB ad AC, sic BK ad KA: quare eùm probauerimus esse vt DB ad AC, sic DL ad CL, erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt DL ad CL, sic BK ad KA. Iam verò ex puncto E cōtactus, agatur per prop. 31. lib. 1. ele. recta linea EM, parallela ipsi AC tangenti; hæc recta EM per prop. 11. Procli occurret in M, axi AB producendo si opus sit; eritque ordinatim applicata ipsi axi AB, per coroll. nost. 7. ad prop. 48. lib. 1. vnde per propos. 36. lib. 1. erit vt AK ad KB, ita AM ad MB; & inuertendo per prop. 4. coroll. lib. 5. elem. vt KB ad AK, sic MB ad AM: verùm quia EM posita est parallela ipsi AC perpendiculari ad AB, sicuti etiā est perpendicularis recta DB, ipsi AB, sintque per propos. 28. lib. 1. elem. parallelæ AC, DB; erit per prop. 30. lib. 1. ele. recta EM parallela ipsi DB; eritque in ellipsi & circulo in triangulo BKD, per lem. 50. lib. 1. in quo duæ rectæ CA, EM, sunt parallelæ basi BD; vt BM ad MA, sic DE ad EC. In Hyperbola verò & oppositis sectionibus ducta recta MC, producenda erit recta DB vsque ad N punctū rectæ MC; quare cùm sit recta BN parallela ipsi AC basi, trianguli AMC; erit per lem. 50. lib. 1. vt MB ad BA, sic MN ad NC; & vt MB ad MA, sic MN ad MC: sed etiā quia est in triangulo ECM, recta DN parallela basi EM; erit per lem. 50. cit. vt NM ad MC, sic DE ad EC: ergo per prop. 11. lib. 5. ele. erit vt MB ad MA, sic DE ad EC. Quia igitur ostendimus in hoc apparatu esse DL ad LC, vt DB ad AC; & DB ad AC vt BK ad KA; & BK ad KA, vt MB ad MA; & MB ad MA, vt DE ad EC: erit per prop. 11 lib. 5. ele. DL ad LC, vt DE ad EC: quare per prop. 4. lib. 5. ele. corollarij, erit vt LC ad DL, sic EC ad DE; & componendo per prop. 18. lib. 5. elem. vt CD ad DL, sic CD ad DE.

Demonstratio. Quandoquidem ex positione aduersarij HE recta non est ad angulos rectos in E, tangēti EDC, vel DEC, sed alia introducta HL perpendicularis dictæ tangenti, siue cadat punctum L, ad quamcumque partem rectæ EH, supra dictam tangentem rectam DEC, vel EDC; demonstrauimus in apparatu esse CD ad DL, sicut CD ad DE; erunt per prop. 9. lib. 5. ele. duæ rectæ DL, DE, æquales, pars toti, contra 8. ax. lib. 1. elem. Absurdum hoc indicat nullam aliam rectam diuersam ab HE, esse perpendicularem rectæ tāgenti DEC, vel EDC, sicuti fuit propositum.

Suppositio in circulo, sit eadem quæ in propos. 45. & 46. consulendo figuram circuli propos. 45. & quia vti iam diximus in suppositio-

ne quoad circulum in propositio. 45. puncta comparationum sunt in centro O; lineæ coniungentes superioris propositionis concurrent in centro O; quare recta OE erit probanda perpendicularis contingenti CED.

Demonstratio patet ex propositio. 18. lib. 3. elem.

PROPOSITIO XLVIII.

Iisdem positis. Ostendendum est lineas quæ à tactu ducuntur ad puncta ex comparatione facta, æquales continere angulos ad contingentem.

Suppositio quoad Hyperbolam, oppositasque sectiones, & ellipsim, est eadem quæ in præcedente propositione, superiore 47. ideoque etiam in ipsius figuris similibus ductæ sint à puncto E contactus, rectæ lineæ EF, EG, ad puncta F, G, ex comparatione facta. Dico angulos CEF, GED, esse æquales, factos ab contingente DEC, vel EDC, & ductis rectis EG, FE.

Apparatus. Quandoquidem angulus DEH est rectus per præcedentem propositionem, & angulus DGC, rectus per prop. 45. eisque subtenditur communis recta DH; si hæc bifariàm diuidatur in I, per 10. prop. lib. 1. elem. & centro I, interuallo ID, vel IH, circulus occultus per puncta describatur, eius circumferentia incedet per puncta E, H, G, D, iuxta coroll. nost. ad prop. 33. lib. 3. elem. & anguli æquales GHD, GED, per prop. 21. lib. 3. elem. Quia etiam angulus CEH est rectus per superiorem propositionem, & angulus CFH est rectus ostensus in prop. 45. similiter si bifariàm in P diuidatur recta CH subtendens illos duos angulos rectos, & puncto P medio vt centro circulus describatur, circumferentia illius transibit per puncta C, F, H, E, per citatum coroll. nost. ad prop. 33. lib. 3. elem. eruntque per propos. 21. lib. 3. elem. anguli CEF, CHF in eodem segmento circuli nunc facti, æquales.

Demonstratio in Hyperbola & sectionibus oppositis. Quandoquidem per apparatum, est angulus CHF, seu GHD, æqualis angulo CEF; & in circulo primo, centro I descripto, angulo GED est æqualis angulo GHD seu angulo CHF, per prop. 21. lib. 3. elem. erit per 1. axio. lib. 1. elem. angulus CEF æqualis angulo GED.

Demonstratio in ellipsi. Quia per prop. 15. lib. 1. elem. angulus GHD est æqualis angulo CHF; & probauimus in apparatu angulum CEF esse æqualem angulo CHF, & angulum GHD æqualem angulo GED: erunt per 1. ax. lib. 1. elem. anguli CEF, GED, æquales.

Suppositio quoad circulum, consulendo eius figuram propositam in propos. 45. In qua quia ostendimus puncta comparationum confluere in centro O, vnica linea erit EO quæ à tactu E ad puncta comparationum ducuntur. Quare probandum est æquales esse angulos OEC, OED.

Hoc verò manifestum est ex prop. 18. lib. 3. elem. nam recta OE cùm sit perpendicularis tangenti CED, certum est per defin. 10. lib. 1. elem. angulos OEC, OED, esse æquales. Atque ita tota propositio demonstrata erit.

PROPOSITIO XLIX.

Iisdem positis. Si ab aliquo punctorum ad contingentem perpendicularis agatur: quæ à facto puncto ducuntur ad axis extrema, rectos angulos continebunt.

Positis eisdem quæ in superioribus propositionibus 45. 46. 47. 48. Ex puncto quolibet comparationum axeos AB producti vel non producti, puta G, sit recta linea GH perpendicularis ad tangentem rectam EC productam vel non productam: tum ex puncto H ductæ rectæ lineæ HA, HB, ad extrema axeos AB. Dico illas efficere angulum rectum AHB.

Apparatus in sectionibus; excepto circulo. Quandoquidem ex suppositione facta in prop. 45. Angulus DBG, est rectus; & ex suppositione huius propositionis, angulus DHG est rectus, quibus subtenditur eadem recta DG; si circa diametrum DG describatur circulus, eius circumferentia transibit per puncta G, D, H, B, per coroll. nost. ad prop. 33. lib. 3. elem. Simili modo quia ex suppositione facta in proposit. 45. angulus CAG est rectus, & datur in hac propositione angulus CHG rectus, quibus angulis rectis subtensa est eadem chorda CG; circulus descriptus circa diametrum CG, transibit per puncta C, A, G, H, per citatum corollar. nost. ad propofit. 33. lib. 3. element. & per propos. 21. lib. eiusdem 3. elem. anguli AGC, AHC, æquales erunt. His paratis.

Demonstratio. Quia anguli GHB, GDB, sunt in eodem segmento circuli primò descripti, ipsi erunt æquales per prop. 21. lib. 3. elem. & quia per coroll. nost. ad prop. 46. angulus AGC est æqualis angulo BDG: erit per 1. ax. lib. 1 ele. angulus GHB æqualis angulo AGC: sed etiam ex apparatu angulus AHC est æqualis angulo AGC; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. angulus AHC æqualis erit angulo GHB. Quare in Hyperbola si his duobus postremis angulis addatur communis angulus BHC; fient per 2. ax. lib. 1. elem. anguli CHG, AHB, æquales: est autem angulus rectus CHG ex datis; ergo etiam

etiam alter AHB erit rectus. Quod erat demonſtrandum in Hyperbola & oppoſitis ſectionibus. In ellipſi autem, ſi eiſdem angulis ſupradictis GHB, AHC, oſtenſis æqualibus adijciatur communis angulus AHG; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. duo æquales anguli CHG, AHB; ſed ex datis angulus CHG eſt rectus, ergo etiam alter ei æqualis erit rectus, nimirum angulus AHB. quod erat probandum in ellipſi.

Quoad circulum attinet, conſulatur figura eius propoſita in prop. 45. in qua quia puncta comparationum confluunt in centrum O; manifeſtum eſt rectam lineam ab O demiſſam perpendicularem tangenti CED, incidere in punctum E contactus; atque ita eſſe perpendicularem tangenti CED, per prop. 18. lib. 3. elem. Si enim non incideret in punctum E, ſed in alio I puncto; poſt ductum rectæ OE, quæ erit per prop. cit. 18. lib. 3. elem. erit perpendicularis, rectæ CED: habebimus duas rectas OE, & aliam OI introductam, ex eodem puncto, perpendiculares eidem rectæ CED; contra coroll. noſt. ad prop. 17. lib. 1. elem. hoc abſurdum condemnat poſitionem contradicentem propoſito, & adſtruit ipſum. Atque ita euidens erit tota propoſitio.

PROPOSITIO L.

Iiſdem poſitis. Si à centro ſectionis ducatur linea contingenti occurrens, æquidiſtanſque lineæ per tactum, & per vnum punctorum ductæ: dimidio axis æqualis erit.

Vppoſitio in Hyperbola & oppoſitis ſectionibus, & ellipſi, ſit eadem quæ in propoſitionibus ſuperioribus à 45. ad 49. incluſiuè. Et præterea ducta ſit recta ex puncto E contactus ad F ad G punctum comparationis, verbi gratia EF: tùm ex centro O ſectionis emiſſa recta linea OR æquidiſtans prædictæ EF, occurrens in R rectæ lineæ DEC, vel EDC tangenti. Dico rectam OR eſſe æqualem dimidio axis AB, ſeu rectæ OA, vel OB; nam per prop. 30. lib. 1. bifariàm in centro O diuiditur.

Apparatus in Hyperbola vel oppoſitis ſectionibus. Quandoquidem per prop. 24. lib. 1. recta linea ECD contingens Hyperbolam A datam in puncto E, occurrit axi AB in puncto K; & quidem infra centrum O, per coroll. prop. 31. lib. 1. ducere poterimus rectas lineas EG, AR, RG, RB. Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. ex alio puncto G comparationis, ponatur recta linea GM parallela ipſi rectæ EF, quam ſecabit in M recta tangens ECD producta vltra D, per prop. 11. Procli. Cùmque eidem rectæ EF, fuit parallelæ rectæ OR, GM; erunt per prop. 30. lib. 1. elem. tres rectæ lineæ GM, OR, EF, æquidiſtantes inter ſe. Denique producendo rectam RO vltra centrum O, occurret in N rectæ EG, per propoſ. 11. Procli.

Demonſtratio in Hyperbola vel oppoſitis ſectionibus. Quia per lemma 21. vel 24. rectangulum ſub AF, FB, æquale eſt rectangulo ſub AG, GB; erunt per lemma 4. ad lib. 2. duæ rectæ lineæ AF, GB, æquales: Eſt verò per prop. 30. lib. 1. recta AO æqualis rectæ BO; igitur ſi his æqualibus addantur æquales prædictæ AF, BG, vti oportet; fient per 2. axio. lib. 1. elem. æquales rectæ FO, GO. Sed in triangulo EGF, eſt parallela recta NO, baſi EF, ex apparatu, ergo per 2. prop. lib. 6. elem. erit vt FO, ad OG, ſic EN ad NG; FO autem eſt æqualis ipſi OG oſtenſa, ergo per coroll. noſt. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. recta EN erit rectæ NG, ſeu tota EG erit bifariàm diuiſa in N. Inſuper quia in triangulo GEM, recta NR eſt per apparatum parallela baſi GM; erit per prop. 2. lib. 6. elem. vt EN ad NG, ſic ER ad RM; EN autem eſt æqualis ipſi NG probata; ergo per coroll. noſt. a. cit. ad prop. 14. lib. 5. elem. recta ER erit æqualis rectæ RM, ſeu quod idem eſt recta EM diuiſa erit bifariàm in R. Iam verò quia in propoſitione 48. probauimus angulum CEF æqualem eſſe angulo DEG; & ob incidentiam rectæ EM in parallelas rectas GM, EF, per prop. 29. lib. 1. elem. ſunt anguli CEF, EMG æquales; erit per 1. axio. lib. 1. element. angulus DEG, ſeu MEG, æqualis angulo EMG: quarè per prop. 6. lib. 1. elem. rectæ GE, GM, æquales erunt: ideoque triangulum iſoſceles EGM; cuius baſis EM cùm ſit oſtenſa bifariàm diuiſa in puncto R, erit recta GR perpendicularis baſi EM, & anguli GRM, GRE, recti & æquales, per coroll. noſt. 1. ad prop. 32. lib. 1. elem. tùm per def. 10. & 11. axiom. eiuſdem lib. 1. element. Verùm per prop. 49 ſuperiorem angulus ARB rectus eſt; ergo ſi circa diametrum BA circulus deſcribatur centro O puncto medio probato diametri ſeu axeos Hyperboles vel oppoſitarum ſectionum, circumferentia illius incedet per puncta A, R, B, per coroll. noſt. ad prop. 33. lib. 3. elem. ſed ex natura circuli, recta OR eſt æqualis ſemidiametro OA, vel OB, hoc eſt ſemiſſi axeos AB dati in Hyperbola vel oppoſitis ſectionibus. Igitur recta OR educta ex centro Hyperboles ad tangentem ECD, æquidiſtans rectæ EF eductæ ex puncto E contactus ad punctum F comparationis; erit æqualis dimidio axeos Hyperboles vel oppoſitarum ſectionum.

Antequam deſcendamus ad apparatum in ellipſi, vel circulo; quia recta contingens ipſam poteſt eſſe vel parallela axi, vel non parallela, duo caſus erunt diuerſi, primuſque

erit quando recta DEC contingens non est parallela axi AB, eumque secat producta extra sectionem in K. Alter verò casus, quando erit parallela.

Apparatus in ellipsi iuxta primum casum. Ducantur rectæ EG, AR, RG, RB. Tùm per prop. 31. lib. 1. element. ex alio puncto G comparationis ponatur recta linea GM parallela rectæ EF datæ coniungentis punctum tactus E, cum assumpto F puncto comparationis, secabitur in M ab tangente KCED, per prop. 11. Procli. Et quia recta OR datur etiam parallela eidem rectæ EF; erunt per prop. 30. lib. 1. elem. tres rectæ lineæ EF, RO, MG, æquidistantes inter se. Sed & recta EG secabitur in N ab recta RO obuia per cit. prop. 11. Procli.

Demonstratio in ellipsi iuxta primum casum. Quia per prop. 30. lib. 1. duæ rectæ OA, OB, sunt æquales, hoc est semisses totius axeos AB; & puncta F, G, æqualiter remota sunt ab centro O, & ab verticibus A, B; erunt rectæ OF, OG, æquales, seu tota FG recta bifariàm in O diuisa; tùm etiam rectæ AF, BG, æquales, ex natura distantiarum æqualium. Iam verò quia in triangulo EGF, recta NO est parallela ex apparatu rectæ basi EF, erit per prop. 2. lib. 6. elem. recta EG bifariàm secta in N, sicuti est bifariàm diuisa recta FG in O. Et quoniam etiã in triangulo GEM, recta RN est æquidistans basi MG; erit per cit. prop. 2. lib. 6. elem. recta EM bifariàm diuisa in R, sicuti bifariàm diuisa est N recta EG. Iam verò quia per prop. 48. angulus CEF æqualis est angulo DEG, & per prop. 29. lib. 1. elem. angulus CEF æqualis angulo EMG; erit per 1. axiom. lib. 1. element. angulus DEG æqualis angulo EMG: quare per 6. prop. lib. 1. elem. duo latera GE, GM, erunt æqualia; & triangulum EGM isosceles: & quia eius basis bifariàm secari ostensa est in puncto R, ideoque recta GR erit perpendicularis ipsi rectæ seu basi EM, per coroll. nost. 1. ad prop. 32. lib. 1. elem. & anguli recti deinceps ad R, per definit. 10. lib. 1. elem. Et quoniam per superiorem propos. 49. angulus ARB est rectus; si circa axem AB subtensum dicto angulo ARB recto fiat circulus centro O quod est ostensum medium eius punctum, circumferentia circuli facti incedet per puncta A, R, B, iuxta coroll. nost. ad prop. 33. lib. 3. elem. Vnde ex natura circuli OR erit æqualis semissi OA vel OB axeos, sicuti fuit propositum.

Apparatus in ellipsi iuxta secundum casum. Ducantur rectæ EG, AR, RG, RB: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto G agatur recta linea GM parallela ipsi EF, hæc GM occurret tangenti CED in M productæ per prop. 11. Procli. Quia verò datur recta OR parallela eidem EF; erunt per prop. 30. lib. 1. elem. tres rectæ parallelæ EF, RO, MG. Sed & recta EG secabit in N obuiam rectam RO.

Demonstratio in ellipsi iuxta secundum casum. Quia hic secundus casus dat parallelam rectam CED tangentem, ipsi axi AB; & ostendimus in apparatu tres rectas lineas EF, RO, MG, esse parallelas; resultabunt duo parallelogrãma REFO, MROG, sed per prop. 34. lib. 1. element. duo latera RE, OF, erunt æqualia; tùm etiam alia duo MR, GO: sed per lemma 24. OF, GO, sunt æqualia: ergo per axiom. 1. lib. 1. element. æqualia erunt inter se alia duo RE, MR: igitur bifariàm diuisa est in R recta ME. Et quia per propos. 48. angulus CEF æqualis est angulo DEG; & per prop. 29. lib. 1. element. angulus CEF æqualis est angulo EMG; erit per 1. ax. lib. 1. elem. angulus DEG æqualis angulo EMG: ideoq; per prop. 6. lib. 1. elem. duo latera EG, MG, trianguli EGM, æqualia; & ipsum triangulum isosceles: est verò basis EM huius triãguli isoscelis bifariàm probata diuisa in R; ergo per coroll. nost. 1. ad prop. 32. lib. 1. elem. recta linea GR perpẽdicularis erit basi EM. Sed & per prop. 49. angulus ARB est rectus: igitur si circa axem AB diuisum bifariàm in O, per 30. prop. lib. 1. centro O fiat circulus, circumferentia illius incedet per puncta A, R, B, iuxta coroll. nostr. ad prop. 33. lib. 3. element. ideoque per defin. 15. lib. 1. elem. recta OR æqualis semissi OA, vel OB axeos. quod erat demonstrandum.

Demonstratio in circulo facilis erit, consulendo figuram eius propositam in propos. 45. Quandoquidem duo puncta comparationum in circulo confluunt in vnum circuli centrum O, per lemma 27. recta linea ab centro O circuli ducta ad tangentem rectam CEO, æquidistans rectæ lineæ per tactum E; & vnum punctorum comparationum transmissæ; hoc est ex eodem centro O, in quod confluunt ex dictis dicta duo puncta comparationum; erit eadem quæ recta OE ab centro O ad circuli circumferentiæ punctum E; ideoque æqualis dimidio axeos AB, per definit. 15. lib. 1. element. Atque ita tota propositio explicata erit.

COROLL. NOSTRVM. I.

Recta linea ab centro circuli ducta parallela rectæ lineæ per punctum contactus tangentis circulum ab vno puncto comparationum axeos circuli; est eadem quæ dicta recta vniens tactum & vnum punctorum prædictorum: in ellipsi verò & Hyperbola est diuersa. Vel in circulo talis recta linea parallela esse nequit; in Hyperbola verò & ellipsi reperitur.

Prima pars demonstrata est cùm de circulo ageremus. Altera verò pars euidens in demonstratione allata; nam punctum quodlibet comparationum in Hyperbola & ellipsi diuersum est à centro.

COROL.

COROLL. NOSTRVM. II.

In ellipsi datis duobus eius axibus: Si ab extremo cuiusuis ponatur recta linea parallela alteri; continget ipsam ellipsim in dicto puncto extremo, & secabit alias duas rectas perpendiculares axi cui parallela est posita, quæ etiam contingent ipsam ellipsim.

SVppositio. Sint in ellipsi duo axes coniugati AB, EH, se mutuò secantes in centro O; sintque in extremis A & B axeos maioris, rectæ lineæ AC, BD, perpendiculares ipsi AB axi; tùm ab extremo E axeos minoris posita recta linea CED parallela axi AB maiori. Dico hanc rectam CED contingere ellipsim in E, & secare in C & D, rectas lineas AC, BD prædictas perpendiculares axi AB, cui est parallela posita recta CED.

Demonstratio. Quandoquidem datur AB axis coniugatus alteri axi EH; hic axis EH secabit bifariàm & ad angulos rectos chordas omnes parallelas axi AB; & vicissim alter axis AB secabit bifariàm & ad angulos rectos chordas omnes parallelas axi EH, per defin. 19. lib. 1. inter primas: eruntque per definit. 12. vel 16. ordinatim applicatæ suis proprijs axibus, simulque axis AB ordinatim applicatus ad axem EH; & vicissim axis EH, ordinatim applicatus ad axem AB. Quare per prop. 32. lib. 1. recta CED ellipsim continget in E extremo axeos EC, quia parallela axi AB ordinatim applicato ad ipsum axem EC: Et quia dantur rectæ AC, BD, ad angulos rectos axi AB, cui est ad angulos rectos alter axis EH; erunt per prop. 28. lib. 1. element. parallelæ axi EH prædictæ rectæ AC, BD; & per prop. 30. lib. eiusdem 1. element. parallelæ inter se. Sed recta CED secat axem EH, ergo per propos. 2. Procli secabit etiam alias rectas AC, BD, in C & D, quæ omnia erant demonstranda.

COROLL. NOSTRVM III.

In ellipsi datis duobus eius axibus maiore, & minore se mutuò ad angulos rectos secantibus bifariàm in centro ellipseos: Si ab extremo quouis axeos minoris circulus describatur vt centro, interuallo, semissis maioris axeos; secabit axem maiorem in duobus punctis ex intermedijs; quæ erunt puncta comparationum.

SVppositio. In ellipsi sint duo axes AB maior, EH minor, se mutuò secantes bifariàm in O centro ellipseos ad angulos rectos: Tùm ab extremorum altero, puta E, axeos minoris EH, vt centro, circulus sit descriptus, interuallo semissis OA, vel OB, axeos maioris AB. Dico circumferentiam huius circuli descripti secare axem maiorem AB in duobus punctis F & G, ex intermedijs; & dicta puncta F, G, esse puncta comparationum.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto E extremo axeos minoris EH, educatur recta linea CED parallela maiori axi AB, hæc per coroll. nostr. 2. superius continget ellipsim in E. Præterea quia datur axis AB maior quàm axis EH, erit per prop. 15. lib. 5. element. dimidium axis maioris maius quàm dimidium axis minoris: si igitur ex puncto E per prop. 3. lib. 1. elem. detrahatur de axe minore EH producendo vltra H si opus sit, recta linea EP æqualis dimidio OA, axis maioris AB, punctum P erit vltra centrum O, quia EP cùm sit æqualis ipsi OA maiori quàm EO, erit per 1. axiom. lib. 1. elem. EP maior quàm EO. Circulus ergo centro E factus, interuallo EP æquali ipsi OA, circumferentia eius cùm debeat circa centrum E circumuerti, secabit obuiam rectam AOB, in duobus punctis, F & G; & quidem intermedijs, non autem A & B extremis, neque vltra illa extrema: nam si secaret ipsam AB rectam in extremis A & B punctis, essent rectæ EA, AO, æquales, quia sumptum est interuallum seu semidiameter circuli æquale ipsi OA vel AO; & sic triangulum resultaret isosceles EAO, cuius duo anguli ad basim EO essent æquales per propos. 5. lib. 1. elem. est autem ex datis angulus AOE rectus, ergo etiam illi æqualis angulus AEO, rectus erit: igitur contra prop. 17. lib. 1. elem. in triangulo EAO erunt duo anguli æquales duobus rectis. Quod si introducatur circumferentia circuli intersecare axem AB maiorem productum vltra A & B, exempli gratia in S; erit recta ES semidiameter æqualis ipsi AO semissi axeos maioris AB; ideoque SO maior quàm AO, vel quàm ES; ergo in triangulo ESO, angulus OES suppositus maiori lateri SO, erit maior angulo EOS, per prop. 18. lib. 1. elem. est verò ex datis angulus EOS rectus, ergo alter OES maior erit recto: igitur contra prop. 17. lib. 1. elem. in triangulo ESO, erunt duo anguli maiores duobus rectis. Hæc absurda deducta ex positionibus contradicentibus assertioni nostræ, quod circumferentia circuli facti centro O, interuallo OB æquali ipsi OA semissi axeos maioris AB, intersecet in duobus punctis F, G, dictum axem AB, & quidem ex intermedijs; indicant ipsas positiones contradicentes esse falsas, & assertionem nostram veram. Iam verò si dicta puncta F & G, non sint puncta comparationum in ellipsi; reperiantur per lemma 27. alia quælibet duo I, L, & pro demonstratione sequente assumamus vnum I, ducaturque recta EI ab puncto contactus E, rectæ CED tangentis ellipsim in E extremo axeos EH minoris: tùm per prop. 31. lib. 1. elem. ex centro O agatur recta linea OM parallela rectæ EI, vnienti tactum E, & vnum I punctum comparationum secabit in M rectam CED per prop. 2. Procli: resultabit parallelogrammum EIOM, cuius latera opposita EI, MO, erunt æqualia per prop. 34. lib. 1. elem.

Demon-

Demonstratio. Imprimis in apparatu iam demonstrauimus circumferentiam circuli decircinati centro E, interuallo æquali semissi axeos maioris AB, secare ipsum axem maiorem in punctis F & G, ex intermedijs illius: quare superest demonstrare dicta puncta F & G, esse puncta comparationum. Et quia negauit aduersarius esse puncta comparationum, & introduxit alia duo I, L; ostendendo quod punctum I seu diuersum ab F ex vna parte non possit esse punctum comparationis; eodem modo probabitur ex eisdem principijs producendis in medium, non posse ex altera parte esse punctum L punctum comparationis diuersum ab G: demonstratum erit propositum. Esto I punctum si fieri possit, punctum comparationis; ostendimus in apparatu rectam EI, & rectam OM esse æquales rectas: Et quoniam recta EI procedit ab puncto E contractus rectæ CED tangentis ellipsim, & ad punctum I comparationis terminatur; eique est parallela recta OM ducta ab O centro ellipseos, secans in M, rectam CEM tangentem ellipsim in E; hæc recta OM, erit per hanc prop. 50. æqualis semissi OA, axeos maioris AB: ergo per 1. axiom. lib. 1. element. recta EI ostensa æqualis rectæ OM, erit etiam æqualis ipsi OA: sed & ostendimus in apparatu rectam EF, esse æqualem eidem OA; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. duæ rectæ EI, EF, æquales erunt. Quare triangulum erit isosceles IEF, cuius anguli EIF, EFI, æquales erunt per propos. 5. lib. 1. elem. Quia verò datur angulus EOF rectus in triangulo EOF; & per propos. 16. lib. 1. element. angulus EFI maior est angulo recto EOF; erit per 1. axiom. lib. 1. element. angulus EIF æqualis ostensus angulo EFI, maior etiam angulo recto EOF: Quare in triangulo IEF, duo anguli EIF, EFI, sunt maiores duobus rectis; contra prop. 17. lib. 1. element. hoc absurdum cùm proueniat ex positione alterius puncti comparationis diuersi ab F, ex illa parte; indicat illam positionem esse falsam; quare punctum F erit punctum comparationis in ellipsi. Eadem ratione probabitur ex alia parte non esse aliud punctum comparationis diuersum ab G puncto. Quare demonstratum erit totum hoc corollarium nostrum 3. ex cuius demonstratione probabitur praxis sequentis corollarij nostri.

COROLL. NOSTRVM IV.

In ellipsi puncta comparationum reperire, aliter quàm per lemma 25.

Apparatus. Consulendo figuram corollarij superioris 3. Per prop. 47. lib. 2. reperiantur duo axes coniugati in ellipsi maior AB, minor EH, qui se mutuò ad angulos rectos in centro O ellipseos intersecabunt, ex natura sua declarata in definit. 19. lib. 1. inter primas. Præterea sumpto vno extremo puta E, minoris axeos EH, veluti centro, describatur interuallo semissis OA, axeos maioris AB, circulus, cuius circumferentia iuxta corollarium nostrum 3. superius secabit axem maiorem AB, in duobus punctis F, G ex intermedijs. Dico hæc duo puncta F, G, in axe AB maiore, esse duo puncta comparationum quæsita in ellipsi.

Demonstratio petatur ab præcedente corollario nostro 3. speculatiuo: nam in apparatu manifestæ sunt conditiones adiunctæ in corollario 3. citato: quare conclusio illius corollarij, cùm sit assertio in apparatu facta, manifestanit ipsa asserrio. Atque ita demonstrauerimus nos rectè inuenisse ex praxi apparatus duo puncta comparationum in ellipsi.

COROLL. NOSTRVM V.

Demonstrare quod puncta comparationum in ellipsi sunt æqualiter remota ab centro eius; tùm etiam æqualiter distita ab verticibus vicinioribus ipsis; tùm etiam æqualiter separata ab verticibus remotioribus: aliter quàm per lemma 28.

Consulatur figura corollarij nostri 3. In triangulo FEG, cùm sint ex apparatu corollarij tertij, latera EF, EG, æqualia, videlicet semidiametri circuli facti, cuius circumferentia secat axem AB maiorem in punctis F, F, comparationum, vti demonstratum est in ipso coroll. 3. rectaque linea EO vtpote pars axeos minoris EH, insistentis ad angulos rectos maiori AB, descendat ab angulo FEG, dicti trianguli isoscelis; diuidet bifariàm in O centro ellipseos basim FG, per nostrum coroll. 1. ad prop. 32. lib. 1. elem. Quare ex natura distantiæ puncti ab puncto, secundum rectam lineam, puncta F & G, comparationum æqualiter distabunt ab O centro ellipseos; secundum rectas æquales OF, OG. Quod si ab æqualibus semi axibus OA, OB, adimantur æquales portiones OF, OG; relinquentur æquales rectæ AF, BG, per 3. axiom. lib. 1. element. quare eadē dicta puncta F, G, comparationum, æqualiter remouebuntur ab verticibus A, B, suis vicinioribus; hoc est F punctum ab vertice A; & G punctum ab vertice B, æqualiter separabuntur. Quod si æqualibus rectis OF, OG, addantur æquales rectæ OB, OA; nimirum rectæ OF addatur OB, & rectæ OG recta OA; fiet per 2. axiom. lib. 1. element. recta seu distantia FOB, puncti F ab vertice B remotiore, æqualis rectæ seu distantiæ GOA, puncti G ab A vertice remotiore. atque ita propositum probauerimus.

COROL-

COROLL. NOSTRVM VI.

Iisdem positis ac demonstratis, quæ in corollario tertio. accuratiùs physicè reperire puncta F, G, comparationum in ellipsi, quàm per sectionem circumferentiæ circuli facti centro E, interuallo semiaxeos OA, & ipsius axeos totalis AB.

CErtum enim est propter obliquam sectionem physicã circuli prædicti & axeos AB, non ita posse dignosci physicè verum punctum intersectionis, quod tamen plurimùm refert ad praxes physicas: ideo dabimus in hoc corollario methodum reperiendi puncta illa intersectionum prædictarum, quæ sunt puncta comparationum in ellipsi.

Consulendo igitur figurationem propositam pro coroll. 3. circa semiaxem OA maiorem, describatur semicirculus; & ex vertice A accomodetur in eo recta AS æqualis semiaxi EO minori, per prop. 1. lib. 4. elem. ducaturque recta linea SO; quæ erit minor quàm AB semiaxis maior, per propos. 19. lib. 1. elem. nam per prop. 31. lib. eiusdem, angulus in S est rectus, vtpotè in semicirculo, vnde alij duo anguli in triangulo ASO, erunt acuti; per coroll. 1. prop. 17. eiusdem lib. 1. elemen. Quare per prop. 3. lib. eiusdem, poterimus de maioribus rectis OA, OB, quàm SO, detrahere rectas OF, OG, æquales seorsim rectæ SO, sine vlla obliqua sectione circumferentiæ circuli facti centro O, interuallo rectæ OS; nam per coroll. nost. 1. ad prop. 1. Procli, anguli semicirculorum eiusdem circuli facti ab circumferentia circuli & eius diametro, qui sunt deinceps ad illam diametrum, sunt æquales inter se; vnde potest dici diameter circuli perpendicularis ad eius circumferentiam, per analogiam defin. 10. lib. 1. elem. ideoque nulla erit obliqua sectio diametri & circumferentiæ circuli. Dico autem prædicta puncta F, G, in axe maiore AB, esse puncta comparationum in ellipsi, & accuratius inuenta, quàm per corollarium nostrum 4. per obliquam sectionem circuli & axeos AB.

Demonstratio. In triangulo rectangulo EOF, ostendimus rectam EF esse æqualem semiaxi AO maiori, tam in demonstratione huius propos. 50. quàm in coroll. 3. sed etiam in triangulo rectangulo ASO, latus AO est ipse semiaxis maior; ergo latera EF, AO, dictorum triangulorum rectangulorum erunt æqualia inter se per 1. axiom. lib. 1. elem. quare per prop. 16. Procli, quadrata eorum erunt æqualia: sed per prop. 47. lib. 1. element. quadratum rectæ EF; est æquale quadratis simul sumptis rectarum EO, OF; & quadratum rectæ AO, est æquale quadratis simul sumptis rectarum AS, SO: igitur per 1. axiom. lib. 1. element. duo simul quadrata rectarum EO, OF, erunt æqualia duobus simul quadratis rectarum AS, SO: ab his æqualibus adimantur quadrata rectarum æqualium EO, AS, positarum, quæ erunt æqualia per prop. 16. Procli; relinquentur per 3. axiom. lib. 1. elem. quadrata æqualia rectarum FO, SO, ideoque ipsæ rectæ FO, SO, erunt æquales per cit. propos. 16. Procli. Cùm ergo habeamus in triangulis EOF, ASO, duo latera respectiuè æqualia duobus lateribus, videlicet latus EO æquale lateri AS, & latus OF æquale lateri OS; comprehendantque angulos rectos æquales rectos per 12. axiom. lib. 1. element. bases habebunt æquales EF, AO: sed AO est semiaxis maior; ergo EF erit æqualis semiaxi maiori, deducta ab extremo E axeos EH minoris ad axem AB maiorem: circulus igitur factus centro E interuallo EF æquali ipsi semiaxi AO maiori, secabit axem AB maiorem in puncto F, quod erit punctum vnum comparationis in ellipsi; per coroll. nost. 3. eodem modo si de semiaxe OB, sumatur recta OG æqualis ipsi SO, vel OF, punctum G erit aliud comparationis in ellipsi. Denique quia dicta puncta F, G, comparationum inuenta sunt extra periculum obliquæ sectionis prædictæ; tutius & accuratius ad physicam rationem inuenta erunt, quàm per sectionem circumferentiæ circuli facti centro E, interuallo semiaxeos OA, & ipsius axeos maioris totalis AB.

PROPOSITIO LI.

Si in Hyperbola, vel oppositis sectionibus, ad axem comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, excedensque figura quadrata; & à punctis ex comparatione factis ad quamlibet sectionem rectæ lineæ inclinentur: maior minorem quantitate axis superabit.

SVppositis Hyperboles; vel oppositarum sectionum sit axis AB, & centrum C: tùm quartæ parti figuræ sit comparatum ad axem AB, vtrumque seorsim rectangulorum sub AD, DB, sub AE, EB, excedens figura quadrata; & ab punctis E, D, ex dicta comparatione factis; inclinatæ sint rectæ lineæ EF, FD, ad quamlibet sectionem in oppositis; vel ad ipsam solam Hyperbolam datam. Dico maiorem EF, excedere minorem DF, quantitate axeos AB.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. elem. ex centro C agatur recta linea GCH parallela rectæ DF: hanc rectam GCH, secabit in G, recta EF, per prop. 11. Procli; sicuti secat in F, parallelam alteram DF. Præterea per prop. 49. lib. 2. ex puncto F educatur recta linea FKH,

con-

contingens in F, sectionem, quæ occurret per coroll. propos. 31. lib. 1. in puncto K, ipsi axi AB, inter centrum C, & sectionem ipsam contactam; & quia occurrit in F, rectæ FD, occurret etiam in H, parallelæ GCH alteri, per cit. prop. 11. Procli.

Demonstratio. Quandoquidem duæ rectæ GCH, FD, sunt æquidistantes, & in eas incidit recta FKH, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli KHG, KFD, æquales; sed & per prop. 48. anguli KFD, GFH, sunt æquales; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. angulus GFH erit æqualis angulo KHG. Quare in triangulo FGH, cùm duo anguli GFH, GHF, sint æquales; erunt per prop. 6. lib. 1. element. duo latera GF, GH, æqualia. Et quia per lemma 28. duæ rectæ CE, CD, sunt æquales, ideoque tota ED, dupla semissis EC; & in triangulo FED, est recta GC parallela basi FD, ex apparatu; erit per prop. 2. lib. 6. element. vt DC ad CE, sic FG ad GE; sunt autem duæ primæ DC, CE, ostensæ æquales; ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. duæ aliæ FG, GE, æquales erunt, & tota EF dupla semissis suæ EG: quare cùm duæ rectæ GH, GE, sint probatæ æquales eidem tertiæ GF, erunt per 1. axiom. lib. 1. elem. æquales inter se. Est verò recta FE dupla ipsius GE, ergo per 7. prop. lib. 5. elem. eadem recta FE erit dupla ipsius GH. sed per prop. 50. recta CH æqualis est ipsi CB vel CA, semissi axeos AB; & recta GCH est ipsa GH; ergo recta EF erit dupla ipsius GCH, seu vtriusque simul GC, CB, per 1. axiom. lib. 1. elem. & per 7. prop. lib. 5. element. Quia verò recta GC est æquidistans rectæ FD, erit per coroll. prop. 4. lib. 6. elem. triangulum GEC, simile triangulo FED; quare per definit. 1. lib. eiusdem 6. elem. erit vt ED. ad FD, sic EC ad CG; est autem recta ED probata dupla ipsius EC; ergo per prop. 14. lib. 5. element. recta FD dupla erit rectæ GC; sed etiam est per propos. 30. lib. 1. recta AB dupla ipsius CB, nam bifariàm in centro C diuiditur axis seu diameter AB per cit. propos. 30. lib. 1. ideoque tota AB dupla est semissis propriæ CB. Igitur cùm probauerimus rectam EF esse duplam rectarum simul sumptarum GC, CB; & ostenderimus rectam FD esse duplam rectæ CG, & rectam AB esse duplam rectæ CB: erunt per 6. axiom. lib. 1. elem. æquales rectæ EF quidem ex vna parte, ex alia verò parte duæ aliæ simul sumptæ FD, AB, vtpote tam illa EF seorsim sumpta, quàm istæ duæ simul FD, AB, sint duplæ earumdem rectarum GC, CB. Deducendo igitur ex vno istorum æqualium, videlicet ex duabus simul sumptis FD, AB, rectam AB, & nihil ex altera æquali EF recta; relinquetur recta AB, pro differentia inter duas rectas EF, FD; seu pro excessu rectæ EF, supra rectam FD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

Si in ellipsi ad maiorem axem ex vtraque parte comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficiensque figura quadrata; & à punctis ex comparatione factis ad sectionem rectæ lineæ inclinentur: ipsi axi æquales erunt.

Svppositio. Ellipseos sit maior axis AB, centrumque G: tùm per coroll. nost. 4. ad prop. 50. reperta sint in axe AB, puncta comparationum C, D, vel per lemma 25. sed facilius erit per coroll. cit. Denique sint ex punctis C, D, inclinatæ duæ rectæ lineæ CE, DE, ad vnum E punctum lineæ curuæ ellipticæ. Dico has duas rectas CE, DE, simul sumptas, esse æquales axi AB maiori.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 1. ducatur recta linea FEH contingens in vnico tantùm puncto E lineam curuam ellipseos. Tùm ex centro G (in quo bifariàm per prop. 30. lib. 1. diuiditur axis AB, vnde totus erit duplus suæ semisseos AG,) agatur per prop. 31. lib. 1. element. recta linea GKH æquidistans rectæ CE; hanc rectam GKH per 11. propos. Procli secabunt rectæ ED, FEH, illa in K, hæc in H; quia alteram EC parallelam secant: sed & per propos. 50. hæc recta GH erit æqualis semiaxi AG; ideoque per 1. axiom. lib. 1. elem. vel per 7. prop. lib. 5. element. tam erit totus axis AB, duplus rectæ GH, quàm semissis suæ AG, quia æquales sunt rectæ GH, AG, probatæ per prop. 50.

Demonstratio. Per prop. 48. angulus CEF æqualis est angulo HEK, & per prop. 29. lib. 1. elem. angulus CEF æqualis angulo EHK: ergo per axiom. 1. lib. 1. element. angulus EHK æqualis erit angulo HEK. quare in triangulo EKH, rectæ seu latera KE, KH, erunt æqualia per prop. 6. lib. 1. element. Et quia ex apparatu sunt rectæ AG, GH, GB, sunt æquales; & per lemma 28. rectæ GC, GD, æquales; & in triangulo EDC, in apparatu posita est KG æquidistans basi EC, ideoque per prop. 2. lib. 6. elem. recta ED bifariàm secta in K ab recta GK, sicuti bifariàm diuisa est CD in G; & propterea recta ED dupla ipsius EK vel KD semissis suæ, itemque per 7. prop. lib. 5. elem. vel per 1. axiom. lib. 1. elem. dupla ipsius KH æqualis ipsi EK. Et quia etiam est per lemma 50. ad lib. 1. vt DE ad EC, sic DK ad KG; primaque DE probata est dupla tertiæ DK; erit per prop. 14. lib. 5. elem. tertia EC dupla quartæ KG. Cùm autem ostenderimus rectam DE esse duplam rectæ HK; & rectam EC esse duplam rectæ KG; erit

KG; erit in ratione dupli, vt DE ad HK; sic EC ad KG; & per prop. 12. lib. 5. element. DE, EC, simul ad HK, HG, simul, vt DE ad HK, vel vt EC ad KG, hoc est in ratione dupli: sed cùm sit probatus totus axis AB duplus rectæ HKG, seu rectarum simul HK, KG, in apparatu; & nunc demonstrauerimus duas rectas DE, EG, simul sumptas, esse duplas eiusdem rectæ HKG: erunt per prop. 9. lib. 5. element. duæ rectæ CE, ED, inclinatæ ad idem punctum sectionis ab C ac D punctis comparationum, simul sumptæ, æquales toti axi AB maiori; sicuti fuit propositum.

COROLL. NOSTRVM I.

Triangula omnia rectilinea basim habentia portionem axis maioris in ellipsi sitam inter puncta comparationum, & verticem in linea curua ellipseos; sunt isoperimetra.

NAm per hanc propositionem, duo latera horum triangulorum inclinata ad idem punctum lineæ curuæ ellipseos, & angulum verticis efficientia, cùm sint per hanc propositionem æqualia toti axi; semper erunt duo huiusmodi latera simul sumpta in vno triangulo, æqualia duobus simul sumptis huiusmodi lateribus in quolibet alio triangulo è propositis, ideoque hoc modo sumpta æqualia inter se, per 1. axiom. lib. 1. element. quibus æqualibus si addatur communis basis interposita inter puncta comparationum, fient æqualia, hoc est omnia tria latera simul sumpta cuiuscumque trianguli è propositis, æqualia tribus lateribus simul sumptis cuiuscumqua alterius trianguli è propositis; per 2. axiom. lib. 1. element. cùmque tria latera trianguli sint simul sumpta perimetrus illius; sintque modo explicato æqualia; erunt proposita triangula isoperimetra.

COROLL. NOSTRVM II.

Datis duabus extremis diametris, seu duobus axibus se mutuò ad angulos rectos bifariam secantibus, ellipseos describendæ: reperire innumera puncta per quæ circumferentia ipsius ellipseos transitura sit.

SVppositio. Dati sint duo axes AB maior, CD minor, se mutuò in E ad angulos rectos, bifariamque secantes: & oporteat ellipseos describendæ sub hisce axibus datis, reperire innumera puncta, per quæ circumferentia ipsius ellipseos transitura sit.

Apparatus. Per lemma 25. vel facilius per corollar. nost. 4. ad prop. 50. reperiantur in axe maiore AB, duo puncta F, G, comparationum. Tùm maior semiaxis AE, vel BE, (nos assumimus AE) portio FE secetur quomodocumque in quotcumque partes, exempli gratiâ in H & I. Præterea duobus circinis sumantur, seorsim duo segmenta totius axeos maioris AB, exempli gratia AH, BH; & punctis F, G comparationum, vt centris, fiant hinc & inde respectu axeos maioris arcus octo se mutuò intersecantes bini & bini, in punctis h. Eodem modo duobus illis circinis sumantur segmenta AI, BI, totius axeos maioris, & centris comparationum F, G, punctis, fiant alij arcus se mutuo bini & bini intersecantes in i. Et sic in infinitum si innumera segmenta fiant semiaxeos AE. Quod si assumerentur modo prædicto segmenta AF, BF, axeos AB, & centris F & G. decircinarentur prædicti arcus se mutuò bini secantes in punctis f; puncta f quatuor inseruient ad ducendam lineam curuam ellipseos. Quod si assumerentur segmenta AE, BE, & arcus prædicto modo describerentur se mutuò intersecarent in punctis C & D extremis axeos minoris CD; nam est idem interuallum sumptum ad puncta F, G, comparationum inuenienda, iuxta praxim nostram demonstratam in coroll. nost. 4. ad prop. 50. Assero autem lineam curuam ellipseos describendam circa extrema A, B, axeos maioris AB, & circa extrema C, D, axeos minoris CD, transituram per omnes decussationes factas, in h, i, f; & sic per innumera puncta huiusmodi decussationum.

Demonstratio. Esto si fieri possit, linea curua ellipseos descriptæ circa extrema datorum axium, non incedat per puncta decussationum inuenta, sed per alia. Et ne longiores simus in proposito demonstrando; exempli gratia non incedat per vnum h punctorum inuentorum; (quod enim dicemus de isto puncto, applicandum erit omnibus alijs inuentis decussationum reliquis punctis.) Nihilominus, quia per apparatum, ductis prius rectis lineis FH, GH, distantia seu recta Fh est æqualis segmento seu rectæ AH; & distantia seu recta Gh est æqualis segmento seu rectæ BH; si æqualibus Fh, AH, addantur æquales Gh, BH; fient per 2. axiom. lib. 1. elem. duæ rectæ simul sumptæ Fh, Gh, æquales simul sumptis segmentis AH, BH; sed hæc duo segmenta AH, BH, simul sumpta sunt per axiom. 19. lib. 1. element. æqualia axi AB maiori; ergo per 1. axiom. lib. eiusdem 1. element. duæ rectæ lineæ simul sumptæ Fh, Gh, erunt æquales axi AB maiori ellipseos. Sed quia negat aduersarius lineam curuam ellipseos transire per punctum h; sit si fieri possit punctum M, vel N, vel K, vel L, (modò sit diuersum ab inuentis & extra lineam ellipseos curuam per illa descriptam; sic enim haberemus intentum; vel puncta prædicta sint vel in vno laterum Fh, Gh; producto vel non producto; vel contineantur intra locum anguli FhG, vt punctum K; vel punctum h, contineatur intra locum anguli FMG facti ab duabus rectis FM, GM ducendis ad punctum M introductum.) Tunc verò per istam prop. 52. quia duæ huiusmodi rectæ lineæ ducendæ,

FM, GM; vel FN, GN; vel FL, GL; vel FK, GK, inclinantur ab punctis F, G, comparationum, ad vnum punctum M, vel N, vel L, vel K, lineæ curuæ ellipsens descriptæ circa duos datos axes AB, CD; erunt simul sumptæ æquales toti AB axi maiori; cui sunt ostensæ æquales duæ aliæ rectæ F h, G h, angulum in h efficientes, supra basim FG, vt aliæ prædictæ: igitur per 1. axiom. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ simul sumptæ inclinatæ ad vnum punctorum introductorum, erunt æquales duabus rectis lineis simul sumptis F h, G h: contra prop. 21. lib. 1. element. Hoc absurdum deductum ex positione aduersarij, manifestam reddit positionem contradicentem proposito in assertione praxeos huius corollarij; quæ ideo vera erit.

PROPOSITIO LIII.

Si in Hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel sectionibus oppositis; ab extremis diametri ducantur lineæ ordinatim applicatis æquidistantes: & à dictis terminis ad idem sectionis punctum lineæ ductæ secent æquidistantes. Rectangulum ex abscisis factum, æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum constituitur.

SVppositio. Sit vna dictarum sectionum, seu circuli, diameter AC; & rectæ AD, CE, ab extremis A, & C, dictæ diametri, rectis lineis ordinatim applicatis dictę diametro AC, æquidistantes, (quæ per prop. 30. lib. 1. elem. erunt inter se æquidistantes.) Insuper ab dictis extremis seu terminis A, C, diametri AC, per idem lineæ curuæ sectionis, vel circuli circumferentiæ punctum B, transmissæ sint rectæ lineę ABE, CBD, secantes in punctis E & D, dictas æquidistantes rectas AD, BE. Dico rectāgulū sub AD, CE, factum sub portionibus parallelarum AD, CE, factis ab ductis rectis ABE, CBD, & ab extremis A, C, datæ diametri AC; esse æquale figuræ quæ ad AC datam diametrum constituitur. Aduerte quod in Hyperbola & oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ prædictæ AD, CE, debent ad partes diuersas diametri AC educi: at verò in ellipsi & circulo, ad easdem partes dictæ diametri AC.

Apparatus. Per coroll. nost. 13. ad propos. 49. lib. 2. in hyperbola, ellipsi, & circulo, ex puncto B, ordinatim applicetur recta linea BF ad diametrum transuersam AC datam: at verò in sectionibus oppositis per coroll. nost. 18. ad cit. prop. hæc recta BF, erit per defin. 12. lib. 1. inter primas parallela datis ordinatim applicatis ad dictam AC diametrum; & per prop. 30. lib. 1. element. parallela etiam ductis AD, CE.

Demonstratio. Per propos. 21. lib. 1. erit vt quadratum rectæ FB ad rectangulum sub AF, FC, sic rectum figuræ latus ad transuersum AC: tùm etiam per 1. prop. lib. 6. element. vt rectum figuræ latus ad transuersum AC, sic figura ipsa ad quadratum rectæ AC: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum rectæ FB ad rectangulum sub AF, FC, sic figura ipsa ad AC constituta ad quadratum rectæ AC. Sed per prop. 23. lib. 6. elem. proportio quadrati rectæ FB, ad rectangulum sub AF, FC, componitur ex ratione rectæ BF ad rectam FA, & ex ratione rectæ BF ad FC; ergo cùm sint eædem rationes, quadrati rectæ FB ad rectangulum sub AF & FC; tùm figuræ constitutæ ad AC, ad quadratum rectæ AC; & illa componatur ex assignatis rationibus; etiam per lemma 7. ad lib. 1. ratio figuræ constitutæ ad AC, ad quadratum rectæ AC, componetur ex assignatis rationibus, videlicet ex ratione rectæ BF ad rectam AF, & ex ratione rectæ BF ad rectam FC. Et quia in triangulo EAC, recta BF est æquidistans per apparatum basi EC; erit per lemma 50. ad lib. 1. vt BF ad FA, sic EC ad CA. Et quoniam etiam eadem recta BF est parallela basi DA trianguli ACD; erit per idem lemma 50. lib. 1. vt BF ad FC, sic DA ad AC: ergo si assumamus rationes easdem cum rationibus assignatis componentibus prædictam; erit per lemma 7. lib. 1. proportio figuræ constitutæ ad AC ad ipsum quadratum rectæ AC, composita ex ratione rectæ EC ad rectam CA, & ex ratione rectæ DA ad rectam AC: sed propos. 23. lib. 6. elem. rectangulum sub AD, CE, ad quadratum rectæ AC componitur ex ratione rectæ CE ad rectam CA, & ex ratione rectæ DA ad rectam AC; ergo per lemma 7. lib. 1. erit vt figura constituta ad AC, ad ipsum quadratum rectæ AC, sic rectangulum contentum sub AD, CE, ad quadratum rectæ AC. Quare per propos. 9. lib. 5. elem. figura constituta ad AC diametrum datam, erit æqualis rectangulo sub AD, CE. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

In Hyperbola, oppositis sectionibus, ellipsi & circulo: ex data quacumque diametro transuersa, rectum eius latus reperire.

APparatus consulendo figurationes huius propositionis. In Hyperbola, ellipsi & circulo, accomodetur ordinatim aliqua recta linea BF ad diametrum datam transuersam AC, per

AC, per coroll. noſt. 13. ad prop. 49. lib. 2. & in oppoſitis ſectionibus per coroll. noſt. 18. ad eandem prop. cit. 49. tùm ex verticibus A, C, ponantur per prop. 31. lib. 1. element. duæ rectæ lineæ AD, CE, parallelæ ipſi rectæ BF. Prætereà ex puncto B lineæ curuæ ſectionis vel circuli circumferentiæ tranſmittantur rectæ lineæ ABE, CBD, ſecantes in E & D, ſupradictas AD, CE, per 11. prop. Procli. Denique dato rectangulo ſub AD, CE, & diametro AC, reperiatur per lemma 11. lib. 1. alia recta linea G, ita vt rectangulum ſub data AC diametro, & reperta G, ſit æquale dato rectangulo ſub AD, CE. Dico rectam G eſſe latus rectum reſpectu diametri AC datæ, in ſectionibus & circuli circumferentia datis.

Demonſtratio. Per hanc propoſitionem rectangulum ſub AD, CE, æquale eſt figuræ conſtitutæ ad AC diametrum; figura autem huiuſmodi per defin. 1. lib. 2. eſt rectangulum ſub diametro tranſuerſa AC, & latere eius recto proprio; & per apparatum, rectangulum ſub diametro AC, & recta G inuenta, eſt æquale dicto rectangulo ſub AD, CE; ergo recta G erit rectum latus reſpectu diametri AC. Nam ſi non eſſet rectum latus illius, ſeu non æqualis lateri recto illius; eſſet alia inæqualis ipſi rectæ G inuentæ: nihilominus per hanc propoſitionem rectangulum ſub AC, & recta inæquali ipſi G, eſſet æquale rectangulo ſub AD, CE, cui æquale eſt rectangulum ſub AC, & G, per apparatum: ergo per 1. axiom. lib. 1. element. rectangulum ſub AC, & G, eſſet æquale rectangulo ſub AC, & recta inæquali G. Igitur ſi concipiamus pro baſibus rectam G, & alteram rectam inæqualem ipſi G, cùm obtineat eandem altitudinem rectæ AC, iſta duo rectangula, erunt per prop. 1. lib. 6. element. vt baſes, quæ cùm ſint æquales ex poſitione aduerſarij, erunt ipſa rectangula prædicta inæqualia, conceſſa æqualia ex vi huius propoſitionis, & apparatus. Hæc pugnantia cùm procedant ex introducta recta pro latere recto reſpectu diametri AC, diuerſa ab inuenta G per apparatum: talis erit illa poſitio, & aſſertio illi contradicens, vera, atque ita rectè fecerimus imperatum.

PROPOSITIO LIV.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam cõtingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant; & per tactus ducantur contingentibus æquidiſtantes; à tactibus verò ad idem ſectionis punctum ductæ lineæ ſecent æquidiſtantes. Rectangulum ex abſciſsis conſtans, ad quadratum lineæ tactus coniungẽtis, proportionem habebit compoſitam ex proportione quam habet quadratum portionis lineæ ab occurſu contingentium ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ eſt intra ſectionem, ad reliquæ portionis quadratum; & ex proportione quam habet rectangulum ex contingentibus factum, ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

SVppoſitio. Sit ABC coni ſectio, vel circuli circumferentia, quam rectæ lineæ AD, CD, contingant in punctis A & C, ſibique occurrant in puncto D: Tùm per tactum A ſit recta linea AF parallela contingenti CD; & per punctum C tactus, alia recta linea CG parallela contingenti AD. Prætereà per idem ſectionis vel circuli circumferentiæ punctum H, ductæ ſint à tactibus A, C, rectæ lineæ CHF, AHG, ſecantes prædictas rectas lineas AF, CG, in punctis F & G. Inſuper tranſmiſſa ſit recta linea AC vniens prædicta puncta contactuum A, C: tùm alia recta DE ducta ex puncto D concurſus tangentium; ad E medium punctum rectæ AC coniungentis tactus; quæ recta AC per 10. prop. lib. 1. tota erit intra ſectionem; ideòque recta DE, ſecabit obuiam curuam lineæ ſectionis vel circuli circumferentiæ, in puncto B. Dico rectangulum ſub AF, CG, hoc eſt ſub abſciſſis æquidiſtantibus prædictis, ad quadratum rectæ AC coniungentis tactus, proportionem habere compoſitam ex ratione quadrati rectæ EB (quæ eſt portio rectæ DE ductæ ab D occurſu contingentium ad E medium rectæ AC nectentis tactus) ad quadratum rectæ BD, reliquæ portiones prædictæ rectæ totius DE; & ex ratione rectanguli AD, CD, contingentibus rectis, ad quartam partem quadrati rectæ AC coniungentis tactus A, C; hoc eſt ad quadratum rectæ AE, vel CE, quod eſt quarta para quadrati totius AC, per coroll. noſt. ad prop. 20. lib. 6. element. vel ad rectangulum ſub AE, EC, æqualibus, ex datis.

Apparatus. Per coroll. noſt. 23. ad prop. 49. lib. 2. recta AC, ſeu AE, erit ordinatim applicata ad diametrum DBE; nam per propoſ. 29. lib. eiuſdem 2. recta DE deducta ab D concurſu contingentiam ad E medium punctum rectæ AC coniungentis tactus A, C, eſt diameter ſectionis, vel circuli. Prætereà per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto H, ſectionis, vel circumferentiæ circuli, recta linea agatur HOX, parallela ipſi AC ordinatim applicatæ diametro DE;

DE;

DE; hæc recta HOX in hyperbola erit ordinatim applicata eidem diametro DE, per coroll. noſt. 29. ad prop. 49. lib. 2. & in parabola per coroll. noſt. 28. ad cit. prop. Et quia in ellipſi & circulo, dantur duæ tangentes AD, CD, concurrere in D, recta AC, vniens tactus non incedet per centrum, iuxta coroll. noſt. 1. ad prop. 27. lib. 2. quare in ellipſi per coroll. noſt. 31. & in circulo per coroll. noſt. 32. ad propoſ. 49. lib. 2. erit dicta recta HOX, ordinatim applicata diametro DE. Inſuper per eandem cit. prop. 31. lib. 1. element. per punctum B ponatur alia recta linea MBN parallela rectæ AC probatæ ordinatim applicatæ diametro DBE, hæc recta MBN per prop. 32. lib. 1. continget ſectionem in B. Porrò tam recta HOX, quàm MBN, productæ vtrimque occurrent tangentibus AD, CD; illa in K & L, hæc in M & N, per prop. 11. Procli: eruntque tres rectæ lineæ AEC, KHOXL, MBN, parallelæ inter ſe per propoſ. 30. lib. 1. elem. Ergo quia in triangulo ADC, duæ rectæ MBN, KOL, ſunt parallelæ baſi AEC ſectæ bifariàm ab recta DBOE, etiam per coroll. noſt. ad prop. 4. lib. 6. elemen. bifariàm ſecabuntur in B & O, rectæ aliæ MBN, KOL ſed & per definit. 10. lib. 1. inter primas recta HOX bifariàm diuidetur in O ab diametro DO, cui eſt ordinatim applicata. Quare ſi ab rectis æqualibus OK, OL, detrahantur æquales OH, OX, relinquentur æquales rectæ KH, LX, per 3. axiom. lib. 1. elemen. eruntque etiam per 2. axiom. lib. eiuſdem æquales rectæ KX, LH.

Demonſtratio. Quia recta AM datur ſectionem contingere, & alia recta BM oſtenſa eſt ſectionem contingere, vel circulum, ambæque in M concurrere probatæ ſunt; & ab puncto H lineæ curuæ ſectionis vel circuli ducta eſt recta KHXL parallela tangenti BM: erit per prop. 16. vt quadratum rectæ AM ad quadratum rectæ MB, hoc eſt ad rectangulum ſub MB, BN, (propter æqualitatem rectarum MB, BN, probatam in apparatu,) ſic quadratum rectæ AK ad rectangulum ſub XK, KH, hoc eſt ad rectangulum ſub LH, HK, (ſunt enim in apparatu oſtenſa illa latera reſpectiuè æqualia:) quare iuxta propoſ. 16. lib. 5. element. viciſſim erit vt quadratum rectæ AM ad quadratum rectæ AK, ſic rectangulum ſub MB, BN, ad rectangulum ſub LH, HK. Et quoniam in triangulo ADC, recta MN eſt parallela lateri AC, erit per lemma 50. lib. 1. vt AD ad DC, ſic MD ad DN; & vt AD ad MD, ſic CD ad DN; & vt DA ad AM, ſic DC ad CN; & vt AM ad DA, ſic CN ad DC. Ex eiſdem principijs demonſtrabitur in triangulo eodem ADC, ob rectam KL parallelam lateri AC, eſſe vt AD, ad DC, ſic KD ad DL; & vt AD ad KD, ſic DC ad DL; & vt DA ad AK, ſic DC ad CL. Cumque oſtenderimus eſſe vt AM ad DA, ſic CN ad DC; & vt DA ad AK, ſic DC ad CL: erit ex æqualitate per prop. 22. lib. 5. elem. vt AM ad AK, ſic CN ad CL; & viciſſim per prop. 16. lib. 5. element. vt AM ad CN, ſic AK ad CL; & inuertendo per prop. 4. coroll. lib. 5. element. vt CN ad AM, ſic CL ad AK: eſt autem per prop. 1. lib. 6. elem. vt recta CN ad rectam AM, ſic rectangulum ſub CN, AM, ad quadratum rectæ AM; tùm vt recta CL ad rectam AK, ſic rectangulum ſub CL, AK, ad quadratum rectæ AK: ergo cùm ſit CN ad AM, ſicut CL ad AK; erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt rectangulum ſub CN, AM, ad quadratum rectæ AM, ſic rectangulum ſub CL, AK, ad quadratum rectæ AK; ſed oſtendimus antea eſſe quadratum rectæ AM ad rectangulum ſub MB, BN, ſicut quadratum rectæ AK ad rectangulum ſub LH, HK: igitur ex æquo erit per propoſ. 22. lib. 5. elem. vt rectangulum ſub CN, AM, ad rectangulum ſub MB, BN, ſic rectangulum ſub CL, AK, ad rectangulum ſub LH, HK. Verùm per prop. 23. lib. 6. elemen. rectangulum ſub CL, AK, ad rectangulum ſub LH, HK; habet proportionem compoſitam ex ratione LC ad LH, id eſt FA ad AC; (propter ſimilitudinem triangulorum LHC, CFA; quia enim recta HC, incidit in rectas parallelas HL, CA, erunt per prop. 29. lib. 1. element. anguli LHC, ACH, æquales; tùm etiam quia recta FHC, incidit in rectas parallelas AF, CD, erunt per eandem propoſ. 29. lib. 1. elem. anguli AFC, LCH, æquales; reliqui igitur tertij anguli dictorum triangulorum erunt per coroll. noſt 3. ad prop. 32. lib. 1. element. æquales, ideoque æquiangula ipſa triangula, & per prop. 4. lib 6. elem. latera habebunt proportionalia circum æquales angulos, hoc eſt in caſu noſtro, vt LC ad LH, ſic FA ad AC.) tùm ex ratione AK ad KH, hoc eſt GC ad CA, (ob æquiangula triangula AKH, GCA; quia enim in rectas parallelas KH, AC, recta AH, incidit, erunt per prop. 29. lib. 1. element. anguli KHA, HAC, æquales; tùm etiam quia in rectas parallelas AK, CG, recta incidit AHG, erunt per eandem prop. 29. lib. 1. elem. anguli KAH, AGC, æquales; ideoque per coroll. noſt. 3. ad prop. 32. lib. 1. elem. reliqui dictorum triangulorum tertij anguli erunt æquales; & propterea ipſa triangula æquiangula; & per prop. 4. lib. 6. element. erit vti diximus AK ad KH, ſicut GC ad CA.) Quod ſi comparemus rectangulum ſub GC, FA, cum quadrato rectæ AC; proportio huius rectanguli ad hoc quadratum, iuxta prop. 23. lib. 6. elem. componetur ex ratione FA ad AC, & ex ratione GC ad CA. Cùm igitur proportio rectanguli ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC, componatur ex eiſdem rationibus ex quibus componitur proportio rectanguli ſub CL, AK, ad rectangulum ſub LH, HK; erit per lemma 7. lib. 1. vt rectangulum ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC, ſic rectangulum ſub CL, AK, ad rectangulum ſub LH, HK: probauimus autem in ſuperioribus, eſſe re-

ctan-

ctangulum ſub NC, MA, ad rectangulum ſub MB, BN, ſicut rectangulum ſub CL, AK, ad rectangulum ſub LH, HK; ergo per propoſ. 11. lib. 5. element. erit rectangulum ſub NC, MA, ad rectangulum ſub MB, BN, ſicut rectangulum ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC. Quod ſi inter duo rectangula ſub NC, MA, ſub MB, BN, aſſumamus medium rectangulum ſub ND, DM; rectangulum ſub NC, MA, ad rectangulum ſub MB, BN, habebit per defin. 5. & prop. 23. lib. 6. elem. proportionem compoſitam ex ratione rectanguli ſub NC, MA, ad rectangulum ſub ND, DM, & ex ratione rectanguli ſub ND, DM, ad rectangulum ſub MB, BN: ergo per lemma 7. ad lib. 1. rectangulum ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC, habebit rationem compoſitam ex ratione rectanguli ſub NC, MA, ad rectangulum ſub ND, DM, & ex ratione rectanguli ſub ND, DM, ad rectangulum ſub MB, BN. Sed vt rectangulum ſub NC, MA, ad rectangulum ſub ND, DM, ſic quadratum rectæ EB, ad quadratum rectæ BD: (quod ſic probatur; cùm enim per prop. 23. lib. 6. elem. rectangulum ſub AM, CN, ad rectangulum ſub ND, DM, habeat compoſitam rationem, ex ratione AM ad MD, & ex ratione CN ad ND; ſitque per 2. propoſ. lib. 6. elem. vt AM ad MD, ſic EB ad BD; & vt CN ad ND, ſic EB, ad BD; habebit rectangulum ſub AM, CN, ad rectangulum ſub ND, DM, rationem duplicatam eius quæ eſt EB ad BD; ſed per prop. 20. lib. 6. elem. eſt quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BD, in duplicata ratione rectæ EB ad rectam BD: quare per prop. 11. lib. 5. element. vel per 7. lemma ad lib. 1. erit vt rectangulum ſub NC, MA, ad rectangulum ſub ND, DM, ſic quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BD, quod probare propoſueramus.) Ergo per 11. prop. lib. 5. element. rectangulum ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC, erit vt quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BD. Et quia per propoſ. 23. lib. 6. elem. rectangulum ſub ND, DM, ad rectangulum ſub MB, BN, proportionem obtinet compoſitam ex ratione DN ad NB, & ex ratione DM ad MB; & per lemma 50. lib. 1. eſt vt DN ad NB, ſic DC ad CE; & vt DM ad MB, ſic DA ad AE; habebit quoque per lemma 7. lib. 1. rectangulum ſub ND, DM, ad rectangulum ſub MB, BN, proportionem compoſitam ex ratione DC ad CE, & ex ratione DA ad AE: quæ compoſita proportio eſt eadem quam ſibi vendicat per prop. 23. lib. 6. element. rectangulum ſub CD, DA, ad rectangulum ſub AE, EC: Erit igitur per lemma 7. lib. 1. vt rectangulum ſub ND, DM, ad rectangulum ſub MB, BN, ſic rectangulum ſub CD, DA, ad rectangulum ſub AE, EC. Cùm igitur in ſuperioribus probauerimus rectangulum ſub GC, FA, eſſe ad quadratum rectæ AC, ſicut rectangulum ſub ND, MD, ad rectangulum ſub MB, BN; & paulò ante oſtenderimus eſſe vt rectangulum ſub ND, DM, ad rectangulum ſub MB, BN, ſic rectangulum ſub CD, DA, ad rectangulum ſub AE, EC: erit per propoſ. 11. lib. 5. element. rectangulum ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC, ſicut rectangulum ſub CD, DA, ad rectangulum ſub AE, EC: igitur quandoquidem demonſtrauimus rectangulum ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC, eſſe vt quadratum rectæ EB ad quadratum rectæ BD; & modò eſſe vt rectangulum ſub CD, DA, ad rectangulum ſub AE, EC: rectangulum ipſum ſub GC, FA, ad quadratum rectæ AC, obtinebit per lemma 7. lib. 1. rationem compoſitam ex ratione quadrati rectæ EB ad quadratum rectæ BD, & ex ratione rectanguli ſub CD, DA, ad rectangulum ſub AE, EC. quomodò fuit propoſitum.

PROPOSITIO LV.

Si oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant; & per occurſum ducatur linea coniungenti tactus æquidiſtans; per tactus verò ducantur æquidiſtantes contingentibus; & à tactibus ad idem alterius ſectionis punctum ducantur lineæ, quæ æquidiſtantes ſecent. Rectangulum ex abſciſsis conſtans, ad quadratum lineæ tactus coniungentis, eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus factum, ad quadratum lineæ ab occurſu ad ſectionem ductæ, quæ quidem coniungenti tactus æquidiſtet.

SVppoſitio. Oppoſitas ſectiones ABC, DEF, contingant duæ rectæ lineæ AG, DG, in A vnam, in D alteram, concurrentes in puncto G extra ipſas ſectiones; rectaque AD vniat puncta contactuum; & per punctum G occurſus ſit recta linea CGE parallela vnienti rectæ AD, tactus ipſos A, D. Præterea ſint rectæ AH, DN, ex tactibus, parallelæ tangentibus; AH quidem parallela tangenti DG; DN verò parallela tangenti alteri AG. Inſuper ſumptum ſit F punctum in ſectione DEF, ex quo per D & A prædicta contactuum puncta extenſæ

 ſint

sint rectæ FDH, AFN, secantes prædictas parallelas AH, DN, tangentibus, illam in H, istam in N: sed & recta ND producta vltra D, occurret in M, rectæ AH per 11. prop. Procli, quia aliam DG parallelam ipsi AH, secat in D. Assero esse rectangulum sub AG, GD, tangentibus ad quadratum rectæ CG, ab occursu G tangentium ad sectionem ABC, parallelæ ipsi AD vnienti contactus A, D; sicut sub AH, ND, parallelis abscissis; ipsis tangentibus, ad quadratum rectæ AD vnientis contactus A, D

Apparatus. Per punctum F assumptum in sectione DFE, agatur per proposf. 31. lib. elem. recta linea FLKB, æquidistans rectæ AC, secansque obuias tangentes in L & K, producendas si opus sit. Tum per prop. 10. lib. 1. element. diuidatur bifariàm in O, recta AD, & ducatur recta GO, secans rectam FB in P producendam si opus sit, idque iuxta prop. 11. Procli, quandoquidem secat ipsi parallelam AD in O sed & per prop. 30. lib. 1. elem. rectæ lineæ EGC, FB, positæ parallelæ ipsi rectæ AD, erunt parallelæ inuicem. Porrò per proposf. 38. lib. 2. recta GO erit diameter recta coniugata transuersæ quæ per centrum oppositarum sectionum parallela concipienda erit ipsi AD vnienti tactus AB: quare rectæ lineæ AD, FB, EC, erunt parallelæ, prædictæ transuersæ diametro per prop. 30. lib. 1. elem. & per defin. 17. lib. 1. inter primas, illas secabit bifariàm in O, P, G, diameter recta GPO, coniugata dictæ transuersæ. Considerando autem triangulum AGD, quia recta LK parallela est lateri DA, & recta GO, diuidit bifariàm latus DA in O, diuidet etiam bifariàm in P, rectam LK per coroll. nost. ad prop. 4. lib. 6. elem. quare si ex æqualibus PF, PB, demantur æquales PL, PK, relinquentur per 3. axiom. lib. 1. element. æquales LF, KB. Ad hæc quia triangula AFK, NAD, latera habent AD, FK, parallela, in quæ incidit recta NFA, erunt per prop. 29. lib. 1. ele. eorum anguli NAD, AFK æquales; tùm quia habet alia duo latera DN, AK, parallela, in quæ incidit eadem recta seu latus NFA, erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli eorum AND, FAK, æquales; & per coroll. nost. 3. ad proposf. 32. lib. 1. element. reliqui eorum tertij anguli æquales erunt: ideoque ipsa triangula AFK, NAD, æquiangula. Denique quia triangula LFD, ADH, obtinent duo latera LF, AD, parallela, in quæ incidit recta HDF, erunt per proposf. 29. lib. 1. element. eorum anguli ADH, LFD, æquales; tùm quia obtinent duo alia latera LD, AH, parallela, in quæ incidit eadem recta HDF, habebunt per prop. 29. lib. 1. elem. duos alios angulos FDL, DHA, æquales; & per coroll. nost. 3. ad proposf. 32. lib. 1. element. obtinebunt reliquos tertios angulos æquales: quare ipsa triangula LFD, ADH, erunt æquiangula.

Demonstratio. Quandoquidem duæ rectæ lineæ AG, DG, concurrentes in G, contingunt sectiones oppositas; & per occursum G acta est linea recta EGC æquidistans rectæ AD vnienti tactus contingentium, secansque vtramque sectionem in E & C; ductaque est recta FLKB parallela ipsi AC, sectiones secans in F & B, & contingentes in L & K: erit per proposf. 20. rectangulum sub EG, GC; seu quadratum rectæ EG, (propter æqualitatem ostensam in apparatu rectarum EG, GC,) ad quadratum rectæ GD, sicut rectangulum BL, LF. ad quadratum rectæ LD; sunt autem ostensæ in apparatu rectæ KF, FL, æquales respectiuè rectis BL, LF; ergo per 7. & 11. proposf. lib 5. elem. & 49. lemma lib. 1. rectangulum sub CG, GE, hoc est quadratum rectæ CG ad quadratum rectæ DG, sicut rectangulum sub KF, FL, ad quadratum rectæ LD. Et quia recta LK est parallela lateri AD in triangulo AGD; erit per prop. 2. lib. 6. elem. vt DL ad LG, sic AK ad KG; & componendo iuxta prop. 18. lib. 5. elem. vt DG ad LG, sic AG ad KG; & per conuersionem rationis iuxta prop. 19. lib. 5. elem. vt GD ad DL, sic GA ad AK; & vicissim per prop. 16. lib. 5. elem. vt GD ad GA, sic DL ad AK: sed per prop. 1. lib. 6. element. est vt GD ad GA, sic quadratum rectæ GD ad rectangulum sub GD, GA; & vt DL ad AK, sic quadratum rectæ DL ad rectangulum sub DL, AK: igitur per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ GD ad rectangulum sub GD, GA, sic quadratum rectæ DL ad rectangulum sub DL, AK: Quare cùm probauerimus antea esse quadratum rectæ CG ad quadratum rectæ DG, sicut rectangulum sub KF, FL ad quadratum rectæ DL; & modò esse quadratum rectæ GD ad rectangulum sub GD, GA, sicut quadratum rectæ DL ad rectangulum sub DL, AK; erit per prop. 22. lib. 5. elem. ex æqualitate, vt quadratum rectæ CG ad rectangulum sub GD, GA, sic rectangulum sub KF, FL, ad rectangulum sub DL, AK. Verùm per prop. 23. lib. 6. elem. proportio rectanguli sub KF, FL, ad rectangulum sub DL, AK, componitur ex ratione FL ad DL, & ex ratione KF ad AK; est in triangulis æquiangulis ostensis AFK, NAD, per prop. 4. lib. elem. vt KF ad AK, sic AD ad DN; & in alijs duobus triangulis ostensis æquiangulis, per eandem prop. 4. cit. vt FL ad DL, sic DA ad AH: erit per lemma 7. lib. 1. proportio quadrati rectæ CG ad rectangulum sub GD, GA, composita ex ratione AD ad DN, & ex ratione DA ad AH: sed per proposf. 23. lib. 6. elem. proportio quadrati rectæ AD ad rectangulum sub AH, ND, componitur ex dictis rationibus, nimirum ex ratione AD ad DN, & ex ratione DA ad AH; ergo per lemm. 7. lib. 1. erit vt quadratum rectæ CG ad rectangulum sub GD, GA, sic quadratum rectæ AD ad rectangulum sub AH, ND; & inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. vt rectangulum sub GD, GA, ad qua-

quadratum rectæ CG, sic rectangulum sub AH, ND, ad quadratum rectæ AD, ficuti fuit propositum.

PROPOSITIO LVI.

Si vnam oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingentes sibi ipsis occurrant; & per tactus ducantur contingentibus æquidistantes; à tactibus verò ad idem alterius sectionis punctum ducantur lineæ quæ æquidistantes secent. Rectangulum ex abscissis constans, ad quadratum lineæ tactus coniungentis proportionem habebit compositam ex proportione quam habet quadratum portionis lineæ ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ est inter dictum punctum & alteram sectionem, ad quadratum eius quæ inter sectionem & occursum interijcitur; & ex proportione quam habet rectangulum sub contingentibus factum, ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

Sypposítio. Oppositarum sectionum AB, CD, contingant vnam AB, rectæ AE, BE, quæ conueniant in E rectaque AB vniat tactus A, C : tùm per tactum A, sit recta AM parallela tangenti BE; & per tactum B, altera recta BN parallela alteri tangenti AE. Præterea ex aliquo puncto, puta C, alterius sectionis CD oppositæ, per tactus A & B, egrediantur aliæ duæ rectæ lineæ CAN, CBM, quæ æquidistantes ductas AM, BN, secent, in A & N, & in B & M. Porrò recta AB vniens tactus secetur bifariàm in L per propos. 10. lib. 1. elem. & ducatur recta LE producenda vltra E donec secet ex datis in D alteram sectionem CD. Assero autem rectangulum sub BN, AM, abscissis parallelis relatiuè tangentibus, ad quadratum rectæ AB vnientis tactus, habere proportionem compositam ex ratione quadrati rectæ LD sitæ inter punctum L medium rectæ AB, & alteram sectionem CD, ad quadratum rectæ DE sitæ inter occursum E tangentium, & alteram sectionem CD; & ex ratione rectanguli sub AE, EB, contingentibus; ad quartam partem quadrati rectæ AB coniungentis tactus, hoc est ad quadratum rectæ AL, vel LB, iuxta coroll. nost. ad propos. 20. lib. 6. Elem. vel ad rectangulum sub AL, LB, propter æqualitatem linearum AL, LB.

Apparatus. Quandoquidem duæ rectæ lineæ AE, BE, dantur contingere vnam AB è datis sectionibus oppositis, productæ versus alteram, eam non attingent, neque ei occurrent, per prop. 33. lib. 2. Quare si per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto C, sectionis CD, agatur recta linea KCXPG, æquidistans ipsi ALB sectæ ab tangentibus AE, BE, & recta DEL; secabitur etiam ab eisdem productis vltra E, & D, in punctis K, X, G; & quidem in K & G, extra locum sectionis CD, quandoquidem vti probatum est nunquam tangentes datæ AE, BE productæ in infinitum possunt occurrere sectioni CD; sed & obuiam sectionem CD, quæ potest per prop. 8. lib. 1. extendi in infinitum ad partes contrarias vertici proprio, in punctis C & P. Insuper per prop. eandem 31. lib. 1. element. ex puncto D ponatur alia recta HDF, parallela prædictæ rectæ AB; quæque per prop. 30. lib. 1. element. erit parallela alteri KCXPG; & per prop. 11. Procli secabitur ab tangentibus AEG, BEK, in H, & F, quia secant aliam AB parallelam. Sed & per prop. 29. lib. 2. recta EL erit diameter datarum sectionum oppositarum, ideoque incedet per centrum ipsarum ex natura propria; eritque per coroll. nostrum 30. ad prop. 49. lib. 2. ipsa recta ALB, ordinatim applicata diametro DEL, & alia etiam CXP parallela posita ipsi ALB, intra alteram sectionem CD; eritque etiam bifariàm diuisa in X ipsa recta CXP. Et quia in B vertice sectionis CD, est recta linea HDF parallela ipsi CXP ordinatim applicatę diametro XDEL; ipsa recta HDF, erit per prop. 32. lib. 1. contingens sectionem CD in D. Iam verò quia sunt duæ rectæ lineæ ALB, HDF, parallelæ in quas incidunt rectæ HEB, DEL, FEA; erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli æquales DHE, LBE, æquales; tùm anguli DFE, LAE, æquales; tùm anguli HDE, BLE, æquales; tùm anguli FDE, ALE, æquales; tùm anguli ad verticem HEF, BEA, æquales, per prop. 15. lib. 1. element. tùm etiam anguli æquales HED, LEB; tùm etiam anguli æquales FED, AEL: ideoque triangula æquiangula AEB, FEH; tùm alia duo æquiangula HED, BEL; tùm alia duo æquiangula FED, AEL. Igitur erit per prop. 4. lib. 6. element. vt BL ad LE, sic HD ad DE; & vt LE ad LA, sic DE ad DF; ergo per prop. 22. lib. 5. elem. ex æquo erit vt BL ad LA, sic HD ad DF; BL autem recta est æqualis rectæ LA; ergo erit etiam HD æqualis ipsi DF, per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. & quia in triangulo KEG, recta HDF est parallela basi KXG, & recta EDX, diuidit bifariam in D, rectam HDF, vti probauimus, etiam per coroll. nost. ad prop. 4. lib. 6. elem.

ctæ AB, seu ad rectangulum sub AL, LB, seu ad quadratum rectæ AL, vel LB. sicuti fuit propositum, & erat demonstrandum.

COMMENTARIVS IN DEFINITIONES ADDITAS LIBRO QVARTO CONICORVM APOLLONII PERGÆI.

I.

Angulus asymptotis contentus. Est angulus factus ab duabus asymptotis Hyperboles, continens ipsam.



XEMPLI gratia. Sit Hyperbola vnica B, vel duæ oppositæ A, B; earumque vel vnius asymptoti definitæ in defin. 3. lib. 2. profluentes ex centro C. Angulus DCE, vel GCF, asymptotis contentus, continensque hyperbolam propriam, est angulus definitus; non autem alij anguli GCD, FCE, nisi etiam sint aliæ duæ sectiones oppositæ & coniugatæ datis A, B. Porrò anguli GCD, vel FCE, dicuntur in hoc libro, ab Apollonio in vna hyperbola, vel oppositis duabus, anguli deinceps ei qui asymptotis continetur.

II.

Duo puncta continere vnum aut plura in sectionibus vel circuli circumferentia. Est quando inter duo extrema puncta arcus vnius dati in lineis curuis sectionum conicarum vel circuli circumferentiæ, sita sunt alia duo puncta vel plura data, vel vnum tantummodo.

VErbi gratia. Datus sit in sectione B, arcus lineæ eius curuæ HB, vel circuli circumferentiæ; & inter H, B, extrema dicti arcus, data sint puncta I, K, vel vnicum I: dicentur iuxta hanc definitionem, puncta H, B, continere duo alia puncta I, K, vel vnicum I.

III.

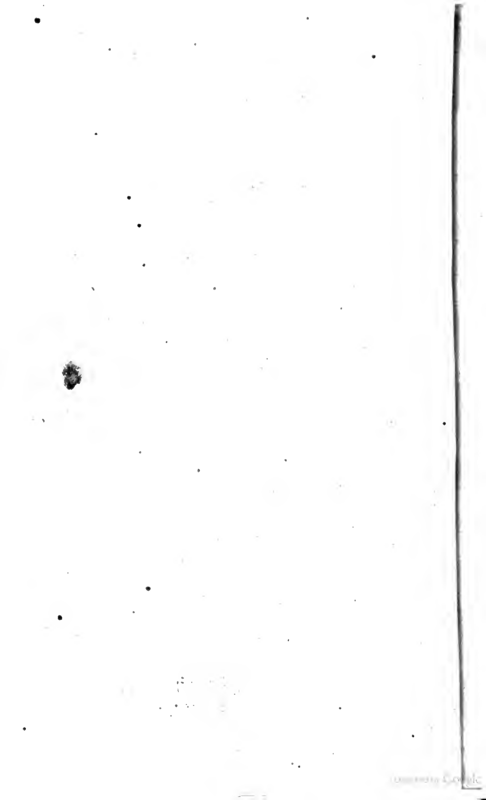
Duo puncta non continere vnum aut plura puncta in sectionibus conicis, vel circuli circumferentia. Est quando inter duo puncta arcus vnius dati in sectionibus vel circulo, non sunt sita alia puncta vel vnum data, sed extra illum arcum in eadem linea curua sectionis vel circuli.

NImirum datus sit arcus HB in linea curua sectionis vel circuli; & inter extrema H, B, dati arcus, non sint sita data alia puncta M, L, vel vnicum M, sint verò in linea curua sectionis vel circuli: dicentur iuxta hanc definitionem puncta H, B, non continere alia puncta M, L, vel vnum tantùm M.

IV.

Concaua vel conuexa linearum curuarum conicarum & circuli ad easdem partes dirantur. Quando concaua vel conuexa ipsarum linearum curuarum vergunt ad easdem partes.

VIdelicet in duabus lineis curuis ABC, ADC, quia conuexa earum vergunt ad easdem partes superiores, & concaua illarum vergunt ad easdem partes inferiores, respectu figu-



gruent, & alij duo anguli KAF: quare recta BAK congruet rectæ BAK; sed data est recta BAK contingere in puncto A, sectionem HAI; & per apparatum, recta BAK ducta est contingens sectionem DAE in A puncto: ergo si duæ curuæ lineæ sectionum conicarum se mutuo contingant in aliquo puncto, conuexa habentes è regione sita, recta linea contingens vnam in puncto communi contactus, continget etiam alteram curuam lineam sectionum conicarum, quod erat concludendum: Et sic totum lemma manifestatum erit.

COMMENTARIVS

IN

PROPOSITIONES LIBRI QVARTI CONICORVM APOLLONII PERGÆI.

PROPOSITIO I.

Si in coni sectione, vel circuli circumferentia, aliquod punctum extra sumatur; atque ab eo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ, vna quidem contingens, altera verò in duobus punctis secans; & quam proportionem habet tota linea secans ad partem sui ipsius, quæ extra sumitur inter punctum & sectionem interiecta, in eandem diuidatur quæ est intra; ita vt rectæ lineæ eiusdem rationis ad vnum punctum conueniant: Quæ à tactu ad diuisionem ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extrasumptum, sectionem continget.



Vppositio. Extra coni sectionem, vel circuli circumferentiam ABC, sit punctum D datum; ex quo duæ rectæ lineæ decidant; vna DB sectionem in B, vel circuli circumferentiam contingens in puncto B; altera verò eam secans in duobus punctis EC, sit DEC: & per prop. 10. lib. 6. element. secta sit huius rectæ portio CE quæ intra sectionem est vel circuli circumferentiam iuxta prop. 10. lib. 1. secta, inquam, sit in puncto F, secundum rationem CD ad DE, hoc est vt tota CD ad eius portionem DE sitam inter punctum externum D & E punctum sectionis vel circuli circumferentiæ vicinius puncto D, sic CF ad FE; ita enim lineæ eiusdem rationis ad vnum punctum E conuenient: videlicet consequentes desinent in eodem puncto E, & antecedentes ab vno puncto C incipient. Dico autem rectam lineam quæ ex B puncto tactus, per F punctum diuisionis factæ rectæ CE, transmittetur, occurret sectioni vel circuli circumferentiæ in puncto A, ex quo ad D externum punctum recta linea AD ducenda, continget in A sectionem vel circulum.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto D, poterimus ad partes contrarias rectæ DB contingentiá respectu secantis DEC, rectam aliam deducere DA contingentem sectionem in A, vel circulum: & ex puncto A ad B, rectam lineam AB tactus coniungentem ducere.

Demonstratio. Vel recta AB iuxta apparatum ducta, incedit per punctum F factum in linea recta EC, vel per aliud, eam enim secare debet obuiam. Si primum, habemus intentum; nam recta BF producta, occurret sectioni vel circulo in A; & recta AD sectionem vel circulum continget. Si secundum, secet si fieri posse

autem prima minor, est quàm tertia CF; ergo per prop. 14. lib. 5. element. GE secunda minor erit quàm quarta FE; pars, quàm totum, contra 8. axiom. lib. 1. element. inepta igitur est positio aduersarij, & vera assertio propositionis. Eodem artificio demonstrabitur si G punctum sit inter E & F.

PROPOSITIO V.

Iisdem positis. Si punctum D sit in vna asymptotorum: quæ à puncto B ad F ducitur, eidem asymptoto æquidistabit.

Positis eisdem quæ in superiore propos. 4. punctum verò D sit in vna asymptotorum, puta MXN. Dico rectam transmittendam ex puncto B contactus per F punctum rectæ CE, parallelam ipsi MXN asymptoto, transire per punctum F: vel quod idem est, rectam ex B per F ducendam, esse parallelam asymptoto MXN.

Apparatus, & demonstratio. Si recta BF, non sit parallela ipsi asymptoto MXN. poterimus per prop. 31. lib. 1. element. rectam aliam ex B transmittere parallelam rectæ MXN, quæ secabit rectam CE in alio puncto G diuerso ab F, idque per prop. 11. Procli. Verùm per prop. 35. lib. 3. erit propterea vt CD ad DE, sic CG ad GE; datur verò vt CD ad DE, sic CF ad FE: ergo per prop. 11. lib. 5. element. erit vt CG ad GE, sic CF ad FE; CG autem prima minor est quàm CF tertia, ergo per prop. 14. lib. 5. element. secunda GE minor erit quàm quarta FE; pars maior toto, contra 8. axiom. lib. 1. elem. Quod si punctum G, sit inter C & E, idem deducemus absurdum ex eisdem principijs: igitur falsa erit positio introducta, & vera propositionis assertio.

PROPOSITIO VI.

Si in hyperbola aliquod punctum extrà sumatur, à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ, altera quidem contingens, altera verò æquidistans vni asymptoto; & portio æquidistantis inter sectionem & punctum interiecta, æqualis sit ei quæ intra sectionem continetur: linea quæ à tactu ad factum punctum ducitur occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum, sectionem continget.

Suppositio. Sit hyperbole AEB, eiusque asymptoti sint datæ; MXN, KXL, punctumque D extra hyperbolen sit intra angulum KXN continentem hyperbolen, ex quo decidens recta DB, sectionem contingat in B, & alia recta DEF æquidistans asymptoto XK, & secans ipsam sectionem in E, & eius portio EF sit æqualis portioni ED. Dico rectam BF transmittendam ac producendam vltra F, occurrere sectioni in alio puncto A, ad quod si recta DA ducatur, tanget in A ipsam sectionem.

Apparatus & demonstratio. Per prop. 49. lib. 2. ex D puncto ducatur recta DA sectionem contingens in A, & recta A vniat puncta A & B contactuum. Si recta ista linea AB transeat per punctum F rectæ DEF, manifesta erit propositio: si non transeat per punctum F, secabit ipsam DEF, in alio puncto G. Tunc verò per prop. 30. lib. 3. recta DE, & recta EG, erunt æquales: ponebantur verò æquales DE, DF; ergo per 1. axiom. lib. 1. elemen. DF, DG, æquales erunt, contra 8. axiom. lib. 1. elem. pars toti. igitur positio introducta falsa erit, assertio verò propositionis vera.

PROPOSITIO VII.

Iisdem positis. Sit punctum D in angulo deinceps ei qui asymptotis continetur, sectionemque non continet. Dico etiam sic eadem euenire.

Apparatus. Ex eodem puncto D, per propos. 49. lib. 2. ducatur recta DH sectionem oppositam H contingens in H: ductaque recta BH, & producta vltra B, non transeat si fieri potest per punctum F, sed per aliud puta G, rectæ DEF.

Demonstratio. Per prop. 31. lib. 3. rectæ DE, EG, æquales erunt: dantur rectæ DE, EF, æquales; ergo per 1. axio. EG, GE, æquales erunt, pars toti, contra 8. axiom. lib. 1. element. absurdum hoc condemnat falsitatis positionem introductam; & adstruit assertionem propositionis.

PROPOSITIO X.

Hæc quidem communiter in omnibus; at in ſola hyperbola; ſi alia quidem eadem ſint; vnius autem rectæ lineæ occurſus contineant occurſus alterius, & punctum D ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum: Eadem prorſus euenient, quæ dicta ſunt, vt in ſecundo theoremate tradidimus.

HÆc propoſitio in apparatu ſuperioris nonæ explicata eſt quoad punctum D intra angulum aſymptotis comprehenſum datum, reliqua vero facilia ſunt; & lucem accipient ex his quæ diximus in apparatu citato, & modo dicemus ad ſequentem prop. 11.

PROPOSITIO XI.

Iiſdem poſitis. Si vnius lineæ occurſus, occurſus alterius non contineant; & punctum D ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum: & figura & demonſtratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

HÆ duæ propoſitiones poſtremæ circa hyperbolam lucem accipiunt ab ſecunda & tertia huius libri: tùm etiam ex dictis in apparatu ad demonſtrationem propoſitionis nonæ, euocando noſtra corollaria ad propoſ. 49. lib. 2. Nam rectè apponit Author caſus in ſola hyperbola, quando punctum D externum eſt intra angulum aſymptotis comprehenſum, & continentem ipſam hyperbolen: ſi enim eſſet punctum D, in vna aſymptotorũ, vel in angulo ei deinceps, non poſſent duæ rectæ duci ab illo contingentes hyperbolam, vti in apparatu ad prop. cit. 9. oſtendimus, ex noſtris corollarijs ad prop. 49. lib. 2. quæ neceſſaria erant ad has demonſtrationes. Quod verò in hac propoſitione mentionem fecerit ſolius hyperbolæ, non aliarum ſectionum; & in præcedente excluſerit alias ſectiones ab hyperbola; ratio eſt quia in alijs ſectionibus nullæ ſunt lineæ aſymptoti; & ex quocumque puncto extra illas dato ſemper duæ lineæ contingentes ipſas duci poſſunt, vti conſtat ex noſtris corollarijs ad prop. 49. lib. 2. quæ conſultò ibidem inſeruimus, vt facerent ad multas demonſtrationes conſequentium propoſitionum.

PROPOSITIO XII.

Iiſdem poſitis. Si occurſus vnius lineæ, alterius occurſus contineant; & punctum ſumptum ſit in angulo deinceps ei qui aſymptotis comprehenditur: linea per diuiſiones ducta ſi producatur, occurret oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum D, oppoſitas ſectiones contingent.

SVppoſitio. Hyperbole ſit EG, eiuſque aſymptoti ORP, xRN, prouenientes ex R centro: punctum verò datum D, in angulo xRP, deinceps ei qui & hyperbolen EG continet, ſitque ab aſymptotis RN, RP; ductæque ſint duæ rectæ DHE, DGF; quarum vtraque in duobus punctis ſectionem ipſam EG ſecet, prima in H & E, ſecunda in G & F; & puncta E, H, ab punctis F, G, contineantur, iuxta definit. 2. libri huius: ſitque vti in ſuperioribus vt ED ad DH, ſic EK, ad KH; & vt FD ad DG, ſic FL ad LG. Dico rectam lineam KL coniungentem puncta K, L, occurrere ſectioni EG, in puncto S, & ſectioni oppoſitæ in alio puncto M, ſi producatur; tùm rectas ducendas ab his punctis S, M, occurſus lineæ LK productæ cum ſectionibus oppoſitis, ad punctum ipſum D, contingere ipſas ſectiones oppoſitas, in eiſdem punctis S & M.

Apparatus. Ex puncto D, per prop. 49. lib. 2. emittatur recta linea DS ſectionem EG contingens in S; & ex eodem puncto D, altera linea DM, ſectionem oppoſitam in M contingens: poſſe autem ex puncto D dato intra angulum qui eſt deinceps angulo continentem hyperbolam, poſſe, inquam, rectam vnicam duci contingentem hyperbolam, conſtat ex coroll. noſt. 7. ad prop. 49. lib. 2. citatam; tùm etiam ad aliam oppoſitam: non enim duæ imperantur duci ex ipſo puncto D ad vnam hyperbolam, tangentes ipſam, ſed vna ad vnam, altera ad alteram. Iuncta autem recta MS, & producta verſus ſecantes datas rectas DHE, DGF, vel portiones EH, FG, ſecabit in punctis ſumptis ſeu datis K, L, vel in alijs, puta in X puncto rectæ FG, diuerſo ab L.

Demonſtratio. Si recta MS producta ſecet rectas EH, FG, in punctis K, L, manifeſta erit propoſitio. Si ſecet rectam EH in K, & aliam FG in puncto X, diuerſo ab L. erit per prop. 37. lib. 3. vt tota FD, ad partem GD, ſic FX ad XG: datur autem vt tota FD, ad partem eius

GD, sic FL ad LG; ergo per prop. 11. lib. 5. element. erit vt FX ad XG, sic FL ad LG; sed FX minor est quàm FL, ergo per propos. 14. lib 5. elem. XG minor erit quàm LG, totum parte, contra 8. axiom. lib. 5. elem. Quod si punctum X sit inter puncta LG, eodem argumento concludetur absurdum consequens. Quod si etiam recta MS producta, secet ambas rectas EH, FG, in diuersis punctis ab K, & L; ex eisdem principijs reducemus ad absurdum contra 8. axiom. cit. aduersarium. Atque ita euidens erit falsitas introductæ positionis, & veritas propositionis.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis. Si punctum D, sit in vna asymptotorum, & reliqua eadem existant: Quæ per diuisiones transit linea, asymptoto in qua est punctum, æquidistabit; & producta occurret sectioni: quæ verò ab occursu ad punctum ducitur, sectionem continget.

Svppositio. Sit hyperbole EH, eiusque asymptoti OP, XM, punctum D in vna OP asymptotorum; ex quo puncto D, sint emissæ duæ rectæ lineæ DHE, DGF, singulæ secantes sectionem in duobus punctis, prima in H & E, altera in G & F: diuisæ EH, FG, in K, & Q, vt totæ secantes propriæ ad portiones suas proprias sitas inter punctum D, & sectionem datam hyperboles. Dico rectam lineam KQ transmittendam æquidistare asymptoto OP, in qua datum fuit punctum D, & si producatur vsque ad sectionem in B, rectam ex D ad B ducendam, contingere ipsam sectionem hyperboles in puncto B.

Apparatus. Ex puncto D, poterit per prop. 49. lib. 2. transmitti recta linea DB tangens hyperbolen in B; & per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto B, agi recta linea parallela asympto OP, in qua punctum D datum est.

Demonstratio. Si recta linea ex B educta parallela asymptoto OP, incedat per puncta K & Q, manifestum erit propositum. Si non transierit per vtraque puncta; transeat si fieri possit per punctum L, in recta FG, diuersum ab Q: tunc verò per prop. 37. lib. 3. erit vt FD ad DG, sic FL ad LG; datur autem vt FD ad DG, sic FQ ad LG: ergo per propos. 11. lib. 5. elem. erit vt FQ ad QG, sic FL ad LG; FQ autem maior est quàm FL, ergo per prop. 14. lib. 5. elem. QG maior erit quàm LG, pars quàm totum contra 8. axiom. lib. 5. element. Simile absurdum deducetur si punctum L sit inter puncta Q, G etsi sumamus aliam rectam EH, quam secet recta parallela asymptoto OP, in alio puncto quàm K. Igitur manifesta fit absurditas introductæ positionis, & veritas propositionis.

PROPOSITIO XIV.

Iisdem positis. Si punctum D sit in vna asymptotorum; & linea quidem DE, sectionem in duobus H & E punctis secet; DG verò alteri asymptoto æquidistans secet in vno tantùm puncto, quod sit G; fiatque vt ED ad DH, sic EK ad KH; & ipsi DG ponatur æqualis GL: Quæ per puncta K, L, transit linea, & asymptoto æquidistabit, & sectioni occurret; quæ verò ab occursu ducitur ad D, sectionem continget.

Svppositio clarior erit huiusmodi. Hyperboles EHG, asymptoti sint OP, XN; punctumque D datum in asymptoto vna OP: rectaque DHE, sectionem secet in duobus punctis H, E; altera verò recta DG, parallela alteri asymptoto XN, solummodò secet in G sectionem, puncto vnico; sitque GL portio producta DG, vltra G, æqualis ipsi DG: fitque vt ED ad DH, sic EK ad KH. Dico rectam KL transmittendam, esse æquidistantem asymptoto OP in qua punctum D, & occurrere productam in puncto B sectionis, ad quod recta ducta linea ex puncto D, sectionem ipsam in B continget.

Apparatus. Per propos. 49. lib. 2. ex puncto dato D, emittatur recta linea BD tangens sectionem in B; & per prop. 31. lib. 1. element. ex puncto B agatur recta linea parallela asymptoto OP.

Demonstratio. Si recta dicta linea ex puncto B educta parallela ipsi OP asymptoto, incedat per puncta K & L, propositum erit euidens. Si transierit solummodò per punctum K, & non per punctum L, infra vel supra L, non erunt æquales rectæ DG, GL, contra datum; nam per propos. 31. lib. 3. fient æquales aliæ portiones sitæ inter G punctum sectionis, & alia extrema, quarum vnum est D, aliud sectio communis rectæ DGL productæ aut non productæ, & ductæ rectæ parallelæ ipsi OP. Quod si solùm transierit ducta illa parallela per punctum L, & non per punctum K, non erit vt ED ad DH, sic EK ad KH, vel absurdum non euitabitur toties explicatum. Quod si ducta illa parallela non incesserit per punctum

ctum K, & L, dicta absurda consequentur. Igitur introducta suppositio falsa erit, & propositio vera.

PROPOSITIO XV.

Si in sectionibus oppositis inter duas sectiones sumatur punctum aliquod, & ab ipso duæ lineæ ducantur; altera quidem contingens vnam oppositarum sectionum; altera verò vtramque secãs; & quam proportionem habet linea inter sectionem, quam non contingit, & punctum intercepta, ad lineam quæ est inter punctum & alteram sectionem; eandem habeat linea quædam maior ea, quæ inter sectiones interijcitur ad excessum ipsius in eadem recta, & ad eundem terminum cum linea eiusdem rationis: Quæ à termino maioris lineæ ad tactum ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad sumptum punctum, sectionem continget.

Svppositio. Sint oppositæ A, B, sectiones; sumptumque punctum aliquod D, inter duas oppositas sectiones, & intra angulum MHK continentem hyperbolen asymptotis comprehensum, ex quo puncto D, ducatur linea quidem recta DF contingens sectionem B in F, altera verò recta ADB, ambas sectiones attingens; tùm per lemma 12. ad lib. 2. quam proportionem obtinet AD ad DB, habeat AC ad CB. Dico rectam FC transmittendam, & producendam vltra C, occurrere sectioni eidem B, in puncto E; tum rectam ab D ad E ducendam, ipsam sectionem B contingere in eodem puncto E.

Apparatus. Datur punctum D intra angulum sectionem B continentem, ideoque extra quamlibet ex asymptotis eius, & angulum deinceps ei qui sectionem continet; ergo per propos. 49. lib. 2. & iuxta coroll. nost. 5. ad illam, poterunt duci duæ tantum rectæ lineæ contingentes hyperbolam B: datur autem vna DF, ergo aliam poterimus ducere quæ sit DE, & coniungere recta linea FE, duo puncta F, & E, contactuum.

Demonstratio. Vel recta linea FE transit per punctum C, rectæ ADBC, vel per aliud diuersum ab illo, puta G. Si primum consequuti sumus intentum. Si secundum: Quando quidem vtraque rectarum DF, DE, contingentium hyperbolen B, secat diametrum eius inter verticem & centrum sectionis, per coroll. ad propol. 31. lib. 2. punctum D in quo conueniunt erit in ipsa diametro inter verticem & centrum sectionis, hoc est in transuerso latere illius: ergo per prop. 30. lib. 2. diameter ista ABCG bifariàm secabit rectam FE nectentem puncta F & E contactuum; quare per corollar. nost. 23. ad prop. 49. lib. 2. ipsa FE erit ordinatim applicata diametro prædictæ. Igitur per prop. 36. lib. 1. erit vt AD, ad DB, sic AG ad GB; datur autem vt AD ad DB, sic AC ad CB; ergo consequens illud deductum ex positione introducta, destruit datum, quod absurdum est: ideoque absurda erit introducta positio, & vera assertio.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem positis. Sit punctum D in angulo deinceps ei qui asymptotis continetur, & reliqua eadem fiant. Dico lineam à puncto F ad C productam occurrere oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad D, eandem sectionem contingere.

Positis ijsdem quæ superiore prop. 15. punctum D sit datum in angulo deinceps ei qui asymptotis continetur. Dico rectam FC transmittendam producendamque occurrere sectioni A alteri in puncto E, rectamque ex D per E ducendam contingere sectionem A in E.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto D, recta linea DE agatur sectionem A contingens in E; & recta EF traijciatur producenda vltra donec occurrat rectæ ADBC in aliquo puncto.

Demonstratio. Si recta EF secuerit rectam ADBC in puncto C, consequuti erimus intentum propositionis, si secuerit in alio puncto puta G, erit iuxta prop. 39. lib. 3. erit AD ad DB, sic AG, ad GB; quare non erit vti datum est vt AD ad DB, sic AC, ad CB. consequutio hæc destruens datum, absurditatem positionis introductæ condemnat, & veritatem propositionis adstruit.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis. Sit punctum D in vna asymptoto. Dico lineam quæ ab F ad C ducitur, asymptoto in qua est punctum æquidistare.

SVpponantur eadem quæ in superiore prop. 16. solumque punctum D sit in vna solum asymptotorum.

Apparatus. Per prop. 31. lib. 1. element. ex puncto F, transmittatur recta linea parallela asymptoto in qua punctum D datur existere.

Demonstratio. Si ista recta linea parallela transierit per punctum C, propositum adepti erimus. Si non transeat per punctum C, sed per aliud rectæ ADBC, puta G; erit per prop. 36. lib. 3. vt AD ad DB, sic AG, ad GB; & sic destruitur datum, vt AD ad DB, sic AC ad CB; recta igitur linea ducta ab F ad C, æquidistabit asymptoto in qua punctum D.

PROPOSITIO XVIII.

Si in sectionibus oppositis aliquod punctum sumatur inter duas sectiones; & ab ipso duæ lineæ ducantur, vtramque sectionem secantes; & quam proportionem habent interiectæ inter vnam sectionem & punctum, ad eas quæ inter punctum idem, & alteram sectionem interijciuntur; eandem habeant lineæ maiores ijs quæ sunt inter sectiones oppositas, ad excessus ipsarum: Quæ per terminos maiorum linearum transeunt, occurrent sectionibus; & quæ ab occursibus ad sumptum punctum ducuntur, sectiones contingent.

SVppositio. Inter sectiones oppositas A, B, sit primo loco punctum D in angulo continente sectionem B, vel in angulo ab asymptotis comprehenso. Tum ex D, egrediantur duæ rectæ lineæ ADB, CDH, vtramque sectionem secantes, prima in A & B, altera in C H. Certum est per prop. 8. lib. 2. rectas BN, AM, esse æquales; & rectam BN quia continet rectam BD, (vtpotè prouenientem ex puncto D intra angulum asymptotis comprehensum, aliam verò egredientem ex puncto N vnius asymptotorum,) maiorem esse recta BD; igitur multò maior erit AD continens AM æqualem maioti BN, quàm recta BD: sed CD maior etiam quàm HD si transierit tota CDH per centrum sectionum in quo bifariàm secabitur per prop. 30. lib. 1. cùm sit punctum D in semisse rectæ CDH, iuxta coroll. prop. 31. lib. 1. citati: Quòd si recta CDH, non incesserit per centrum sectionum, simili modo probabitur recta HD minor quàm CD, quo probauimus rectam DB esse minorem recta AD. Quam verò proportionem obtinet AC ad DB, habeat per lemma 12. ad lib. 2. AK maior quàm AB, ad KB; tùm eandem proportionem habeat recta GC maior quàm AH, ad GH, quam obtinet CD ad DH. Dico rectam GK traijciendam occursuram vtrimque in E & F, sectioni B; rectasque transmittendas ex dicto puncto D, per puncta E. F, contacturas ipsam sectionem B, in punctis, E. F.

Apparatus. Ex puncto D dato primùm in angulo asymptotis comprehenso poterimus per prop. 49. lib. 2. & coroll. nost. 5. ad illam, transmittere duas rectas lineas DE, DF, contingentes hyperbolam B, in punctis E, F.

Demonstratio. Recta linea EF, nectens puncta E, F, contactuum tangentium rectarum linearum ductarum DE, DF, vel incedit per puncta inuenta & data modo prædicto in propositione, G, & K; vel non incedet per illa. si incedat, manifesta est propositio. Si non incedat, secabit dictas lineas ambas vel alterutram in diuersis suis punctis ab prædictis; eritque exempli gratia in vna illarum, vt CD ad DH, sic tota intercepta ab extremo C, ad aliud suum extremum diuersum ab G, ad portionem suam ab extremo eodem prædicto diuerso ab G, ad H punctum suum, per prop. 36. lib. 1: hoc autem destruit datum, nimirum esse CG ad GH, sicut CD ad DH. falsa ergo erit positio introducta, & assertio propositionis vera.

PROPOSITIO XIX.

Sumatur autem punctum D in angulo deinceps ei qui asymptotis continetur; ducanturque rectæ lineæ sectiones secantes; & vt dictum est diuidantur. Dico eam, quæ per G, K, producitur, occurrere sectionum vtrique; & quæ ab occursibus ducuntur, ad D, sectiones contingere.

Appa-

APparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto D, ad singulas sectiones ducantur suæ propriæ rectæ lineæ tangentes DF, DE. Et aduerte nos propter figuræ angustias, nos reflexisse partes rectarum, ADBK, CDHG, concurrentium seu angulos efficientium in K & G, cum recta FEKG, quam etiam refleximus.

Demonstratio vel recta linea transmittenda FE, producendaque secat rectas lineas CDHG, ADBK, in punctis datis K, & G, proprijs? consequuti sumus propositum. Si secet in alijs punctis, erit in vna verbi gratia vt CD ad DH, sic tota sita inter C & punctum aliud ab G, ad partem suam sitam inter H & hoc punctum prædictum diuersum ab G; idque per prop. 39. lib. 3. hoc verò destruit datum, nimirum esse vt CD ad DH, sic CG ad GH. falsa igitur erit positio introducta, & vera propositio.

PROPOSITIO XX.

Si sumptum punctum sit in vna asymptotorum, & reliqua eadem fiant: Linea quæ transit per terminos excessuum, asymptoto in qua est punctum, æquidistabit; & quæ à puncto ducitur ad occursum sectionis, & lineæ per terminos transeuntis, sectionem continget.

SVppositio manifesta ex datis, & suppositione aliarum huiusmodi prop. sintque rectarum CDHG, ADBK, termini dati G & K, proprij. Dico rectam traiectam per puncta K, G, productam esse æquidistantem asymptoto in qua punctum D; & sectioni sectæ B, occurrere in puncto verbi gratia F, ex quo recta ad D extensa, ipsam sectionem continget in F puncto prædicto.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto D in vna asymptotorum dato, ducatur recta DF tangens sectionem B in F: & per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto F, transmittatur recta linea parallela asymptoto in qua datum est D punctum.

Demonstratio. Si hæc parallela recta, incesserit per puncta K, & G, manifesta erit propositio. Si non incesserit, secabit dictas rectas secantes in alijs punctis: eritque per 36. prop. lib. 3. verbi gratia in recta CDHG, vt CD ad DH, sic tota CDH terminata in diuerso puncto ab G, ad portionem eius inter H & terminum diuersum ab G. hoc autem destruit datum, vt CD, ad DH, sic GC, ad GH. igitur falsa erit positio, & vera assertio. Simili modo recta prædicta ex F puncto, educta parallela asymptoto in qua punctum D, transire per punctum K, rectæ ADBK.

PROPOSITIO XXI.

Sint rursus oppositæ sectiones A, B; sitque punctum D in vna asymptotorum; & linea quidem DBK, in vno tantùm puncto occurrat sectioni B, alteri asymptoto æquidistans; linea verò CDHG vtrique sectioni occurrat; & vt CD ad DN, ita CG ad GH; & ipsi DB æqualis BK. Dico lineam quæ per puncta K, G, transit, occurrere sectioni; asymptotoque in qua punctum D, æquidistare; & quæ ab occursu ad punctum D ducitur, sectionem contingere.

APparatus. Per prop. 49. ex puncto D ducatur recta linea DF contingens sectionem B in F: tùm ex puncto F per prop. 31. lib. 1. elem. agatur recta linea parallela asymptoto in qua punctum D datum est.

Demonstratio. Si hæc ducta recta parallela, transierit per puncta K, & G, propositio erit euidens. Si transierit per puncta diuersa ab K & G, sic discurremus. primoque secet rectam DBK in alio puncto ab K, erit per prop. 34. lib. 3. portio BD æqualis portioni sitæ inter B & aliud punctum ab K, sed portioni BD data est æqualis portio KB, ergo per 1. axiom. lib. 1. portiones istæ inæquales, BK, & alter sita inter B & aliud punctum ab K, æquales erunt, contra 8. axio. lib. 1. elem. Si secundò secet rectam HG in diuerso puncto ab G: erit per prop. 36. lib. 3. vt CD ad DH, sic tota CDH sita inter C & punctum diuersum ab G, ad portionem eius terminatam puncto H & alio diuerso ab G; hoc destruit datum esse vt CD ad DH; sic CG ad GH. ergo positio introducta erit rationi repugnans, & propositio confirmata in veritate.

PROPOSITIO XXII.

Sint similiter oppositæ sectiones, & asymptoti; & punctum D sumatur in angulo deinceps ei qui asymptotis continetur; linea verò CDH, secet vtrasque sectiones, & DB alteri asymptoto æquidistet; sitque vt CD ad DH, sic CG ad

GH; & DB æqualis ponatur BK. Dico lineam quæ per puncta K, G, transit, occurrere vtrique oppositarum sectionum: & quæ ab occursibus ducuntur ad D, sectiones easdem contingere.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto D, transmittantur rectæ lineæ DF, DE, tangentes hyperbolas, vnam vna, alteram alia.

Demonstratio. Recta EF volens puncta contactuum E, F, producta, vel transibit per puncta data K, G, rectarum CDHG, DBK, vel non. si transierit euidens est propositio. Si non transierit primo loco per punctum K rectæ DBK, sed per aliud; per prop. 31. lib. 3. erit portio rectæ DBK, infra B versus K, æqualis ipsi DB; datur autem BK æqualis ipsi DB, ergo pars & totum erunt æqualia, contra 8. axiom. lib. 1. element. secundo loco transeat recta EF producta per aliud punctum ab G; erit per prop. 39. lib. 3. vt CD ad DH, sic tota recta secans terminata puncto C, & alio diuerso ab G, ad eius portionem sitam inter H, & punctum illud diuersum ab G; quod destruit datum, videlicet vt CD ad DH, sic CG ad GH. hæc absurda condemnant falsam introductam positionem, & adstruunt propositum.

PROPOSITIO XXIII.

Sint itidem oppositæ sectiones A, B; punctumque D sit in angulo deinceps ei qui asymptotis continetur; & linea quidem BD, sectionem B in vno puncto tantum secet, alteri asymptoto æquidistás; linea verò DA, similiter secet sectionem A; sitque DB ipsi BG æqualis, & DA ipsi AK. Dico lineam quæ transit per K, G, occurrere sectionibus; & quæ ab occursibus ad D ducuntur, sectiones contingere.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto D, ducantur duæ rectæ lineæ DE, DF, contingentes sectionem suam propriam; hoc est DE tangat sectionem A in E, & DF sectionem contingat B, in puncto F.

Demonstratio. Si recta linea ducenda per puncta E & F, & producenda vtrimque secuerit in K & G, rectas datas DAK, DBG, propositum euidens est. Si non transierit, sed per alia puncta diuersa ab K, & G, bifariàm diuidentur singulæ in punctis suis proprijs A & B, per prop. 31. lib. 3. atque ita portiones earum sitæ inter A & B, & puncta diuersa ab K & G, erunt æquales ipsis relatiuè AK, BG, portionibus, totum & pars, contra 8. axiom. lib. 1. elem. igitur non transibit recta EF producta vtrimque nisi per puncta K & G: atque ita probatum erit propositum.

PROPOSITIO XXIV.

Coni sectio, coni sectioni, vel circuli circumferentiæ non occurrit; ita vt pars quidem eadem sit, pars verò non sit communis.

Suppositio. Duæ coni sectiones quæcumque cõstantes lineis curuis ABCD, EBCD, quarum vna possit esse circuli circumferentia, habeant partem communem BCD, si fieri possit, aliæ verò minimè communes AB, EB, seu diuersæ.

Apparatus. In parte communi ducantur per prop. 31. lib. 1. elem. duæ rectæ lineæ BC, IF, æquidistantes, & vtrimque terminatæ in linea curua communi, tùm per prop. 10. lib. 1. elem. bifariàm diuidatur in G recta IF, & in H, recta BC. Præterea per cit. prop. 31. lib. 1. elem. ab aliquo puncto puta partis AB non communis recta linea agatur AED parallela vni ex dictis IF, BC, parallelis; hęc secabit obuiam aliam partem EB non communem in E; & aliam communem in D, per coroll. nost. 1. ad prop. 18. lib. 1.

Demonstratio. Recta linea transmissa per G & H puncta, erit per prop. 28. lib. 2. diameter tam sectionis ABCD, quàm sectionis EBCD; ergo si producatur in infinitum occurret rectæ alteri AED parallelæ rectis IF, BC, per prop. 11. Procli, (sunt enim tres illæ rectæ IF, BC, AED, parallelæ inuicem per prop. 30. lib. 1. elem.) occurrat verò in puncto K. sed per nost. coroll. 14. ad prop. 49. lib. 1. secabit diameter GHK, rectam AKD in puncto K bifariàm; & rectam EKD, bifariàm in eodem puncto K; est enim recta AKD accomodata in sectione ABCD; & recta EKD etiam accomodata in sectione EBCD. Cùm ergo AK sit æqualis ipsi KD, & EK æqualis eidem KD; erit per 1. axiom. lib. 1. elem. AK æqualis ipsi AE, totum parti; contra 8. axiom. lib. 1. elem. hoc absurdum deductum ex positione contradicente huic propositioni, indicat ipsam positionem esse falsam, & propositionem veram.

PROPO-

PROPOSITIO XXV.

Coni ſectio, coni ſectionem, vel circuli circumferentiam in pluribus punctis quàm quatuor non ſecat.

APparatus. Secent ſe mutuò ſi fieri poſſit, duæ coni ſectiones, quarum vna eſſe poteſt ex datis circumferentia circuli, in pluribus punctis, quàm quatuor, quæ ſint A, B, C, D, E. ſumanturque deinceps quatuor A, B, C, D, nullum intermedium punctum ſectionis mutuæ intermittentes; iunganturque A, B, recta linea AB, & duo alia C, D, recta CD; certum eſt ſi vna ſectionum ſit parabola, rectas AB, DC, productas extra ſectionem conuenire in puncto L, per prop. 24. lib. 2. et ſi vna ſectionum ſit hyperbola conuenire etiam in L, extra ſectionem, per prop. 25. lib. 2. Tùm per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur recta AB, in O, ita vt ſit vt AL ad LB, ſic AO ad OB: ſimili modo diuidatur DC in P, ita vt ſit ſicut DP ad PC, ſicut DL ad LC. Recta tranſmittenda OP, per axiom. 11. & 28. lib. 1. elem. vel per propoſ. 9. occurret vtrimque ſectioni in R & H, & rectæ LR, LH, ducendæ, ſectionem ipſam contingent in punctis R & H, per prop. 9. Porrò recta EL traijcienda, vtramque ſectionem ſecabit, vnam in M, alteram in G, obuiam, quandoquidem inter puncta B & C nullum datur medium punctum ſectionis mutuæ ſectionum conicarum ſe mutuò ſecantium: tùm etiam quia per corollaria noſtra ad propoſ. 49. lib. 2. ab 2. ad 10. duæ ſolum rectæ lineæ ſectionem tangentes ab puncto extra eam duci poſſunt. Sed & eadem recta EL ſecabit obuiam rectam ROPH, in puncto N: Igitur in ſectione conica ſecta in puncto M ab recta LE procedente ab puncto L externo ab quo fluxere duæ tangentes LR, LH, ipſam ſectionem tangentes, deducta eſt recta LE ſecans ipſam ſectionem in duobus M & E punctis, & rectam RH coniungentem prædictos contactus; erit per prop. 37. lib. 3. vt EL ad LM, ita EN ad NM. Quod ſi conſideremus eodem modo ſectionem aliam ſectam in G ab recta LE, & reliqua ſupradicta; erit etiam per cit. prop. 37. lib. 3. vt EL ad LM, ſic EN ad NM. Quod ſi duæ rectæ lineæ AB, DC, fuerint parallelæ; diuidendæ erunt bifariàm per prop. 10. lib. 1. elem. AB quidem in O, DC verò in P; rectaque ducenda PO, & vtrimque producenda donec occurrat in R & H, ſectionibus: tunc verò per prop. 28. lib. 2. erit recta RH, diameter ſectionum; & rectæ AB, DC, ad ipſam ordinatim applicatæ erunt per coroll. noſt. 14. & 15. ad prop. 49. lib. 2. Inſuper ex puncto E, ducatur per prop. 31. lib. 1. element. recta ENMG, parallela cuilibet æquidiſtantium AB, CD, erunt per prop. 30. lib. eiuſdem cit. 1. elem. parallelæ inuicem tres rectæ AB, ENMG, & CD; ſecabit recta ENMG, tàm rectam RH in N, obuiam, quàm ſectiones in E, M, G; quia non eſt alius occurſus ab prædictis punctis datis, A, B, C, D, E: eruntque per cit. coroll. noſtra 14. & 15. ad prop. 49. lib. 2. rectæ EM, EG, ordinatim applicatæ ad diametrum RH.

Demonſtratio in caſu quo duæ rectæ AB, DC, productæ concurrant in L punctum externum. Sitque LG maior recta quàm LM; erit NM recta maior quàm NG. Ergo per prop. 8. lib. 5. elem. EL maiorem habebit rationem ad LM quàm ad LG, vel quàm EN ad NG, per prop. 13. lib. eiuſdem 5. elem. eſt autem per apparatum vt EL ad LM, ita EN ad NM; oſtendimus autem eſſe maiorem rationem EL ad LM, quàm EN ad NG; ergo per 13. prop. lib. 5. elem. EN ad NM maiorem habebit rationem quàm EN ad NG; quare per prop. 10. lib. 5. elem. recta NM minor erit, quàm recta NG, contra conceſſa admiſſaque initiò. hoc abſurdum, indicat falſum eſſe adſtruere coni ſectionem, aliam coni ſectionem, vel circuli circumferentiam in pluribus punctis quàm quatuor ſecare; ex quo procedit abſurdum. Igitur vera erit propoſitio.

Demonſtratio in caſu quo duæ rectæ lineæ AB, DC, ſint parallelæ. Quandoquidem recta ENM, eſt ordinatim applicata ad diametrum RH in ſectione in qua vtrimque terminatur in punctis E & M, bifariàm ipſa ENM ſecta erit in N, iuxta definit. 10. & 12. lib. 1. inter primas; quare recta MN, æqualis erit rectæ NE: ſimili modo probabitur recta ENG ordinatim applicata ad diametrum RH ſectionis, ideoque æquales eſſe rectas NG, NE. Ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. recta EM æqualis rectæ EG, totum parti, contra 8. axiom. lib. 1. elem. hoc abſurdum cùm proueniat ex poſitione coni ſectionis ſecantis coni ſectionem vel circuli circumferentiam in pluribus punctis quàm quatuor, indicat illam eſſe rationi repugnantem, ideoque conformem ipſi propoſitionem.

PROPOSITIO XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in vno puncto ſeſe contingant; non occurrent ſibi ipſis, ad alia plura puncta, quàm duo.

SVppoſitio. Quælibet duæ ex dictis ſectionibus conicis lineas curuas habentibus ſeſe mutuò contingant in aliquo puncto A. Dico non occurrere ſibi ipſis ad alia puncta plura quàm duo.

Apparatus. Eſto ſi fieri poſſit occurrant ſibi ad alia puncta plura quàm duo, videlicet tria B, C, D,

B,C,D, diuersa ab A: iungaturque recta BC & producatur vltra C & sectiones: tùm per prop. 49. lib. 2. ex puncto A sequente ipsum C, educatur recta linea AL contingens in A alterutram è sectionibus quæ commune habent punctum A, ex datis; quæ recta AL, vel conueniet in L cum producta BC; vel erit parallela ipsi BC. Si primum diuidatur recta BC in P, per prop. 10. lib. 6. element. ita vt sit BP ad PC, sicut BL ad LC; & ex puncto A per punctum P, recta ducatur AP, quæ producta vltra P, occurret in H sectioni contactæ ab recta AL, & recta LH ducenda continget eandem sectionem iuxta prop. 1. Recta autem linea LD ducenda secabit sectiones, exteriùs procurrentem in M, aliam in G, vti ostendimus in apparatu superioris propositionis: sed & eadem recta LD, secabit obuiam, rectam HA in puncto O, per eundem apparatum: Erit verò per prop. 37. lib. 3 vt DL ad LM, sic DO ad OM, tùm vt DL ad LG, sic DO ad OG sed & sit OG minor quàm OM. Quod si 2. hoc est sint parallelæ rectæ BC, AL: Tunc ex puncto E tertio, ducenda erit recta linea EMG parallela ipsi BC, per prop. 31. lib. 1. elem. quæ secabit sectiones in M & G, quandoquidem est diuersum punctum E, ab reliquis B, C, & A.

Demonstratio primi casus. Est per apparatum DO ad OM sicut DL ad LM; & per prop. 8. lib. 5. elem. DL ad LM maiorem habet rationem quàm DL ad LG; ergo per prop. 13. lib. eiusdem 5. DO ad OM maiorem obtinebit rationem, quàm DL ad LG: est verò per apparatum DO ad OG, sicut DL ad LG, & ex probatis DL ad LG, minorem sibi vendicat rationem quàm DO ad OM; ergo per prop. 13. lib. 5. elem. DO ad OG minorem obtinebit rationem, quàm DO ad OM: Quare per prop. 10. lib. eiusdem 5. recta OM minor erit quàm recta OG, contra 8. axiom. lib. 1. element. Igitur ex absurdo probauerimus intentum in primo casu.

Demonstratio secundi casus. Quandoquidem per lemma vnicum ad hunc librum recta AL contingit datas sectiones in puncto A, & intra illas ducta est CB chorda ambarum, si per prop. 10. lib. 1. elem. bifariàm in P diuidatur, & recta AP transmittatur erit per prop. 7. lib. 2. diameter dictarum sectionum, & recta ipsa BC ordinatim applicata ad hanc diametrum AP, iuxta coroll. nost. 5. ad prop. 47. lib. 2. Et quia huic BC ducta est etiam in datis sectionibus recta ENMG chorda, parallela; erit per coroll. nost. 6. ad cit. prop. etiam ordinatim applicata eidem diametro AP, dictarum sectionum. Quare per definit. 10. lib. 1. inter primas diuisa erit bifariàm recta EG, & recta EM, in puncto N; igitur cùm NG & NM, sint æquales rectæ tertiæ NE, erunt per 1. axiom. lib. 1. elem. ipsæ NG, NM, æquales contra 8. axiom. lib. 1. elem. falsa igitur erit positio contradicens assertioni huius prop. quæ ideo demonstrata erit.

PROPOSITIO XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis sese contingant; in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Supponitio. Prædictarum linearum quæ sunt sectiones coni curuarum aliquæ se mutuò contingant in duobus A, B, punctis. Dico, eas ad nullum aliud punctum sibi ipsis occurrere.

Tres casus habebit apparatus. Aut enim lineæ ducendæ per prop. 49. lib. 2. contingentes ipsas datas sectiones in punctis earum datis communibus A, B, conuenient in vnum punctum L, vt in prima & tertia, & 4. figura; vel erunt parallelæ, vt in secunda figura, & quinta & sexta. Præterea considerandi erunt duo casus circa situm tertij puncti puta C, in quo sibi ipsis occurrant si fieri possit, ipsæ datæ sectiones conicæ, quod erit inter puncta data contactuum A, & B; vel consequens ad ipsa.

Assumamus primo loco casum in quo tertium punctum C sit consequens ad data duo A & B; & casum in quo duæ rectæ AL, BL, contingentes ipsas sectiones datas in A & B, conueniant in L; his verò inseruiet prima figura. Iungatur recta AB, nectens puncta A, B, tactuum tangentium rectarum LA, LB, quæ erit intra ipsas sectiones. per prop. 10. lib. 1. tùm recta alia ducatur LC, quæ secabit intermedias sectiones superiorem in G, inferiorem in M, & rectam AB, in N, vtpotè subtensam sectionum portionibus AGB, AMB; quæ recta LC non potest esse eadem quæ LB tangens, alioqui haberet tangens recta plura communia puncta cum sectione tacta, quàm duo, contra naturam tangentis rectæ sectionem: sed neque recta LC potest incedere ad partes ipsius LB auersus ab LA; nam cùm debeat terminari in C, producta recta LB tangens vltra tactum B ipsam secaret rectam LC, per axiom. 28. lib. 1. elem. & sic duæ rectæ spatium concluderent contra 14. axiom. lib. 1. elem.

Demonstratio huius primi casus. Quandoquidem in sectionibus datis sunt LA, LB, duæ rectæ lineæ ipsas contingentes in communibus punctis A & B; & recta AB vniens puncta contactuum secta in N, ab recta LC secante etiam datas sectiones in G, & M: erit per prop. 37. lib. 3. vt CL ad LG, sic CN ad NG; tùm etiam erit vt CL ad LM, sic CN ad NM: & in vtrisque erit vicissim per prop. 16. lib. 5. element. vt CL ad CN, sic LG ad NG; tùm vt CL ad CN, sic LM ad NM; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt LG ad NG, sic LM ad NM: LG autem prima minor est quàm LM tertia; ergo per prop. 14. lib. 5. elem. NG secunda minor erit

erit quàm quarta NM, totum minus parte, contra 8. axiom. lib. 1. elem. hoc absurdum cum procedat ex positione quod si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis sese mutuò contingant; in alio etiam puncto sibi mutuo occurrant, falsa erat huiusmodi propositio, & propositio præsens illi positioni contradicens vera.

Assumamus secundo loco casum in quo punctum idem C tertium introductum ab aduersario, commune datis sectionibus, diuersum ab A & B, contactibus illarum, sit consequens ad data puncta ipsa A & B, contactuum; & duæ rectæ tangentes ipsas sectiones in punctis A & B, videlicet rectæ AO, BP, sint parallelæ, vti in secunda figura videre est. Verùm notandum est nullam sectionum datarum tunc esse posse hyperbolam, aut parabolam; nam in parabola concurrunt in vnum punctum extra ipsam, per prop. 24. lib. 2 coroll. nostram; & in hyperbola etiam per coroll. nost. 1. ad prop. 25. lib. cit. 2. restat igitur vt sectiones datæ sint in hoc casu, ellipsis vel circuli circumferentia. Igitur vt prius ducatur recta AB, quæ tota cadet intra datas rectas per prop. 10. lib. 1. eritque ipsa AB diameter illarum sectionum, iuxta coroll. nost. 2. ad prop. 27. lib. 2. denique per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto C ponatur recta linea CNMG parallela tangenti BP; hæc occurret sectionibus in M & G, præter punctum C, & erit ordinatim applicata diametro AB, sectaque ab ipsa in N, iuxta coroll. nost. 2. ad prop. 3. lib. 2.

Demonstratio huius casus. Per defin. 10. & 12. lib. 1. inter primas, recta CNG, bifariàm in N secabitur, vnde erunt portiones eius NG, NC, æquales; sed etiam per easdem definitiones, recta CNM bifariàm secabitur in N, vnde portiones eius NM, NC, æquales erunt. Igitur per 1. axiom. lib. 1. elem. rectæ NG, NM, æquales erunt, totum & pars, contra 8. axiom. lib. 1. elem. absurdum hoc consequens, indicat positionem esse falsam, & propositionem veram in hoc casu.

Assumamus consulendo figuram 3. & quartam, alium casum in quo punctum C tertium introductum ab aduersario sit inter puncta A, & B, contactuum; & duæ rectæ ex A & B, eductæ tangentes ipsas sectiones in ipsis punctis AB, concurrant in vnum punctum L; vnde ex dictis in apparatu præcedentis casus, ipsæ sectiones erunt vel parabolę vel hyperbolæ. Ducta verò recta AB coniungens puncta contactuum A & B datorum, diuidatur per prop. 10. lib. 1. elem. bifariàm in F; & recta LF transmittatur quæ erit diameter datarum sectionum iuxta propos. 29. lib. 2. ad quam erit ordinatim applicata recta AFB, per coroll. nost. 23. ad prop. 49. lib. 2. hæc porrò diameter LF, vel transibit per C punctum introductum commune datis sectionibus, vel extra illud. Si primum, vt in 3. figura, poterimus per prop. 49. lib. 2. per punctum C commune sectionibus, ponere rectam DCE tangentem alterutram sectionum, quæque tanget etiam alteram, iuxta lemma vnicum ad hunc librum: quare per prop. 5. lib. 2. ipsa erit parallela rectæ AFB; ipsamque DCE secabunt latera LA, LB, in punctis D & E per prop. 11. Procli. Insuper ducta recta AC, erit per 10. prop. lib. 1. tota intra ipsas sectiones; & ducenda recta DB ex puncto D externo, (nam tangentes AL, CD, totæ sunt extra ipsas sectiones, & ostensæ sunt concurrere in D,) secabit ipsas sectiones in H, I, & rectam AC in G, intermedias; Quare per prop. 27. lib. 3. erit vt DB ad DH, sic GH; tùm vt DB ad DI, sic BG ad GI; & vicissim in vtrisque comparationibus, iuxta prop. 16. lib. 5. element. vt DB ad BG, sic DH ad GH; & vt DB ad BG, sic DI ad GI; quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt DH ad GH, sic DI ad GI. Quod si secundum, hoc est recta LF diameter sectionum non incesserit per C punctum commune datis sectionibus introductum ab aduersario vt in figura quarta; poterimus per prop. 31. lib. 1. elem. ex hoc puncto C, agere rectam lineam CKGM, parallelam ipsi AFB, quæ per corollar. nost. 28. & 29. ad prop. 49. lib. 2. ideò ordinatim erit applicata diametro LF, vti recta AFB, singulæque bifariàm diuisæ, illa in F, hæc in K.

Demonstratio primi assumpti, consulendo 3. fig. Quia in apparatu ex positione aduersarij & in hoc casu, ostendimus esse vt DH ad GH, sic DI ad GI; & DH minor est quàm DI; erit per prop. 14. lib. 5. elem. GH minor quàm GI, totum minus parte, contra 8 axiom. lib. 1. elem. Demonstratio secundi assumpti in hoc casu, cõsulendo quartam figuram. Quia CKM ordinatim est applicata in sectione ad eius diametrum LKF, bifariamque in K diuisa est simili modo recta CKG, bifariàm diuisa est in K: Cumque KM, KG, sint æquales ipsi tertiæ KG; erunt per 1. axio. lib. 1. elem. rectæ KM, KG, æquales, totum parti. contra 8. axiom. lib. 1. elem. Hæc absurda cùm procedant ex positione occursus linearum datarum se mutuò in duobus punctis contingentium, in alio ab his puncto; falsa erit, & propositio vera.

Assumamus verò alium casum in quo rectæ quidem per A & B tangentes ipsas sectiones sunt parallelæ; & punctum C est ex intermedijs inter A & B. Tunc ex puncto C ponatur recta CQ ad partes AB, parallela ipsi DA, per prop. 31. lib. 1. element. & ex eodem puncto C communi ipsis sectionibus iuxta aduersarium, ponatur per prop. 49. lib. 2. recta linea CD, tangens ipsarum sectionum alteram, tanget etiam aliam per lemma vnicum ad hunc librum, in eodem pũcto C: & quia hæc recta CD secat rectam CQ, secabit etiam AD ipsi parallelam per prop. 11. Procli in puncto D. Itaque quia duæ rectæ lineæ CD, AD, tangentes ipsas sectiones datas in punctis A, & C, concurrunt in D,

in D, extra illas, eò quòd totæ ſint extra ipſaſmet ſectiones, poterimus rectam ducere AC, quæ per 10. prop. lib. 1. tota erit intra ipſas ſectiones, & aliam ducere rectam DB, quæ ſecabit intermedias ſectiones hoc ordine, primò primam obuiam in H, tùm in I alteram obuiam, tum etiam obuiam rectam AC in G. Tunc verò erit per propoſ. 37. lib. 3. vt DB ad DH, ſic BG ad GH; tùm vt BD ad DI, ſic BG ad GI: & viciſſim per prop. 16. lib. 5. element. vt BD ad BG, ſic DH ad GH; & vt BD ad BG, ſic DI ad GI: quare per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt DH ad GH, ſic DI ad GI.

Demonſtratio. huius caſus. Quia in apparatu proximo ex poſitione aduerſarij, oſtendimus eſſe vt DH ad GH, ſic DI ad GI; primaque DH minor eſt quàm tertia DI, erit per prop. 14. lib. 5. elem. ſecunda GH minor quàm quarta GI, totum minus parte, contra 8. axiom. lib. 1. elem. Poſitio ergo vnde procedit hoc abſurdum erit falſa: videlicet quod ſectiones conicæ quælibet ſe mutuò contingentes in duobus punctis, occurrant etiam ſibi inuicem in alio: igitur non ſibi occurrent in alio puncto tertio, ſicuti vult propoſitio, quæ ideo demonſtrata erit in quocumque caſu.

COROLLARIVM NOSTRVM

Si duæ rectæ lineæ contingentes ſectionem conicam, fuerint parallelæ; ipſa ſectio non erit parabola, neque hyperbola; ſed ellipſis vel circulus.

HOc oſtendimus in apparatu ad caſum ſecundum.

PROPOSITIO XXVIII.

Parabole, parabolen non contingit, præterquam in vno puncto.

SVppoſitio. Parabole AGB, contingat interiùs parabolam AMB. Dico quod non poſſit ſe mutuò contingere in alio puncto, quàm vnico.

Apparatus. Eſto ſi fieri poſſit, duæ datæ parabolæ ſe mutuò contingant in duobus punctis ſeparatis A, B; certè iuxta præced. prop. 27. non ſibi occurrent in alio puncto tertio. Itaque ducta recta AB, ac diuiſa biſariam in F: ſi per prop. 49 lib. 2. ex punctis A, B, contactuum educantur rectæ lineæ contingentes alterutram, contingent & aliam, iuxta lemma vnicum; & iſtæ tangentes vel erunt parallelæ, vel non parallelæ; parallelæ autem eſſe non poſſunt; nam per coroll. noſt. ad præced. prop. ipſæ ſectiones eſſent vel ellipſes vel circuli, quod deſtruit datum; non erunt igitur parallelæ dictæ rectæ lineæ tangentes; quare productæ concurrent in aliquod punctum, puta L: ex quo ſi recta linea ducatur LF ad punctum F medium rectæ AB, ipſa LB erit diameter ipſarum parabolarum, per prop. 29. lib. 2. ſecabitque ipſas lineas curuarum vnam in G, alteram in M; nam vti probauimus ſibi inuicem non occurrunt ad aliud punctum præter A & B.

Demonſtratio. Quandoquidem recta AB, eſt biſariam ſecta ab diametro LF, parabolæ vtriuſque, erit ordinatim applicata ad ipſam diametrum, iuxta coroll. noſt. 29. ad prop. 49. lib. 2. Quare per prop. 35. lib. 1. erit recta LG æqualis ipſi GF, in vna ſectione, ideoque diuiſa biſariam recta LF in G: tùm etiam erit per eandem prop. cit. recta LM æqualis ipſi MF, ideoque tota LF diuiſa biſariam in M, in alio puncto diuerſo ab G; contra coroll. noſt. ad prop. 1. lib. 3. elem. hoc abſurdum cùm procedat ab poſitione contradicente propoſitioni huic falſa erit illa poſitio, & propoſitio vera in caſu quo ſe mutuò contingant interius duæ parabolæ.

Apparatus in caſu quo Parabolæ AEFB, CEFD, ſe mutuò contingant exteriùs in duobus punctis E, F, vero contactu; hoc eſt productæ in infinitum ſe mutuò non ſecent, ſed ſolum habeant communia duo puncta E, F, non autem vnicum ſolummodo, quæque ſint diſſita ab inuicem. Tunc verò neceſſariò concludent ſpatium EHF. Iam verò per prop. 49. lib. 2. poterimus ex puncto E, Paraboles AEFB, educere rectam lineam GE contingentem ipſam, quæ per lemma vnicum continget alteram Parabolam CEFD, in eodem puncto E: ſed hæc recta GE producta in infinitum vltra E, ex natura ſua procedere debet extra ipſas Parabolas & nunquam in eas incurrere; verùm producta ſic ingredietur intra ſpatium EHF, quod cùm ſit finitum, producta in infinitum vltra I punctum ex intermedijs dicti ſpatij, neceſſariò per axiom. 28. lib. 1. element. incurret in aliud punctum H vel F, Paraboles CEFD, vel in aliud punctum F, paraboles AEFB, contra naturam rectæ tangentis ſectionem conicam. hoc abſurdum aceuſat in hoc caſu falſitatem poſitionis contradicentis aſſertioni huius propoſitionis, quæ ideo vera erit.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Sectio conica vel circuli circumferentia, ſectionem conicam vel circuli circumferentiam contingit exterius in vnica ſolum puncto; vti probabitur artificio & principijs allatis in demonſtratione ſecundi caſus huius propoſitionis.

PROPO-

PROPOSITIO XXIX.

Parabole hyperbolen non contingit in duobus punctis, extra ipsam cadens.

SVppositio. Parabole AGB, hyperbolen contingat AMB, extra ipsam cadens. Dico quod Parabole AGB, hyperbolen AMB non contingat in duobus punctis.

Apparatus. Esto si fieri possit, parabole contingat hyperbolen in duobus punctis A, & B. Tum per prop. 49. lib. 2. & lemma vnicum, ex punctis A & B, educi poterunt rectæ lineæ contingentes tam hyperbolam quàm parabolam in punctis A & B: duæ tangentes non possunt esse parallelæ, alioqui essent datæ sectiones, vel ellipses, vel circuli, per coroll. nostr. 4. ad prop. 27. lib. 2. non igitur erunt parallelæ, ideoque concurrent in aliquod punctum puta L, extra ipsas sectiones, quandoquidem tangentes ipsæ rectæ, sunt totæ extra ipsas contactas sectiones. Ducta verò tecta AB, bifariàm secetur in F per 10. prop. lib. 1. elem. & per puncta F, L, recta linea FL transmittatur, quæ per prop. 29. lib. 2. erit diameter sectionum datarum, secabit obuias sectiones, in G quidem parabolam, in M hyperbolam, diuersis punctis; nam per 27. prop. istæ duæ sectiones nullum aliud punctum commune habere possunt ab duobus A, B. Porrò punctum L, erit infra centrum hyperboles, per prop. 35. lib. 2. coroll. nost. 1. igitur producendo rectam ML, vltra L, attinget centrum hyperboles quod sit D, diameter enim probata incedit per centrum ipsius hyperboles.

Demonstratio. In hyperbola AMD, erit per prop. 37. lib. 1. rectangulum sub FD, DL, æquale quadrato DM: quare per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt FD ad DM, sic DM ad DL; & per prop. 19. lib. 5. element. sic FM ad ML: hoc est erit vt FD ad MD, sic MF ad ML; FD autem maior est quàm MD, per 8. axiom. lib. 1. elem. ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. FM maior erit quàm ML. Iam verò in parabola AGB, per prop. 35. lib. 1. tecta FG erit æqualis ipsi GL: LG autem minor est quàm LM, per 8. axiom. lib. 1. element. ergo per 1. axiom. lib. eiusdem, FG minor erit quàm LM; & per idem axiom. 1. multò minor erit FG, quam MF, totum minus parte, contra ipsum 8. axiom. cit. hæc absurda indicant positionem contradicentem huic propositioni esse falsam, & propositionem veram.

PROPOSITIO XXX.

Parabole ellipsim, vel circuli circumferentiam non contingit in duobus punctis, intra ipsam cadens.

SVppositio. Parabole AMB cadens intra ellipsim vel circuli circumferentiam, AGB, ipsam ellipsim vel circuli circumferentiam contingat. Dico eam non contingere in duobus punctis, sed solùm in vno.

Apparatus. Esto si fieri possit, parabole ellipsim vel circulum contingat in duobus punctis A, B. Et per prop. 49. lib. 2. & lemma vnicum ad hunc librum ex his punctis A, & B paraboles educi poterunt duæ rectæ lineæ AL, BL, contingentes ipsam, & circulum, vel ellipsim, quæ concurrent in L, punctum extra ipsam, iuxta coroll. nost. ad prop. 24. lib. 2. sed etiam tangent ipsum circulum vel ellipsim datam, per ipsam constructionem. Ducta autem recta AB, quæ tota intra sectiones cadet, iuxta propos. 10. lib. 1. diuidatur bifariam in F, per prop. 10. lib. 1. elem. Porro ducenda recta LF, secabit obuiam parabolam in G, & obuiam ellipsim vel circulum in M, quandoquidem nullum aliud punctum commune habere possunt, per prop. 27. Porrò iuxta prop. 29. lib. 2. recta LF, erit diameter datarum sectionum, quæ in ellipsi vel circuli circumferentia transibit per centrum puta D. Deniqne recta AFB, erit ordinatim applicata ad diametrum LF, iuxta coroll. nost. 29. ad prop. 49. lib. 2. Et quia duæ rectæ AL, BF, contingentes in A & B parabolam ostensæ sunt concurrere in L, & contingere etiam circulum vel ellipsim; centrum D huius circuli vel ellipseos erit infra rectam AB nectentem puncta contactuum A, B: quod sic demonstro in vniuersum. Producta portione diametri FG circuli vel ellipseos, vsque ad aliud H punctum circumferentiæ; erit per propos. 37. lib. 3. vt HL ad LG, sic HF ad FG: sed per axiom. 8. lib. 1. elem. prima HL maior est quàm secunda LG; ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. element. tertia HF maior erit quàm quarta FG. Igitur centrum D circuli, ellipseosue, erit in maiore portione HF, diametri totius HDG, seu quod idem centrum D erit infra rectam AFB, & punctum L concursus.

Demonstratio. Per prop. 37. lib. 1. erit in ellipsi vel circulo AGB, rectangulum sub LD, DF, æquale quadrato DG; ideoque per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt LD ad DG, sic GD ad DF; & per prop. 19. lib. 5. elem. vt LD ad DG, sic LG ad GF: estque per 8. axiom. lib. 1. elem. LD maior quàm DG, ergo per prop. 14. lib. 5. elem. coroll. nost. 2. LG erit maior quàm GF. Verùm in parabola AMB, per prop. 35. lib. 1.

 est re-

est recta LM, aequalis ipsi FM; ergo LM quae maior quàm LG per 8. axiom. lib. 1. cit. elem. multò maior quàm GF, per 1. axiom. lib. 1. cit. elem. quin etiam ipsa LM multò maior quàm FM quae est pars ipsius FG. Igitur cùm sequatur ex positione aduersarij eandem rectam LM, esse aequalem ipsi FM, & maiorem ipsa FM, quae sunt repugnantia; ipsa positio falsa erit, & propositio vera.

COROLLARIVM NOSTRVM.

In ellipsi vel circulo, si dua recta linea contingant circumferentiam & in vnum coëant punctum: centrum erit in maiore portione diametri diuisa ab recta vniente puncta contactuum.

Hoc demonstrauimus in apparatu ad demonstrationem huius propositionis.

PROPOSITIO XXXI.

Hyperbole hyperbolen, idem centrum habens; in duobus punctis non continget.

Suppositio. Hyperbole AGB, contingat hyperbolen AMB, idemque centrum habeant D. Assero quod non contingat in duobus punctis, sed in vno solùm.

Apparatus. Esto si fieri possit, contingat in duobus punctis A, B; ex quibus per prop. 49. lib. 2. educantur duae rectae AL, BL, tangentes ipsas hyperbolas iuxta lemma vnicum, in dictis punctis, quae per coroll. nostr. ad prop. 25. lib. 2. concurrent in L punctum externum, extra centrum D, imò sub illo: per coroll. prop. 31. lib. 1. ducta AB lineam bifariàm secabit in F, per prop. 30. lib. 2. recta DL producenda, quae erit diameter hyperbolarum eo quod transeat per centrum illarum D; secabitque intermedias sectiones in G & M, singulas in suo proprio puncto; nam per 26. ptop. nullum aliud commune punctum ab A, & B, habere possunt.

Demonstratio. Per prop. 37. lib. 1. in hyperbola AGB, rectangulum sub FD, DL, aequale est quadrato DG; & in hyperbola AMB, rectangulum sub FH, HI, aequale est quadrato HM: igitur per axiom. 1. lib. 1. element. quadrata DG, HM, erunt aequalia inter se; ergo per 16. prop. Procli, rectae DG, HM, aequales erunt, totum & pars, contra 8. axiom. lib. 1. elem. Igitur hyperbole hyperbolen, idem centrum habens non continget in duobus punctis, sed tantùm in vno.

PROPOSITIO XXXII.

Si ellipsis ellipsim, vel circuli circumferentiam, idem centrum habens, in duobus punctis contingat: linea coniungens tactus, per centrum transibit.

Suppositio. Ellipsis AGB, ellipsim vel circulum AMB, contingat in duobus punctis A & B, idem centrum F habens: vel circulus AGB, ellipsim AMB, idem centrum F habens, contingat in duobus punctis A, B. Dico rectam lineam AB vnientem tactus in A & B, transire per centrum F commune illis.

Apparatus. Recta linea AB, vniens tactus A & B, bifariàm in F diuidatur per prop. 10. lib. 1. elem. Et si fieri possit recta AB non transeat per centrum commune F, datis sectionibus; tunc rectae lineae AL, BL, educendae per prop. 49. lib. 2. ex punctis A & B, communibus ipsis sectionibus, tangentes ipsas, per lemma vnicum conuenient in L iuxta prop. 27. lib. 2. ad easdem partes centri, & quidem extra ipsas sectiones, quandoquidem ipsae tangentes sunt totae extra ipsas; Ducenda verò recta LF, erit diameter sectionum, per prop. 29. lib. eiusdem 2. ideoque transibit per centrum illarum quod sit D, extra rectam AB, intra ipsas sectiones; secabitque recta LFD, obuias sectiones in G, & M, singulas in suo proprio puncto; quandoquidem per prop. 26. non habent alia puncta communia diuersa ab A & B: eritque recta AFB ordinatim applicata in ipsis sectionibus ad diametrum illarum LFD, vtpotè diuisa bifariàm in F, iuxta corollaria nostra 31. & 32. ad prop. 49. lib. 2.

Demonstratio. Per prop. 37. lib. 1. rectangulum sub DL, LF, aequale quadrato DG, in sectione AGB; tùm etiam in altera sectione AMB, rectangulum sub DL, LF, aequale erit quadrato DM; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. quadrata DG, DM, aequalia erunt; ideoque per prop. 16. Procli rectae DG, DM, aequales, totum & pars, contra 8. axiom. lib. 1. elem. Hoc absurdum consequens ad positionem aduersarij contradicentem huic propositioni, manifestam reddit falsitatem positionis aduersarij, & veritatem propositionis adstruit. Igitur ellipsis ellipsim vel circuli circumferentiam, idem centrum habens, contingensque in duobus punctis; lineam tactus coniungentem habebit per centrum earum commune incedentem.

PROPO-

PROPOSITIO XXXIII.

Coni ſectio, vel circuli circumferentia, coni ſectioni, vel circuli circumferentiæ, quæ non ad eaſdem partes conuexa habeat; ad plura puncta quàm duo, non occurret.

SVppoſitio. Coni ſectio vel circuli circumferentia ABC, occurrat coni ſectioni vel circuli circumferentiæ ADBEC, non habens conuexa ad eaſdem partes. Dico non occurrere ſibi inuicem ad plura puncta quàm duo.

Apparatus. Eſto ſi fieri poſſit, occurrant ſibi in tribus punctis A, B, C; ducanturque rectæ AB, CB, quæ iuxta prop. 10. lib. 1. erunt totæ intra ipſas ſectiones; & non erunt ſibi in directum, nam productæ ambæ vltra punctum B medium communeque, extra ipſas ſectiones procedent, per cit. prop. 10. lib. 1. ſeque mutuò interſecabunt in B: ſi enim non ſe mutuò interſecarent ſed vnam efficerent rectam lineam, producta vltra B, non poſſent exire extra ſectionem, contra id quod conceſſum eſt, ex vi decimæ propoſitionis; vel ſi vna eſſet recta linea ABC, non tota caderet intra ſectionem, ab ſuis extremis A, C, contra ipſam prop. 10. cit. nam aliud punctum B haberet in ſectione. Quare ſequitur ex hoc diſcurſu, quod in omni ſectione conica, & circuli circumferentia, duo ſolùm puncta ſint in directum rectæ lineæ; rectaſque duas in eis ductas commune punctum habentes, non eſſe in directum, ſed ſe mutuò interſecare in puncto illo communi: quod in fine demonſtrationis reponemus corollarij noſtri loco. Nihilominus ex datis conuexum lineæ ABC vergat ad partes G; & conuexum lineæ ADBEC, vergat ad partes contrarias connexitatis alterius, puta verſus F. Præterea cùm angulus rectilineus ABC factus ab duabus chordis rectis lineis ſubtendentibus arcus duos lineæ curuæ ſemper vergat ad eaſdem partes concauas dictæ curuæ, verbi gratiâ angulus ABC rectilineus vergat ad parses F, quas reſpicit concauum curuæ ABC: & propterea etiam idem angulus rectilineus vergat ad partes concaui curuæ lineæ ADBEC, videlicet ad partes G. ſic demonſtrationem propoſiti inſtituimus.

Demonſtratio. Angulus rectilineus ABC, reſpectu curuæ lineæ ABC, reſpicit partes F, quas reſpicit concauum dictæ lineæ: ſed etiam idem angulus rectilineus intra concauum curuæ lineæ ADBEC factus, & in ea applicatus reſpicit partes G, quas reſpicit concauum dictæ curuæ lineæ ABEC: ergo idem angulus rectilineus ABC, reſpiciet partes contrarias F, & G. quod eſt impoſſibile. Hoc abſurdum conſequens ad poſitionem aduerſarij repugnantem propoſitioni, indicat ipſam poſitionem falſam eſſe, & propoſitionem veram.

COROLLARIVM NOSTRVM.

In omni ſectione coni quæ ſit linea curua, vel circuli circumferentia; nulla tria puncta ſunt in directum rectæ lineæ; etſi ab extremis punctis ad medium rectæ tranſmittantur lineæ, in eo ſe decurſabunt, & angulum conſtituent rectilineum.

PROPOSITIO XXXIV.

Si coni ſectio, vel circuli circumferentia, occurrat vni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis; & lineæ quæ inter occurſus interijciuntur, ad eaſdem partes concaua habeant: producta linea ad occurſus, alteri oppoſitarum ſectionum non occurret.

SVppoſitio. Sint oppoſitæ ſectiones D, & ACF; tùm coni ſectio vel circuli circumferentia ABF, occurrens in duobus punctis A, F, vni oppoſitarum ſectioni, videlicet ACF; habeanſque dictæ lineæ curuæ ſibi occurrentes datæ, ABF, ACF, inter puncta A & F occurſua, concaua propria verſus eaſdem partes, puta inferiores verſus G. Dico curuam lineam ABF productam ſecundam naturam ſuam propriam, ſectioni D nunquam occurrere.

Apparatus. Ducatur recta linea AF, quæ per 10. prop. lib. 1. tota erit intra ſectiones ABF, ACF, datas ſibi mutuò occurrere in duobus A, F, punctis.

Demonſtratio. Quandoquidem dantur oppoſitæ ſectiones hyperbolicæ ACF, & D, quarum vnam ACF ſecat recta linea AF, quæ producta vtrimque per cit. 10. prop. lib. 1. extra ſectionem ipſam ACF procedit; alteram oppoſitam D ſectionem non ſecabit, neque ipſi occurret per prop. 33. lib. 2. ergo neque linea curua ABF data, occurret eidem ſectioni D oppoſitæ; nàm concaua illius curuæ ABF vergunt verſus partes G, ſimul cum concauo alterius curuæ AGF, ex datis; concauum autem oppoſitæ ſectionis D, vergit in partes contrarias ipſi G: igitur nunquam conuenient: nàm ex propoſ. 8. lib. 1. productæ ſeu extenſæ illæ lineæ curuæ conicæ ſemper procedunt in infinitum verſus partem quam reſpiciunt concaua illarum; excepta ellipſi, & circulo, quæ ad idem punctum redit ſupra vel extra, neque amplius extenditur: quare cum oppoſita ſectio D ſit ſupra puncta A, F, ad ſectionem D nunquam

poterit extendi circumferentia circuli neque ellipseos. Quod si non habeant supra rectam AF, concaua ad easdem partes; tunc fieri poterit vt sectio ABF, producta occurrit alteri D oppositæ sectioni; vt discursu colligetur ex duabus postremis figuris, in quibus ellipsis & circulus occurrunt duabus datis oppositis sectionibus.

PROPOSITIO XXXV.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia, vni oppositarum sectionum occurrat: reliquæ ipsarum non occurret ad plura puncta quàm duo.

SVppositio. Sint A, B, oppositæ sectiones, vnique earum A, occurrat coni sectio vel circuli circumferentia ABC, in puncto A; alteri verò B sectioni occurrat duobus in punctis B & C. Dico isti sectioni B, non occursuram coni sectionem vel circumferentiam datam ABC, in pluribus punctis quàm duobus.

Apparatus. Esto si fieri possit, sectioni B, occurrat coni sectio vel circuli circumferentia in puncto D aliquo tertio diuerso ab duobus B & C datis.

Demonstratio. Sectio B, & coni sectio ABC, vel conuexa habent ad easdem partes, ideoque etiam concaua ad easdem partes; vel conuexa habent ad partes diuersas. Si primum, non erit casus huius propositionis, quæ supponit occurrere sectioni A in A, sectionem ABC, & sectioni B in duobus punctis. Ergo secundum erit, videlicet conuexa sua habebunt ad partes diuersas, nam sectio B conuexum habet versus A sectionem suam oppositam; sectio verò coni ABC vel circuli circumferentias, habet conuexum ad oppositas partes, igitur contra prop. 33. coni sectio vel circuli circumferentia, coni sectioni vel circuli circumferentiæ, quæ non ad easdem partes conuexa habeat, ad plura puncta quàm duo occurret. hoc absurdum indicat positionem introductam falsam esse, & propositionem veram.

PROPOSITIO XXXVI.

Coni sectio, vel circuli circumferentia, oppositis sectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones A, B; sectionique A occurrat altera coni sectio vel circuli circumferentia CAD, in duobus punctis C & A: Dico quod alteri sectioni B oppositæ, non occurret in pluribus punctis quàm duobus; ita vt occursus in summa sit ad summum in quatuor punctis.

Demonstratio. Neutri enim in tribus punctis occurrere potest per præcedentem prop. 35. ergo ad summum duabus oppositis sectionibus alia coni sectio vel circuli circumferentia, quatuor in punctis occurret. licet possit vni earum in vno solùm puncto occurrere, in duobus alijs alteri oppositæ; sed hoc non tollit quin possit vni duobus in punctis, & alteri etiam duobus in punctis occurrere. Propositio verò vult ad summum quatuor in punctis fieri occursum.

PROPOSITIO XXXVII.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia, vnam oppositarum sectionum concaua sui parte contingat; alteri oppositarum non occurret.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones A, B; vnamque earum A contingat altera coni sectio, vel circuli circumferentia CAD, in A, in concaua sui parte. Dico eandem CAD sectionem, vel circuli circumferentiam non occurrere alteri sectioni B oppositæ ipsi A.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto A communi duabus sectionibus conicis, contingentibus se mutuo in A, educatur recta linea EAF contingens sectionem A, quæ per lemma voicum continget etiam sectionem CAD; nam extra sectionem tota est, & etiam extra aliam CAD contentam intra aliam. Ergo sectio CAD, cùm non possit intermediam rectam lineam EAF, in alio puncto diuerso ab A offendere, nulla ratione poterit occurrere sectioni B separatæ ab recta EAF; cuiusque productio seu extensio in infinitum iuxta prop. 8. lib. 1. semper procedet ad partes quas respicit eius concauum quæ oppositæ sunt regioni rectæ lineæ EAF.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia, vtramque oppositarum sectionum contingat in vno puncto; ipsis oppositis sectionibus in alio puncto, non occurret.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones A, B; & coni sectio, vel circuli circumferentia ABC, sectionem A contingat in puncto A, & sectionem

nem B in alio puncto B. Dico hanc ſectionem ABC, non occurrere dictis oppoſitis ſectionibus A, B, in alio puncto diuerſo ab A, & B.

Apparatus. Recta AB, vniat puncta prædicta contactuum A, B: & per prop. 49. lib. 2. ex puncto A educatur recta linea AD contingens in A ſectionem vtramque A & CAD iuxta lemma noſtrum vnicum ad hunc librum; tùm per punctum B, alia recta EB contingens in B, vtramque ſectionem, B, & CAD.

Demonſtratio. Imprimis ſectio vel circuli circumferentia ABC, non continget concaua ſui parte ſectionem A; nam ſi contingeret concaua ſui parte per antecedentem prop. 37. non occurreret alteri oppoſitę ſectioni B, & ſic deſtrueretur datum. Igitur ABC linea curua, ſectionem A contingens in A, & ſectionem B oppoſitam contingens in B; minimè continget ſectionem A, concaua ſui parte. Eodem modo probabimus eandem lineam curuam CAD, non contingere ſectionem B in B, concaua ſui parte. Iam verò cùm totæ lineæ DA, EB, ſint extra ſectiones oppoſitas A & B; tùm etiam totæ extra lineam curuam ſectionis conicæ, vel circuli circumferentiæ ABC; erunt ipſæ rectæ DA, EB, mediæ inter oppoſitas ſectiones A, B, & lineam curuam ABC: nihilque habent commune cum illis præter puncta illa A, B. Igitur curua linea ABC non occurret oppoſitis ſectionibus A, B, in alijs punctis, vni in vno, alteri in alio; alioquin occurreret obuijs rectis DA, EB, quæ ſunt totæ conceſſæ extra illam, ſicuti extra oppoſitas ſectiones.

PROPOSITIO XXXIX.

Si hyperbole vni oppoſitarum ſectionum, in duobus punctis occurrat, conuexa habens è regione ſita: quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

SVppoſitio. Sint oppoſitæ ſectiones ABD, F; & Hyperbole ABC, occurrat duobus in punctis A & B, vni ABD, datarũ oppoſitarum, conuexa habens è regione ſita, hoc eſt in contrarias partes; ſitque huic ABC ſectioni ſeu hyperbolæ, alia oppoſita E. Dico ſectionem E, non occurrere ſectioni F oppoſitæ ſectioni ABD, cui occurrere datur ſectio ABC duobus in punctis A & B.

Apparatus. Ducatur recta AB, per puncta occurſuum prædicta, producẽda vltra B, vſque ad G; hæc recta AB, erit per 10. prop. lib. 2. intra hyperbolam ABD, & intra hyperbolam ABC; ipſiſqua occurret in duobus pũctis A, B; & producta vtrimque in infinitum, erit extra ipſas dictas ſectiones ſibi occurrentes in duobus dictis punctis, iuxta cit. prop. 2. lib. 2.

Demonſtratio. Quandoquidem recta linea ABG occurrit Hyperbolę ABD, productaque ex vtraque parte extra ipſam cadit, non occurret ſectioni ſeu hyperbolæ F, oppoſitæ ſectioni ABD, per prop. 33. lib. 2. Ideoque etiam quia eadem recta ABG occurrit ſectioni ABC, productaque ex vtraque parte extra ipſam incedit; non occurret producta ſectioni oppoſitæ E, per cit. prop. 33. lib. 2. Igitur cùm recta linea ABG in infinitum producta ſit extra ſectiones E, F, mediaque inter illas, eiſque non occurrere poſſit: ſectio E non occurret ſectioni F; alioqui ſi occurreret, prius occurreret rectæ lineæ ABG, contra demonſtrata. Atque ita propoſitio præſens erit manifeſta.

PROPOSITIO XL.

Si hyperbole occurrat vtrique oppoſitarum ſectionum: quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret.

SVppoſitio. Datæ ſint ſectiones oppoſitæ A, B; & hyperbola ACB, occurrat vtrique A, & B, illi in A, huic in B. Dico ſectionem DE oppoſitam ipſi ACB, nulli ſectionum A, B, oppoſitarum occurrere duobus in punctis.

Apparatus. Eſto ſi fieri poſſit, ſectio DE occurrat duobus in punctis D, E, ſectioni A: Ducaturque recta DE, producenda vltra E: certum eſt per prop. 10. lib. 2. rectam DE, præcisè ſumptã, exiſtere intra vtramque ſectionum A, & DE, & productam in infinitum, vltra E, cadere extra illas.

Demonſtratio. Per prop. 33. lib. 2. Recta DE producta in infinitum, non occurret B ſectioni, quia ſectioni A oppoſitæ ipſi B, occurrens, producta in infinitum extra ſectionem ipſam A cadit. Et per eandem propoſitionem 33. quia recta DE ſectioni DE occurrens, & producta in infinitum ex vtraque parta extra illam procedit, non occurret ſectioni oppoſitæ ACB. Media igitur recta linea erit DE in infinitum vtrimque extenſa, inter ſectiones ACB, & B: ergo hyperbola ACB, non occurret hyperbolæ B, contra data; vel ſi occurrat, neceſſe eſt vt intermediam rectam lineam DEHC, ſecet in C verbi gratiâ, contra id quod demonſtrauimus ex prop. 33. lib. 2. hæc abſurda indicant poſitionem contradicentem huic propoſitioni, repugnantem eſſe rationi; & propoſitionem adſtruunt.

PROPOSITIO XLI.

Si hyperbole vtramque oppoſitarum ſectionum in duobus punctis ſecet, conuexa habens è regione ſita vtriſque: quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum occurret.

SVppoſitio. Datæ ſint oppoſitæ A, B, ſectiones; & hyperbole CABD vtramque ſecet in duobus punctis; ſectionem quidem A, in duobus punctis C, & A; & ſectionem B, in duobus punctis B, D; conuexa habens è regione ſita, vtriſque A & B ſectionibus: ſit verò ſectio EF oppoſita ſectioni CABD. Dico ſectionem EF, nulli ſectionum A, B, occurrere.

Demonſtratio. Quia datur ſectio hyperbolica CABD, occurrere ſectioni A, duobus in punctis C & A; ſectio EF, oppoſita ſectioni CABD, per prop. 39. non occurret ſectioni B. ſimili modo quia hyperbola CABD datur occurrere ſectioni B, duobus in punctis D, B, ſectio EF non occurret ſectioni A, per cit. prop. 39. Igitur cùm hyperbole CABD, vtramque ſectionum oppoſitarum A, B, ſecet in duobus punctis, conuexa habens è regione ſita ſectarum A, AB; quæ ipſi opponitur ſectio EF, nulli oppoſitarum ſectionum A, B, occurret. ſicuti fuit propoſitum.

PROPOSITIO XLII.

Si Hyperbole vnam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis ſecet; quæ ipſi opponitur ſectio, non occurret alteri oppoſitarum.

SVppoſitio. Hyperbole ABMCD, ſecet in quatuor punctis A, B, C, D, hyperbolen ABFCD, habentem oppoſitam ſectionem E; ſitque K ſectio oppoſita hyperbolæ ABMCD. Aſſere ſectiones E & K, non ſibi mutuò occurrere.

Apparatus. Occurrant ſi fieri poſſit ſibi inuicem in K, duæ ſectiones prędictæ E, K: Ducanturque rectæ AB, DC, quæ productæ vltra B & C, puncta viciniora vertici, concurrent per prop. 25. lib. 2. in L extra ipſas: Tùm per prop. 10. lib. 6. elem. diuidatur in P, recta AB, ita vt ſit AP ad PB, ſicut AL ad LB: Eademque methodo diuidatur DC, in R, ita vt ſit DR ad RC, ſicut DL ad LC: igitur per prop. 9. recta PR ducẽda, ſectioni vtrique ABMCD, ABFCD, occurret producta vtrimque; & quæ rectæ lineæ dicentur ab L ad puncta H, G, occurſuum prædictorum rectæ PR productæ, & ſectionum prædictarum, ipſas contingent ſectiones in punctis occurſuum prædictorum. Præterea tranſmittatur per puncta K & L, recta linea KL, quæ ſecabit angulum BLC; nam per prop. 33. lib. 2. recta AB ſecans ſectiones ABMCD, ABFCD, etiamſi producatur in infinitum, non occurret ſectionibus E, K, oppoſitis; quare recta KL ſecabit ABL in L: ſimili ratione recta DC ſecans dictas ſectiones iam ſectas ab altera AB, etiamſi producatur in infinitum, non occurret ſectionibus E, K; vnde recta KL ſecabit in L rectam DCL; cùmque in diuerſa extendantur ſe mutuò decuſſantes rectæ lineæ; ipſa recta KL diuidet angulũ BLC. ſi producatur vltra L; etſi in infinitum extendatur vltra L, ſecabit obuias ſectiones in M, & F, & rectam PR in N.

Demonſtratio. Per prop. 36. lib. 1. eſt vt KN ad NF, ſic KL ad LF; ergo viciſſim erit per prop. 16. lib. 5. elem. vt KN ad KL, ſic NF ad LF: ſimili modo per 36. prop. lib. 1. eſt vt KN ad NM, ſic KL ad ML; ergo per prop. 16. lib. 5. elem. permutãdo erit vt KN ad KL, ſic NM ad ML: igitur per propoſ. 11. lib. 5. elem. erit vt NF ad FL, ſic NM ad ML; eſt autem NF minor quàm NM, prima quàm tertia; igitur per propoſ. 14. lib. 5. elem. ſecunda FL minor erit quàm quarta ML, totum minus parte, contra 8. axiom. lib. 1. elem. Igitur falſa erit poſitio vnde procedit hoc abſurdum, quæ cùm repugnet propoſitioni præſenti; ipſa demonſtrata relinquetur.

PROPOSITIO XLIII.

Si hyperbole alteri oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occurrat, concaua habens ad eaſdem partes; alteri verò occurrat in vno puncto: quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum occurret.

SVppoſitio. Datæ ſint oppoſitæ ſectiones AB, & C; & vni earum AB, occurrens hyperbole ACB in duobus punctis A & B, & concaua habeat ad eaſdem partes alterius ſectionis AB; ſectioni verò C occurrens in puncto C: ſitque ſectio D, oppoſita ſectioni ACB. Dico hanc ſectionem D, nulli ſectionum AB, & C, occurret oppoſitarum.

Apparatus. Rectæ lineæ AC, BC, ducantur, quæ producantur vltra C, punctum commune, ad E & F.

Demonſtratio. Recta AC exiſtet intra hyperbolen ACB, & producta vltra C, ad F, pars CF, erit extra hyperbolen dictam, per 10. prop. lib. 1. ſic etiam recta BC exiſtet intra eandem hyperbolen, & pars eius CE erit extra eandem hyper-

hyperbolen, iuxta prop. cit. 2. lib. 5. sed neque eædem rectæ lineæ ACF, BCE, licet in infinitũ producantur vltra C, occurrent sectioni D, oppositæ ipsi ACB, per prop. 33. lib. 2, sed etiã eædem rectæ lineæ AC, BC, non occurrent sectioni C, in alio puncto ab C; alioquin si occurrerẽt in alio puncto ab C, ipsæ per cit. propos. 33. lib. 2. non occurrerent oppositæ sectioni AB, contra iam demonstrata & concessa: igitur rectæ lineæ AC, BC, sectioni C, tantummodò occurrent in vno C puncto: Cùm igitur duæ rectæ lineæ CE, CF, in infinitum productæ, non possint occurrere sectioni D; ipsa sectio D, semper erit sub angulo ECF: quare nonnũquam poterit occurrere sectionibus oppositis AB, & C; alioquin cùm intermediæ sint lineæ rectæ CE, CF, si occurreret sectionibus oppositis AB, C, ipsa sectio D, prius attingeret seu occurreret dictis rectis CE, CF, intermedijs, contra ea quæ demonstrauimus. Igitur si hyperbole alteri oppositarum sectionum in duobus punctis occurrat, concaua habens ad easdem partes; alteri verò occurrat in vno puncto: quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occurret. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Si hyperbole vni oppositarum sectionum occurrat in tribus punctis: quæ ipsi opponitur, alteri oppositarum, præterquam in vno puncto, non occurret.

Svppositio: Sint sectiones oppositæ OALBC, DEF; & hyperbole XAMBC, occurrat sectioni OALBC in tribus punctis A, B, C: sit verò sectioni XAMBC, opposita sectio DEK. Assero sectionem DEK non occurrere sectioni DEF, præterquam in vno puncto.

Apparatus. Esto si fieri possit, sectio DEK, occurrat sectioni DEF, in duobus punctis D, E. Ducantur verò rectæ AB, DE, quæ vel inter se erunt parallelæ, vel non parallelæ. Si primùm, hoc est sint æquidistantes rectæ AB, DE; secenturque per prop. 10. lib. 1. bifariàm, AB in G, DE in H: recta GH erit diameter datarum omnium sectionum, per propos. 36. lib. 2. ad quam erunt ordinatim applicatæ rectæ AB, DE, æquidistãtes, iuxta coroll. nost. 30. ad prop. 49. lib. 2. Præterea per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto C, educatur recta linea CNOX, parallela ipsi AB, quæ per prop. 30. lib. cit. 1. elem. erit etiam parallela alteri DE, secabitque obuiam HG productam vltra G, in N puncto per prop. 11. Procli; eritque ordinatim applicata diametro HGN, per cit. corollar. 30. ad prop. 49. lib. 2. conuenietque per prop. 19. lib. 1. cum sectione ALBC in O, & cum sectione XAMBC in X puncto diuerso ab O, cùm dẽtur istæ duæ sectiones solùm conuenire in tribus punctis A, B, C. Porrò diameter HGN; secabit in L sectionem ALBC, & in M sectionem XAMBC. Quod si duæ rectæ lineæ DHE, AGB, non sint æquidistantes, productæ conuenient in vno puncto puta P: Ducatur verò per prop. 31. lib. 1. elem. ex puncto C, recta linea CO ipsi ABP parallela, quæ producta vltra C conueniet in R cum recta DEP producenda vltra P; per prop. 11. Procli: secentur autem per prop. 10. lib. 1. elem. bifariàm duæ rectæ lineæ AB, DE, illa in H, hæc in G: & per prop. 45. lib. 2. coroll. nost. 1. quæratur centrum datarum oppositarum sectionum OALBC, DEF, per quod & punctum G medium rectæ AB transmittatur recta linea quæ erit diameter ipsarum oppositarum sectionum per corol. prop. 51. lib. 1. secabitque in L lineam curuam sectionis OALBC, & per prop. 29. lib. 1. aliam oppositam sectionem DEF, in pũcto I, rectamque DE obuiam in H, si producatur vltra I: sed & etiam secabit in M, obuiam lineam curuam sectionis XABMC.

Ducantur autem diametri IH, MLG ad puncta media H, G, rectarum DE, AB, bifariàm sectarum in G & H; quæ rectæ DHE, AGB, erunt ordinatim applicatæ suis proprijs diametris per coroll. nost. 29. ad prop. 49. lib. 2. Quare si per prop. ipsam 49. cit. ex puncto I, recta linea educatur IYT tangens Hyperbolam DEK, in I puncto, ipsa recta IYT erit parallela rectæ DEPR: per 5. prop. lib. 2. eodem modo si ex puncto M ponatur recta linea MY tangens in M, hyperbolam XAMBC; ipsa erit parallela rectæ AGBP: etsi ab puncto L agatur alia recta LT tangens hyperbolam OALBC in L, ipsa erit æquidistans rectæ AGBP; tùm etiam per propos. 30. lib. 1. elem. dictæ duæ MY, LT, rectæ, & recta OXCR, erunt parallelæ inter se, quia parallelæ eidem rectæ AGBP. sed & recta IYT concurret cum parallelis rectis MY, LT, in Y & T, per prop. 11. Procli, nam earum parallelæ rectæ lineæ DHEPR, AGBP, respectiuè, concurrunt. Denique erit per corol. nostrum cit. 29. ad prop. 49. lib. 2. recta OXC, ordinatim applicata diametro MLGS. Iam verò in hoc secundo casu, erit per prop. 19. lib. 3. vt quadratum MY ad quadratum IY, sic rectangulum sub AP, PB, ad rectangulum sub DP, PE; tum vt quadratum LT ad quadratum IT, sic rectangulum sub AP, PB, ad rectangulum sub DP, PE: ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt quadratum MY ad quadratum IY, sic quadratum LT ad quadratum IT. Ex eisdem principijs, hoc est 19. lib. 3. propterea erit vt quadratum MY ad quadratum YI, vel vt quadratum LT ad quadratum TI, ex dictis, sic rectangulum sub XR, RC, ad rectangulum sub DR, RE; sed per eandem prop. 19. lib. 3. est vt quadratum LT ad quadratum TI, sic rectangulum sub OR, RC, ad rectangulũ sub DR, RE;

ergo

ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub XR, RC, ad rectangulum sub DR, RE, sic rectangulum sub OR, RC, ad rectangulum sub DR, RE.

Demonstratio in casu quo duæ rectæ AB, DE, sint æquidistantes. Quandoquidem in apparatu huius casus, recta CNOX, ostensa est ordinatim applicata diametro HLMGN, erit per defin. 13. lib. 1. inter primas, recta CN, æqualis rectæ NO, in sectione OALBC; simili ratione recta CN erit æqualis ipsi NX, in sectione XAMBC: quare per 1. axio. lib. 1. elem. rectæ NO, NX, erunt æquales, totum & pars, contra 8. axiom. lib. 1. elem.

Demonstratio in casu quo duæ rectæ AB, DE, non sint æquidistantes. Demonstrauimus in apparatu ad hunc casum, ita esse rectangulum sub OR, RC, ad rectangulum sub DR, RE, vt erat rectangulum sub XR, RC, ad rectangulum sub DR, RE: igitur per propos. 9. lib. 5. elem. rectangulum sub OR, RC, erit æquale rectangulo sub XR, RC. Quare per propos. 14. lib. 6. elem. erit vt OR ad XR, sic RC ad RC: prima OR est inæqualis secundæ XR, ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. elem. tertia RC, erit inæqualis quartæ RC: hoc idem sibi ipsi inæquale, contra omnem rationis vsum.

Hæc duo absurda deducta ex positione contradicente assertioni huius propositionis 44. condemnant falsitatis positionem illam, & confirmant in veritate assertionem propositionis.

PROPOSITIO XLV.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum contingat, alteram verò secet in duobus punctis: quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occurret.

SVppositio. Sint duæ sectiones oppositæ ABC, & D; & aliæ duæ sectiones oppositæ ABD, & CE: sectio verò ABD, sectionem ABC in duobus A, B, punctis secet, & sectionem D contingat in puncto D. Dico sectionem CE, oppositam ipsi ABD, sectionibus ABC, & D, nullo modo occurrere.

Apparatus. Puncta A, B, nectantur recta linea AB, producenda in infinitum: hæc recta AB quia secat sectionem ABC, nunquam occurret oppositæ sectioni D, per prop. 33. lib. 2. ideoque etiam quia eadem recta AB, secat sectionem ABD, nunquam occurret sectioni illi oppositæ, videlicet CE. Præterea per prop. 49. lib. 2. ex puncto D educatur recta linea DF, contingens iuxta lemma vnicum ad hunc librum, in puncto D, sectiones ABD, & D, se mutuò in eodem puncto D contingentes; hæc linea DF in infinitum producta, nunquam attinget sectiones CE, & ABC, oppositas prædictis ABD, & D, per cit. prop. 33. lib. 2.

Demonstratio. Si sectio CE occurrat sectioni ABC, necessariò prius attingere debet intermediam rectam DF productam in infinitum, contra id quod demonstrauimus in apparatu, per prop. 33. lib. 2. simili modo si eadem sectio CE, occurrat sectioni D, necessariò antea intermediæ rectæ AB productæ in infinitum, occurret, contra prop. cit. 33. lib. 2. Ista verò absurda cùm deducantur ex suppositione occurrentis sectionis CE, alterutri sectioni oppositarum ABC, D; signum est ipsam suppositionem introductam esse aduersantem rationi; & assertionem propositionis præsentis esse veram: nimirum si hyperbole vnam oppositarum sectionum contingat, & alteram secet duobus in punctis; quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occurret. atque ita demonstrauimus propositum.

PROPOSITIO XLVI.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum in vno puncto contingat, & secet in duobus punctis: quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones ABC, & D, & duæ aliæ oppositæ BGAC, & E: sectio verò BGAC contingat in A sectionem ABC, eandemque secet in duobus alijs punctis B, C. Dico sectionem E non occurrere sectioni D.

Apparatus. Ducatur recta BC, quæ tota erit per pro. 10. lib. 1 intra sectiones ABC, BGAC, productaque in infinitum vtrimque, erit extra ipsas ista extensio, sed neque attinget talis productio rectæ BC, vltra B punctum versus F, ipsas sectiones D, & E, oppositas prædictis sectis proprijs per 33. prop. lib. 2.

Demonstratio. Quoniam recta CBF, seu pars eius BF media est inter sectiones D, & E, ipsas non attingens, seu nullo modo occurrens illis: si sectio E, occurreret sectioni D; necessariò incurrere deberet primùm, intermediæ rectæ BF, contra demonstrata. Igitur sectio E non occurret sectioni D, quod erat demonstrandum.

PROPO-

PROPOSITIO XLVII.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum contingens, in alio puncto secet : quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret, præterquam in vno puncto.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones BAC, EFG; & aliæ duæ oppositæ sectiones DAC, EFH: & hyperbole seu sectio DAC contingat in A puncto, secetque in alio puncto C, sectionem ABC. Dico sectionem EFH quæ opponitur sectioni DAC, non occurrere sectioni EFG oppositæ ipsi ABC contactæ & sectæ ab DAC sectione, nisi in puncto vnico.

Apparatus. Esto si fieri possit, sectio EFH sectioni EFG, occurrat in duobus punctis E, F. Ducatur recta EF; & per prop. 49. lib. 2. per punctum A ducatur recta linea AK sectiones ABC, DAC, contingens in puncto A, iuxta lemma nostrum vnicum ad hunc lib. Hæ duæ rectæ lineæ EF, AK, vel erunt parallelæ, vel non parallelæ. In casu quo sint parallelæ, consule primam figuram pro apparatus prosequutione, ac demonstratione: Bifariàm secetur recta EF, in puncto M; ducaturque recta AM, ipsa erit diameter datarum sectionum, per prop. 34. lib. 2. Præterea per punctum C, transmittatur recta linea CLDB, parallela ipsi AK, vel EF, per prop. 31. lib. 1. elem. hanc rectam CLDB, secabit MA producta vltra A, in puncto L, per prop. 11. Procli, sicuti secat parallelas EF, AK, ipsi; sed & eadem recta CL, etit ordinatim applicata ad diametrum MAL, per coroll. nost. 30. ad prop. 49. lib. 2. producta vltra L, secabit in D sectionem DAC, & in B sectionem BAC, iuxta prop. 19. lib. 1.

Demonstratio in casu quo duæ rectæ lineæ EF, AK, sint parallelæ. Quandoquidem CLD est ordinatim applicata ad diametrum AL, erit per definit. 10. vel 13. lib. 1. inter primas, CL æqualis ipsi LD: & quia etiam recta CLB, est ordinatim applicata diametro ML, erit per cit. definit. CL æqualis ipsi LB: quare per 1. axiom. lib. 1. elem. rectæ LD, LB, erunt æquales, totum & pars, contra 8. axiom. lib. 1. elem. hoc absurdum consequens ad positionem contradicentem assertioni propositionis, arguit falsitatis ipsam positionem, stabilitque assertionem propositionis.

Apparatus in casu quo duæ rectæ lineæ EF, AK, non sint parallelæ; conuenient igitur in aliquo puncto, puta K. Iam verò ex prop. 31. lib. 1. elem. per punctum C, ponatur recta linea CLBD parallela tangenti AK, & per centrum oppositarum sectionum & punctum A contactus ducatur recta linea, quæ erit diameter ipsarum iuxta coroll. prop. 51. lib. 1. secabit bifariam in L, rectam CLBD, per prop. 47. lib. 1. ideoque recta CLBD, ordinatim applicata erit ad diametrum AL, iuxta coroll. nost. 29. ad prop. 49. lib. 2. simili modo transmittatur alia diameter oppositarum sectionum per centrum eatum & punctum medium M rectæ EMF, quæ per coroll. nost. 29. ad prop. 49. lib. 2. erit ordinatim applicata diametro incedenti per M, & secabit hæc diameter suam sectionem verbi gratia O, & alia diameter suam in X. Ad hæc, per prop. 31. lib. 1. elem. ex punctis X, & O, educantur rectæ lineæ XP, OR, æquidistantes ipsi EFK, erunt inter se parallelæ per prop. 30. lib. 1. elem. ideoque per prop. 5. lib. 2. rectæ XP, OR, erunt contingentes suas proprias sectiones in punctis X, O; secabitque illas in P, R, recta AK, per prop. 11. Procli, quia vnam parallelarum EFK, secat in K, recta AK: & recta LC producta secabitur in N ab recta EFK producta, sicut secatur recta AK ab eadem recta EFK, idque per cit. prop. 11. Procli.

Demonstratio in casu quo duæ rectæ EF, AK, non sint parallelæ. per prop. 19. lib. 3. est vt quadratum AP ad quadratum PX, vel vt quadratum AR ad quadratum RO, sic rectangulum sub DN, NC, ad rectangulum sub EN, NF, & sic rectangulum sub BN, NC, ad rectangulum sub EN, NF; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt rectangulum sub DN, NC, ad rectangulum sub EN, NF, sic rectangulum sub BN, NC, ad rectangulum sub EN, NF: ergo per prop. 9. lib. 5. elem. rectangulum sub BN, NC, erit æquale rectangulo sub DN, NC: quare per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt BN ad DN; sic NC, ad NC: BN autem prima inæqualis secundæ DN, ergo per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. element. NC, erit æqualis ipsi NC, tertia quartæ; idem sibi ipsi inæquale, hoc absurdum indicat positionem contradicentem assertioni huius propositionis, falsam esse, & assertionem veram.

PROPOSITIO XLVIII.

Si hyperbole vnam oppositarum sectionum in vno puncto cótingat, ad easdem partes concaua habens: quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.

SVppositio. Datæ sint sectiones oppositæ AB, DEG duæ; & alia Hyperbola AC, sectionem AB contingat in vnico puncto A, ad easdem partes concaua obtinens cum contacta AB: (has particulas quoad concauitatem adLl didi-

didimur consulto, si enim hæc restrictio non adderetur, sed concaua è regione haberet, contingens & contacta hyperbolæ, oppositæ ipsis nulla ratione conuenirent ad inuicem, vti docebit Apollonius propositione 52. dat autem in ista propositione quadragesima octaua, istas oppositas commemoratis sibi inuicem occurrere seu conuenire in duobus punctis.) Dico autem sectionem DEF oppositam sectioni AC, non occurrere sectioni DEG, ad plura puncta quàm duo D, E, exempli gratia.

Apparatus. Si fieri possit, occurrat sectio DEF, sectioni DEG, ad aliud punctum H tertium, præter alia duo data D, E. Ducatur per prop. 49. lib. 2. recta AK contingens sectiones AB, AC, in puncto A mutui dati contactus; patet per lemma nostrum vnicum, ad hunc librum, tectam AK eductam contingentem alterutram sectionum AB, AC in puncto A prædicto, contingere & aliam sectionem ex illis duabus. Vniantur puncta D & E, recta linea DE; quæ vel erit parallela rectæ AK; vel non parallela. Si primum, secetur per prop. 10. lib. 1. elem. recta DE bifariàm in puncto L; erit per prop. 34. lib. 2. ducenda recta AL diameter datarum sectionum, secabitque obuias sectiones DEG, DEF, in punctis M & N, vnam in vno, alteram in alio; nam tota recta DE est per prop. 10. lib. 1. intra dictas sectiones, & ad eius punctum medium L transmissa est recta AL ex puncto A exteriore. Porrò ex puncto H tertio inttoducto, agatur recta linea HXGF parallela ipsi DLE, quæ per prop. 19. lib. 1. secabit sectiones ipsas DEG, DEF, in G, & F, præter commune punctum H & diametrum AMNL productam vltra L, in puncto X, per prop. 1. Procli, quia per prop. 48. lib. 1. coroll. nost. 7. recta DLE est ordinatim applicata diametro AL prædictæ; vnde per corollar. nost. 30. ad prop. 49. lib. 2. altera recta HXGF, erit etiam ordinatim applicata eidem diametro, ideóque bifariàm diuisa in X, per defin. 10. lib. 1. inter primas. Si secundum, hoc est, duæ rectæ lineæ AK, DE non sint æquidistantes, sed in puncto K conueniant; ducaturque recta ex puncto H parallela ipsi ED, secans obuias sectiones DEG, DEF, in punctis G, F; & producatur recta AK vltra K, ipsa occurret alteri rectæ FGH producendæ vltra H, in puncto R, per prop. 11. Procli, quia datur occurrere parallelæ DE in K: Reliqua verò fiant vti in apparatu ad similem casum, propositionis præcedentis.

Demonstratio ex suppositione quod duæ rectæ DE, AK, sint parallelæ. Ostendimus in apparatu rectam HXGF, ordinatim applicatam diametro ALX, esse bifariam diuisam in puncto X; igitur rectæ semisses XG, XF, erunt separatim sumptæ æquales alteri semissi HX; ergo per 1. axiom. lib. 1. elem. duæ rectæ XG, XF, erunt æquales inter se, contra 8. axiom. lib. eiusdem. hoc absurdum cùm proueniat ex positione aduersarij contradicente assertioni huius propos. ipsa positio falsa erit, & assertio vera.

Demonstratio ex suppositione quod duæ rectæ DE, AK, conueurrant in puncto K, & non sint parallelæ. Ex eisdem principijs citatis in demonstratione similis casus propositionis præcedentis 47. demonstrabimus vt rectangulum sub DK, KE, ad quadratum rectæ AK, in sectione FDE, ita esse rectangulum sub FR, RH, ad quadratum rectæ RA; & in sectione GDE, ita esse rectangulum sub GR, RH, ad quadratum rectæ RA: ergo per prop. 11. & 9. lib. 5. elem. rectangulum sub GR, RH, æquale erit rectangulo sub FR, RH; vnde per prop. 14. lib. 6. elem. erit vt GR ad FR, sic RH ad RH; cumque sint duæ RH æquales, erunt per coroll. nost. 2. ad prop. 14. lib. 5. element. duæ GR, FR, æquales contra 8. axiom. lib. 1. elem. quare in hoc casu falsa erit positio aduersarij, & vera propositio.

PROPOSITIO XLIX.

Si Hyperbole contingat vtramque oppositarum sectionum: quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum occurret.

Suppositio; Hyperbole AB, contingat in A & B, sectiones oppositar A, B. Dico sectionem E oppositam sectioni AB, nulli sectionum A, B. occurrere.

Apparatus. Esto si fieri possit, sectio E opposita sectioni AB, occurrat in D, sectioni A: & per prop. 49. lib. 2. ex punctis A, B, contactuum sectionir AB, cum sectionibus A, B, educantur rectæ lineæ AC, BC, contingentes ipsas sectiones se mutuò tangentes, iuxta vnicum nostrum ad hunc librum: istæ duæ rectæ AC, BC, contingentes Hyperbolem AB, conuenient in vnum punctum C, per coroll. nost. 1. ad prop. 25. lib. 2. idque intra angulum continentem ipsam Hyperbolam AB: sed & quælibet ex his rectis contingentibus producta vltra C, nunquam conueniet cum sectione E opposita ipsi AB, per prop. 33. lib. 2. His positis, concludemus intentum.

Demonstratio. Quia datur sectio E opposita ipsi AB sectioni, per aduersarium occurrere sectioni A, quam tangit ex datis in propositione, sectio AB in A: quatuor datæ sectiones spatium claudent versus B, A, D, non autem versus E. Productis ergo rectis lineis AC, BC, angulum in C efficientibus, se mutuò decussabunt in C puncto, & ab illo recta AC progredietur infra rectam BC, versus spatium apertum, alia verò recta BC, progredietur supra rectam AC, iuxta 11. axiom. lib. 1. elem. idque versus spatium clausum ab datis sectionibus: producendo ergo rectam BC in infini-

tum

tum vltra C, infringet sectionem E vel sectionem A, in F, per axiom. 18. lib. 1. elem. sed hoc est contra prop. 33 lib. 2. seu contra concessa in apparatu. Absurdum igitur hoc consequens ad positionem aduersarij contradicentem assertioni huius propositionis; indicat ipsam positionem esse falsam, & propositionem veram.

PROPOSITIO · L.

Si Hyperbole vtramque oppositarum sectionum in vno puncto contingat, non ad easdem partes concaua habens; in alio puncto non occurret.

SVppositio. Hyperbole DAB, sectiones oppositas ED, CA, contingat in punctis D & A, illam in D, hanc in A; & sectio tangens DAB, non habeat concaua ad easdem partes cum sectionibus contactis. Dico quod sectio DAB, non occurret dictis contactis sectionibus oppositis in alio puncto.

Hæc propositio dependet ex vniuersali 38. iam demonstrata, qua constat quamcumque coni sectionem, vel circuli circumferentiam, contingentem oppositas sectiones singulas in vno puncto; ipsis oppositis sectionibus non occurrere in alio puncto. Igitur Hyperbole DAB cùm sit coni sectio, data contingere sectiones oppositas ED, CA, illam in D, hanc in A; & non habeat concaua ad easdem partes; in alio puncto ipsis non occurret. Quoad conditionem adiunctam attinet, vera est ex prop. 37. Si enim hyperbole tangens DAB haberet concaua ad easdem partes alterutrius oppositarum sectionum contactarum, hoc est concaua sui parte contingeret alteram oppositarum sectionum, alteri non occurreret per cit. prop. 37. contra datum.

PROPOSITIO LI.

Si Hyperbole vnam oppositarum sectionum contingat in duobus punctis: quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

SVppositio. Sint oppositæ sectiones ADB, EI; & Hyperbole ACB contingat in duobus punctis A, B, sectionem ADB, opponaturque Hyperbolæ ACB, sectio EF. Dico sectionem EF, non occurrere sectioni EI.

Apparatus. Esto si fieri possit, duæ Hyperbolæ EF, EI, sibi mutuò occurrant in E. Tùm per prop. 49. lib. 2. ex punctis A & B, educantur rectæ lineæ AG, BG, contingentes Hyperbolam ABC; quæ per lemma nost. ad hunc librum, contingent etiam aliam Hyperbolam ACB; & per coroll. nost. 1. ad prop. 25. lib. 2. concurrent in G punctum situm intra angulum continentem Hyperbolam ACB & ADB. Porrò ducatur recta AB nectens puncta contactuum A, B, tàm dictarum rectarum tangentium AG, BG, quàm datarum Hyperbolarum ACB, ADB; quæ per prop. 30. lib. 1. elem. bifariàm diuidatur in H; rectaque HG extendatur, hæc erit diameter transuersa tam sectionis ACB, quàm ADB, per prop. 29. lib. 2. producta autem hac diametro vltra G, terminetur in puncto E sectionis introductæ hyperbolarum EI, EF; nam etiam illarum erit diameter, vt oppositarum prædictarum. Porrò per coroll. nost. 29. ad prop. 49. lib. 2. recta AHB erit ordinatim applicata dictæ diametro EGH, quæ obuias lineas curuas hyperbolarum ACB; ADB, secabit, illam in C, hanc in D. His paratis sequitur

Demonstratio. Per prop. 36. lib. 1. & prop. 16. lib. 5. element. erit in sectione hyperbolica ADB, vt HE ad EG, sic HD ad DG; & in alia hyperbola ACB, vt HE ad EG, sic HC ad CG: quare per prop. 11. lib. 5 elem. erit vt HD ad DG, sic HC ad CG: Prima HD minor est quàm tertia HC, ergo per prop. 14. lib. 5. elem. DG secunda minor erit quàm quarta CG, totum minus parte, contra 8. axiom. lib. 1. element. Igitur positio vnde prouenit contradicens assertioni huius propositionis, falsa erit, & propositio vera.

PROPOSITIO LII.

Si Hyperbole vnam oppositarum sectionum contingat, conuexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio, alteri oppositarum non occurret.

SVppositio. Sint sectiones oppositæ A, B; & Hyperbole AD contingat in A, sectionem A, conuexa habens opposita sibi ipsis; & Hyperbole AD opponatur sectioni F. Assero hanc sectionem F alteri B datarum oppositarum A, B, non occurrere.

Apparatus. Per prop. 49. lib. 2. ex puncto A contactus duarum hyperbolarum AD, & A, educatur recta linea AC contingens alterutram Hyperbolam, continget etiam alteram per lemma nost. vnicum ad hunc librum: & per prop. 33. lib. 2. nunquam occurret sectioni B oppositæ ipsi A; sed neque sectioni F oppositæ ipsi AD.

Demonstratio. Si sectio F, occurreret sectioni B, occurreret prius rectæ AC, quod fieri

non posse ostendimus in apparatu. Igitur sectio F non occurret sectioni B. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIII.

Oppositæ sectiones, oppositas non secant in pluribus punctis quàm quatuor.

Suppositio prima. Sint oppositæ sectiones AB, CD, & aliæ duæ oppositæ ABCD, EF, & sectio ABCD, vtramque oppositarum AB, CD, secet in quatuor punctis A, B, C, D, conuexa habens è regione sita. Dico sectionem EF, oppositam sectioni ABCD, nulli datarum sectionum occurrere, & solùm datas sectiones oppositas se mutuò secare in quatuor tantùm punctis assignatis.

Demonstratio. Imprimis per prop. 36. Hyperbole ABCD, duabus oppositis sectionibus AB, CD, non occurret ad plura puncta quàm quatuor A, B, C, D, assignata. Præterea quia Hyperbole ABCD, quamlibet oppositarum sectionum AB, CD, duobus in punctis secat ex datis seu suppositione; quæ ei opponitur sectio EF, nulli oppositarum AB, CD, occurret, per prop. 41. Ergo in hoc casu seu suppositione, oppositæ sectiones, oppositas non secant in pluribus punctis quàm quatuor, vti propositum est.

Altera suppositio. Sint duæ sectiones oppositæ ABC, EF, tùm aliæ duæ oppositæ ABE, CD: & ABC sectio secet in duobus punctis A, B, sectionem ABE & huic oppositam CD, in puncto C; & sectio AB secet sectionem EF, in E. Dico sectionem ABE, non secturam in alio puncto diuerso ab E, sectionem EF, nec sectionem ABC secturam sectionem CD in alio puncto diuerso ab C; nec sectiones EF, CD, sibi mutuò occurrere: atque ita datas sectiones oppositas, alias datas sectiones oppositas non secare nisi in quatuor tantùm punctis assignatis A, B, C, E.

Demonstratio. Imprimis enim quia Hyperbole ABC, datur secare sectionem ABE, in duobus punctis A, B, conuexa habens è regione sita, sectio EF opposita sectioni ABC, non occurret sectioni CD oppositæ ipsi sectioni ABE, per prop. 39. Præterea quia datur sectio ABE secare solùm in vno puncto E, sectionem EF; si per impossibile secaret ipsam in alio puncto diuerso ab E; quandoquidem obtinet conuexa è regione sita vtrisque; sectio CD opposita secanti ABE, per prop. 41. nulli oppositarum ABC, EF, occurreret, contra datum, datur enim sectio CD secta in C ab sectione ABC. Similiter si fieri possit sectio ABC secans duobus in punctis sectionem ABE, & sectionem CD in puncto C, ex datis; secetur in alio puncto sectio CD, diuerso ab C, ab sectione ABC; tunc per cit. prop. 41. sectio EF, opposita secanti sectioni ABC prædictæ, nulli oppositarum sectionum ABE, CD, occurreret, contra datum, datur enim EF sectio secta in E ab sectione ABE. Atque ita probauerimus intentum.

Tertia suppositio. Hyperbole ABC, sectionem ABE duobus in punctis A, B, secet; occurret quidem sectio ABE sectioni EF oppositæ ipsi ABC, per prop. 35. sed sectioni D oppositæ ipsi ABE, non occurret Hyperbole ABC, per prop. 40. Dico autem sectionem ABE occurrere sectionibus oppositis in punctis duobus quidem A, B, sectioni AB, & item vni E, vel duobus E, & G, sectioni oppositæ EF, ipsi ABC: & sic tribus solùm in punctis se mutuò secare, vel quatuor; non autem pluribus quàm quatuor.

Demonstratio. Imprimis, per prop. 35. Hyperbole ABE secans duobus in punctis, A, B, sectionem ABC, occurret etiam ipsi oppositæ EF, sed non in pluribus punctis quàm duobus; quod si duobus in punctis secet ABE sectio sectionem EF, erit prima suppositio, in qua demonstrauimus, datas sectiones non se mutuò secare in pluribus punctis quàm quatuor. Quod si detur sectio ABE solùm occurrere vni puncto E, sectioni EF; tunc etiam per cit. prop. 35. sectio ABE non occurret sectioni EF, in pluribus punctis quàm duobus; sed non impedit quin in paucioribus, videlicet in vno occurrat, vel occurrere possit: tunc verò per prop. 39. ipsa sectio EF, nunquam occurret sectioni D, posito quod sectio ABE occurrat duobus in punctis A, B, sectioni ABC: Et sic in hoc casu, licet oppositæ sectiones se mutuò secent in tribus solùm punctis; semper vera erit propositio præsens, quod sectiones oppositæ, oppositas non secent in pluribus punctis quàm quatuor.

Suppositio quarta. Hyperbole ABCD, secet sectionem BE in vno puncto B, & sectionem CF oppositam ipsi BE, in vno puncto C: tùm istæ duæ BE, CF, secentur ab Hyperbola EF opposita ipsi ABCD, singulæ in suo proprio vnico puncto E, F. Dico has sectiones non se mutuò secare in pluribus punctis quàm quatuor B, C, E, F, assignatis.

Demonstratio. Datur hyperbole ABCD, vtrique oppositarum sectionum BE, CF, occurrere; ergo per prop. 40. sectio EF, opposita ipsi ABCD, nulli datarum oppositarum BE, CF, occurret duobus in punctis: datur autem solùm occursus in vno puncto in singulis, videlicet sectiones in E, & F: igitur verum erit propositum.

Suppositio quinta. Sint duæ sectiones ABC, ABCD, ad easdem partes concaua vel conuexa habentes; tùm aliæ duæ CD, EF, similiter ad easdem partes concaua obtinentes; sintque duæ oppositæ propriæ, & reliquæ duæ oppositæ

sitæ: secentque se mutuò duæ primæ propositæ in punctis quatuor A, B, C, D. Dico omnes illas quatuor in pluribus punctis se non intersecare.

Demonstratio. Imprimis per prop. 25. duæ datæ sectiones se mutuò secare in quatuor punctis A, B, C, D, in pluribus se non intersecabunt: Tùm per prop. 42. aliæ his oppositæ, non occurrent alijs. Et sic non se mutuò secabunt datæ sectiones in pluribus punctis quàm quatuor assignatis in hoc casu quinto.

Suppositio sexta. Hyperbole ABC occurrat tribus in punctis A, B, C, sectioni ABCG, & concaua habeant ad easdem partes; DE verò sectio opposita ipsi ABC occurrat in vno puncto E, sectioni EF oppositæ ipsi ABCG. Assero quod sibi inuicem non occurrant alijs in punctis, hoc est in pluribus quàm quatuor designatis A, B, C, E.

Demonstratio. Quandoquidem datur Hyperbole ABC occurrere tribus in punctis A, B, C, sectioni ABCG; sectio DE opposita ipsi ABC, non occurret sectioni EF oppositæ ipsi ABCG, nisi in vno puncto E per prop. 44. Et licet sectio ABC, occurrat sectioni ABCG, tribus in punctis ex datis, concauaque habeant ad easdem partes, duo ex illis puncta immediata puta A, B, assumere poterimus; quare per prop. 34. neutra ex his sectionibus, oppositis alijs nunquam occurret: & sic in hac suppositione, seu in hoc casu sexto, datæ quatuor sectiones, quarum binæ sint oppositæ, ad plura quàm quatuor puncta sibi mutuò non occurrent se mutuò secando.

Cùm igitur in omnibus casibus, videlicet ponendo vnam ex sectionibus alteram non sibi oppositam, secare in vno, vel duobus, vel tribus, vel quatuor punctis; ostenderimus quatuor sectiones quarum binæ sint oppositæ, non se mutuò secare in pluribus punctis quàm quatuor: tota propositio abundè probata relinquetur.

PROPOSITIO LIV.

Si oppositæ sectiones, oppositas in vno puncto contingant; non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo.

HÆc propositio, sicuti etiam alia præcedens, duos patitur casus vniuersales: Aut enim duæ, ex datis quatuor, sectiones non oppositæ habebunt conuexa, vel concaua ad easdem partes, aut è regione seu ad contrarias partes. Et in quolibet ex his duobus casibus, vna sectione data contingente aliam sibi non oppositam, secabit aliam huic oppositam in duobus punctis; vel in vno solùm. His præmonitis sit

Suppositio prima in casu quo Hyperbole BCD contingens sectionem AB sibi non oppositam contingat in vno tantùm A puncto; & aliam huic oppositam CD, in duobus tantùm punctis C, D, secet. Dico sectionem EF oppositam Hyperbolæ BCD, contingenti & secanti, nulli aliarum tuum occurrere posse: & has quatuor è regione habentes conuexa vel concaua, non occurrere sibi inuicem ad alia puncta plura quàm duo C, D, excludendo punctum B contactus dati.

Demonstratio. Primò quidem, quia Hyperbole BCD, contingit sectionem AB in B vnico puncto, conuexa vel concaua habens è regione, per propos. 51. sectio EF opposita ipsi BCD, non occurret vlli sectionum AB, CD, oppositarum. Et quia etiam datur Hyperbole BCD secare sectionem CD, duobus in punctis C, D, conuexaque habent è regione; sectio EF opposita Hyperbolæ BCD, non occurret per prop. 39. sectioni AB oppositæ ipsi sectæ CD. Breuius quia datur Hyperbole BCD, contingere in vno A puncto sectionem AB, & secare in duobus C, D, sectionem CD oppositam ipsi AB contactæ; per prop. 45. sectio EF opposita ipsi BCD, nulli oppositarum sectionum occurret. Igitur excludendo contactum datum, sectiones datæ conuexa vel concaua obtinentes è regione, ad plura quàm duo puncta non occurrent.

Suppositio secunda, in casu quo Hyperbole BCD contingens in B puncto vnico sectionem AB, & secans in C puncto vnico sectionem C d oppositam contactæ AB; & sectio FE opposita ipsi BCD, secet in puncto E vnico, sectionem AB: conuexaque seu concaua possideant ad contrarias partes, Hyperbolæ omnes datæ. Assero sibi tantùm occurrere in duobus punctis C, E, diuersis ab contactu in B dato.

Demonstratio. Esto enim si fieri possit, sectio EF occurrat duobus in punctis sectionis AB, quandoquidem conuexa habent è regione, sectio BCD opposita ipsi EF, non occurreret sectioni C d per prop. 39. contra data & recepta. Similiter si fieri possit sectio BCD, secet sectionem C d in duobus punctis; tunc per cit. prop. 39. sectio FE non occurreret sectioni AB, contra data & recepta. Insuper quia datur Hyperbola BCD, contingere sectionem AB in A; sectio EF opposita Hyperbolæ BCD, non occurret sectioni C d oppositæ ipsi AB contactæ, per prop. 52. Igitur datæ sectiones, secluso puncto contactus non occurrent sibi ad alia puncta plura quàm duo.

Suppositio tertia in casu quo datæ sectiones habeant conuexa vel concaua ad easdem partes. Hyperbole AEB, sectionem CED, contingat in vno E puncto; & sectio KGHL opposita Hyperbola AEB, secet in duobus G, H, punctis, sectionem FGHI oppositam ipsi CED. Dico has non sibi occurrere ad alia puncta plura quàm duo G, H, secluso contactu E.

Demonstratio. Per prop. 48. quia datur Hyperbola AEB contingere in puncto E vnico sectionem CED; sectio KGHL opposita Hyperbolæ AEB, non occurret sectioni FGHI oppositæ ipsi CED, in pluribus punctis quàm duobus G, H. Et quia Hyperbola AEB concaua sui parte tangit in E, sectionem CED; eadem Hyperbola AEB non occurret per prop. 37. alteri sectioni FGHI oppositæ ipsi CED. Atque ita probauerimus intentum.

Suppositio alia nulla est in casu quo sectiones quatuor debeant obtinere conuexa vel concaua ad easdem partes. Fieri enim nequit vt vna Hyperbola sectionem vnam ex duabus oppositis contingat in vnico puncto; & alia huic opposita occurrat alteri oppositæ in vno puncto, & in alio eidem contactæ, quin habeant conuexa è regione sita, quod tollit casum datum. Ducendo enim per prop. 49. lib. 2. rectam vnam contingentem vnam ex datis sectionibus contactis, in puncto ipso contactus dati, continget etiam in eodem puncto aliam, per lemma nostr. vnicum ad hunc librum; quæ recta linea in infinitum producta nunquam occurret alijs sectionibus oppositis proprijs, istis contactis, per propos. 33. lib. 2. Quod si altera ex his separatis posset occurrere sectioni alteri contactæ, & alteri oppositæ, necessariò prius occurreret intermediæ dictæ lineæ, quod fieri non potest vti constat ex citat. prop. 33. lib. 2. Restat igitur vt in omnibus casibus manifesta sit propositio.

PROPOSITIO LV.

Si sectiones oppositæ, oppositas contingant in duobus punctis: in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Vel datæ sectiones ad contrarias partes conuexa aut concaua habebunt; vel ad easdem partes.

Suppositio vnica. Sint datæ oppositæ sectiones AB, CD; & aliæ duæ oppositæ sectiones AC, EF; habentes concaua vel conuexa ad contrarias partes: & sectio AC, contingat sectiones oppositas AB, CD, in duobus punctis A, C; AB quidem in A puncto; & CD in puncto C. Dico in nullo alio puncto sibi mutuò incurrere, sed solùm in prædictis duobus punctis contactus A, C.

Demonstratio. Imprimis per prop. 50. quia Hyperbole AC, vtramque oppositarum AB, CD, contingit, in puncto quidem A sectionem AB, & in puncto C alteram sectionem oppositam CD, & ad partes contrarias concaua habent; in alio puncto ipsis non occurret. Præterea quia eadem Hyperbole AC, vtramque oppositarum earundem AB, CD, contingit; per prop. 49. sectio EF, opposita Hyperbolæ AC, nulli oppositarum AB, CD, occurret: & sic manifesta erit propositio in hoc casu.

Suppositio alia in casu quo habeant conuexa vel concaua è regione sita, est impossibilis; videlicet, Sint datæ oppositæ sectiones AC, EF, & aliæ oppositæ CD, EG, ad contrarias partes conuexa vel concaua obtinentes. Et Hyperbola AC, contingat in puncto C sectionem CD; tùm Hyperbola EF opposita ipsi AC, contingat in E sectionem EG oppositam ipsi CD. Dico positionem esse impossibilem.

Demonstratio. Quandoquidem datur Hyperbola vna, vtpote AC, contingere in C, sectionem CD; altera Hyperbola EF opposita datæ AC, non occurret sectioni EG oppositæ ipsi CD, per prop. 52. quod erat demonstrandum.

Iam verò in casu quo sectiones datæ obtineant concaua vel conuexa ad easdem partes. Suppositio prima sit. Sint datæ duæ sectiones oppositæ AB, CD; & aliæ duæ oppositæ EF, GH: & Hyperbola AB contingat in duobus punctis A, B, sectionem GH. Dico has sectiones omnes in nullo alio puncto sibi occurrere.

Demonstratio. Quia datur hyperbola AB contingere sectionem GH, in duobus punctis A, B, per prop. 51. altera Hyperbola CD opposita ipsi AB, non occurret sectioni EF oppositæ ipsi GH. Præterea per prop. 37. quia Hyperbola AB contingit sectionem GH concaua sui parte, non occurret sectioni EF oppositæ ipsi GH. sed neque duæ sectiones AB, GH, non occurrent sibi ad aliud punctum diuersum ab datis punctis A, B, contactuum: si enim occurreret in alio puncto; tunc per prop. 44. aliæ duæ sectiones CD, EF, sibi mutuò occurrerent in alio puncto, contra demonstrata. Igitur in hoc casu probauerimus intentum.

Sed etiam in casu quo sectiones datæ concaua vel conuexa possideant ad easdem partes. Dentur sectiones duæ oppositæ AB, CD; tùm aliæ duæ oppositæ EF, GH; & Hyperbola AB contingat in vnico puncto I, sectionem GH; tùm Hyperbola CD opposita ipsi AB, contingat in puncto K vnico sectionem EF oppositam ipsi GH. Dico in nullo alio puncto sibi occurrere.

Demonstratio. Quia dantur sectiones oppositæ AB, CD, contingere sectiones oppositas GH, EF, singulæ singulas in vno puncto: per prop. 54. superiorem non sibi mutuò occurrent in alio quouis puncto. quod erat demonstrandum.

Et sic propositio in omni casu erit ratiocinijs factis abundè probata.

F I N I S.

LECTORI BENEVOLO.

Quæ typis irrepſerunt errata, benigne Lector, Amanuenſis & Typothetæ incuriæ condona, & ſic emenda.

PAg. 2. Col. 1. Lin. 30. Diuerſa circulo, lege Diuerſa ab circulo.
Pag. 12. col. 2. lin. 23. Siue, lege hoc.
pag. 14. col. 2. lin. 12. CB. lege CG
pag. 15. col. 1. lin. 4. demonſt. lem. 42. OM lege X M
pag. 29. col. 2. lin. 10. dele habebant.
pag. 32. col. 2. lin. 4. demonſt. prop. 1. in ipſa Conica. lege in ipſa ſuperficie Conica
pag. 33. col. 1. lin. 7. explic. coroll. noſtri. Duo, lege hoc.
pag. 36. col. 1. lin. 9. Textus, prop. 4. Interſecans, lege interſecans ſiue coniunctione
pag. 42. col. 1. lin. 24. &c. lege eſt
pag. 51. col. 1. lin. 4. Suppoſit pro ſectione, lege reſultabit pro ſectione
pag. 52. col. 2. lin. 39. Lineæ ab, lege lineæ quæ ab
pag. 56. col. 2. lin. 20. quadratum L M. lege quadratum rectæ LM
pag. 61. col. 2. lin. 7. citra, lege circa.
pag. 62. col. 2. lin. 33. BC. lege XO.
pag. 63. col. 2. lin. 10. rectangulo, lege rectangulo PN.
ibid. lin. 36. HD. lege HC.
pag. 84. col. 1. lin. 10. definit. 24. eſt, lege &
pag. 91. col. 2. lin. 11. Triangularis, & elliptica lege Triangularis, circularis & elliptica
pag. 100. col. 1. lin. 12. ſine vllo angulo adde & undis.
pag. 108. col. 2. lin. 4. coroll. noſt. FN, lege FA.
pag. 113. col. 2. lin. 12. vltra B, lege vltra A.
pag. 118. col. 2. lin. 3. Suppoſit. V & X, lege V & T
pag. 121. col. 1. lin. 4. 5. 6. ante finem. delenda iſta eſt autem per prop. 21. quadratum rectæ FG ad quadratum rectæ DH.
pag. 124. col. 2. lin. 21. ante fin. recta EN ſumatur, lege recta EM producenda ſi opus ſit vltra M, ſumatur
pag. 127. col. 1. lin. 15. minorum quadratis, lege minora ſunt quadratis
pag. 134. col. 1. lin. 11. Suppoſ. dele æquale.
pag. 139. col. 1. lin. 19. parallelogrammum, lege parallelogrammi
ibidem col. 2. lin. 20. dele non
Ibidem lin. 7. ante finem quadratæ rectæ, lege quadratum rectæ
pag. 140. col. 1. lin. 2. ergo corollarium, lege ergo per corollarium
pag. 141. col. 2. lin. vlt. explic. coroll. 6. adde æqualia
pag. 149. col. 2. lin. 23. & 24. delenda. producendæ in hyperbola tantum vltra B verticem
pag. 153. col. 1. lin. 3. ante finem ex applicata, lege eſt applicata
ibidem col. 1. lin. 11. vti oportet, lege ſi vti oportet
pag. 155. col. 1. lin. 1. EG. lege ED.
Ibidem col. 2. lin. 28. triangulis lege eſt in triangulis
pag. 161. col. 2. lin. 4. ante finem prop. 52. huic lege ſiue
pag. 164. col. 2. lin. 5. quadratorior lege quadrata.
pag. 169. col. 1. lin. 4. ſuppoſ. lemm. 3. poſita recta linea AE, dele recta linea AE, & lin. 5. ante finem, ex angulo BAC, lege ex anguli EAC, & col 2. lin. 3. Textus lem. 5. Iuferiore lege inferiore.
Pag. 172. col. 1. lin. 5. text. lem. 8. perueniret lege perueniet & lin. penult. ſuppoſ. lem. prædicti, circumferentiam ellipſeos, lege circumferentia ellipſeos
Ibidem lin. 34. atque fecerimus, lege atque ita fecerimus
Ibidem lin. 5. text. lem. 13. DCG. lege CG.
pag. 177. col. 2. in fin. explic. corol. 2. atque ita, lege atque ita fecerimus noſtrum Imperatum.
pag. 191. col. 2. lin. ante finem, ab tranſuerſo lege ab latere tranſuerſo
pag. 192. col. 2. lin. 18. rectas eundem, lege rectas diuidentes eundem.
pag. 194. col. 2. lin. penult. deducta ex, lege, deducta eſt ex.
p. 196. col. 2. lin. 13. ante finem. 17. lege 17. lib. 2.
p. 199. col. 1. lin. 4. explic. prop. 8. E lege in E.
p. 206. col. 1. lin. 2. & 3. proprius & proprius. lege propius & propius.
Item col. 2. lin. 33. ſiua hyperboles, lege ſuæ hyperboles.

Pag. 212. col. 2. lin. 16. rectam, lege rectarum.
Pag. 216. col. 2. lin. 28. per cit. prop. lege per cit. definitionem prop.
pag. 217. col. 1. lin. 9. explic. prop. 23. quadratis lege quadrati.
p. 218 col 2. lin 17. contactam. lege contactuum.
p. 219. col. 1 lin. 23. rectam GH, lege rectam A H.
Ibidem lin. 16 vſque 14 ante finem, interſecet in H, rectæ AH, & recta GH, productæ vltra H, perueniendo ad punctum K, interſecaret iterum in alio puncto L, rectam A H, lege interſecent in H recta AH & recta GH, quæ vltima producta vltra H, perueniendo ad punctum K, interſecaret iterum in alio puncto L, rectam AH.
p. 220 col 2 lin. 7. CAD. lege GMI.
p 214 col. 2. lin. penult explic. coroll noſt. 2. quid diuerſo ab aſſignato in propoſitione, lege diuerſa ab aſſignato puncto in propoſitione.
p. 216. col 2. lin. 5. CDG, lege CDF.
p. 228. col. 2. lin. 2 explic prop 38. A. lege B. & linea 5. B, lege A.
p. 232. col. 2. lin 8. ante finem, punctum lege puncta.
p. 239. col 2. lin. 2. Text. coroll. 12. Si recta. lege recta
p 245. col. 1. lin. 14. MHKLM. lege NHKLM.
p. 255. col 1. lin 10. explic. coroll. 17. parallelæ, lege parallelas.
p. 257. col. 2. lin. 4. ante finem explic. coroll. 13. erit recta CF lege erit per prop. 2. lib. 6. elem. recta CF.
p. 260. col. 1. lin 18. In O. lege. In N.
p. 261. col 2. lin 9. explic. coroll. 36 rectam BHB, lege rectam BE.
p 268. col. 1 lin. 5. ante finem, DIK. lege HIK.
p. 269. col 1. lin. 11. diameter AB lege diameter eſt AB.
p 273. col. 1. lin 5. eligatur. lege erigatur.
p 277. col 2 lin vlt. AFE. lege GFE.
p. 278. col. 1. lin. 7. AFE. lege GFE.
p. 286. col. 2. lin. 5. Text. lem. 16 ſic quadratum; lege ſit quadratum.
& lin. 3. explic. dicti lem. 16. ipſi A. lege ipſi C.
& lin. 6 eiuſd. explic. vt quadratum, lege ſit quadratum.
p 293. col 1. lin 14. rectangulum lege rectangulo.
p. 298. col. 1. lin. 7. bifariam. lege bifariam ſecta. ibid. col. 2. lin. 27. BD, lege BC.
p. 300. col. 2. lin. 4. ante finem. KLM, lege KNX. & lin. 2. ante finem KNX. lege KLM.
p. 301. col. 2. lin. 33. hoc &c. lege hoc eſt.
p. 308 col. 1. lin. 30. ad lege quæ ad.
p. 311. col. 1. lin. 5. expl. prop. 18. vel autem. lege vel ambæ. & col. 2. lin. 26. prop. 16. lege prop. 22. & lin. 27. ante finem, ſectionem MN, lege ſectionem MP. & linea 10. ante finem, tangens A. in puncto L. lege tangens ACE in puncto L. & linea 6. ante finem prop. 29. lege prop. 32.
p. 325. col. 2. lin. 18. ſub AE, EC. lege ſub BE, ED. & lin. 8. ante finem vt PB ad BC. lege vt PB ad BD.
p. 337. col. 1. lin. 8. ante finem. ad DG. lege ad EG.
p. 338. col. 1. lin. 6. ante finem. A, C. lege A, B.
p. 341. col. 2. lin. 5. ſuppoſit. conuenientem. lege conuenientes.
p. 342. col 2. lin. 21. apparat. XACT. lege XAT.
p. 343. col 2. lin vlt. DBE. lege DEF
p. 344. col. 2. lin. 15. dele erunt.
p. 347. col. 2. lin. 2. explic. corol. noſt. 4. In ellipſi per coroll. lege in ellipſi per prop. 49. coroll. ibid. linea 5. noſt. 18. lege noſtr. 22.
p. 348. col. 1. lin. 10. explicationis. BD lege AB.
p. 367. col. 2. lin. 4. ſuppoſit. A, C. lege A, B.
p. 370. col 2. lin. 7. definit. 5. ſuperiorem lege præſentem.
p. 379. col. 2. lin. 9. demonſtrat. & alter. lege & altera.
pag. 380. col. 2. lin. 6. Text. prop. 23. altera aſympoto. lege alteri aſympoto.

·LECTORI TYPOGRAPHVS.

HAbes hic deſideratum in 4. Lib. Conicorum Apollonij Pergæi Commentarium, ſchematis, ſeu figuris, ſummâ curâ & diligentia delineatis, inque laminas æneas accuratiſſimè inciſis exornatum; quarum ope figuræ & textus, facillimè ſimul viſui obijciuntur: figura enim in textu citata, inter tabulas ante vel poſt finem libri affixas, & complicatas quærenda eſt, atque diſplicanda, vt vnà textus & figura de qua agitur, pateant.

AD COM-

AD COMPACTOREM.

OMnes figurarum tabulæ folijs à sinistris impressæ, à lamina 1. vsque ad 15. inclusiuè, ordine numerorum figuris appositorum, ante titulum libri affigantur: ita vt singulæ folio albo affixæ, prout opus est displicatæ, totæ extra librum in conspectum veniant: replicatæ autem semel, præcisè intra libri margines recipiantur; omnes verò reliquæ tabulæ, post finem libri, ordine figurarum, vt de præcedentibus dictum est, compingantur.

Item. Possunt etiam Laminæ huius Libri separatim in paruo Libello compingi, & tunc oportet medium folium laminarum album abscindere, & laminas secundum ordinem ponere, scilicet; laminam 1. 2. 3. &c. vsque 30. Inclusiuè: qui modus compingendi pluribus aptissimus & accommodatissimus probatur, vt figuræ iuxta Textum & explicationem huius libri aptissimè vsurpentur.

AV RELIEVR.

LEs planches ornées des figures & imprimées sur la moitie gauche de la fuille, à sçauoir de la planche 1. iusque à la 15. inclus, seront reliées deuant le tiltre du liure suiuant leur ordre: en sorte que la fueille estant depliée, le blanc demeure dedans le liure, & l'imprimé se monstre hors, & repliée soit iustement reçeu dans le liure: le reste des planches se relieront selon l'ordre des figures, a la fin du liure, a la mesme maniere que dessus.

Item. Les planches des figures de ceste Liure se pourront aussi lier separé en vn petit Liuret; mais alors il faut couper la moitie de la planche, à sçauoir le papier blanc, & mettre les planches suiuant leur ordre, à sçauoir la planche 1. 2. 3. &c. iusque à la 30. inclus, lequel maniere de lier de ce liure est approuué de plusieurs personnes, pour pouuoir vser tant mieux les figures iuxt le Text & explication de ce Liure.

TOT DEN BOECKBINDER.

ALle de platen van desen boeck ghedruckt zijnde op de slincke sijde van het pampier/ te weten van Num. 1. tot 15. inclus/ sullen ghebonden worden volghens hunne orde voor den tytel vanden boeck/ in sulcker voeghen/wesende de figure ingenaept aen den cant van het wit pampier / dat de selve eens ontvouden zijnde gheheel comt te vallen int' ghesicht buyten den boeck/ende de selve eens toegevouden zijnde/ comt wederom precieselijck te vallen binnen den boeck; de resterende platen ghedruct zijnde op de rechte sijde van het pampier / die sullen ghebonden worden achter int' eynde vanden boeck volghens hunne orde / op de selve maniere ghelijck vande voorgaende ghesept is.

Item. Men can oock de platen van desen boeck in een boecken appart laten binden/ ende alsdan moetmen de helft te weten het wit pampier van t' bladt van de figure af-snyden/ ende de platen ordentlijck achter malcanderen voeghen: te weten Num. 1.2.3. etc. tot 30. inclus. Welcke maniere van binden van desen boeck by veele seer bequaem ghevonden is/om de figuren neffens den Text ende explicatie het beste en bequaemste te connen ghebruycken.

